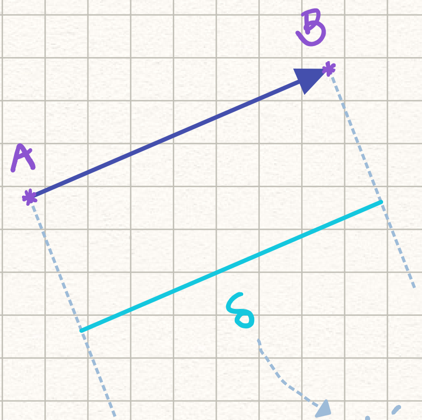
AULAS ANTERIORES

09/06/2021

Distância entre Dois Pontos



$\delta(A,B) = |\vec{AB}|$

$\delta(A,B) = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$

$A(x_a, y_a)$
$B(x_b, y_b)$

$\delta(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

só o tamanho do vetor!

11. CÔNICAS

O Problema do Lugar Geométrico

Condição Geométrica (Figura) $\longleftrightarrow$ Condição Algébrica (Equação)

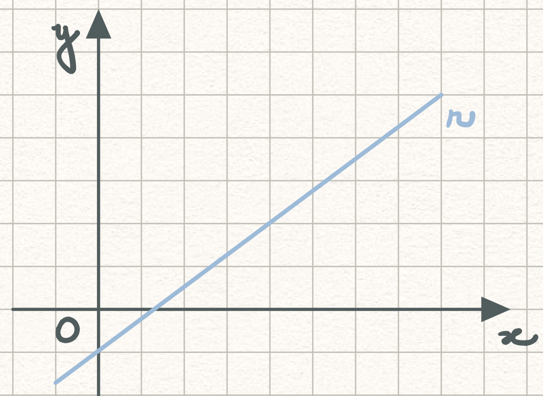
Lugar Geométrico de uma equação:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \longrightarrow \text{curva no } \mathbb{R}^2 \\ g(x,y,z) = 0 \longrightarrow \text{superfície no } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Slide 03 - Exemplos

1. $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \delta = 0 \longrightarrow$ reta no $\mathbb{R}^2$

$\forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$



(2) $|x| + |y| - 1 = 0 \longrightarrow |x| + |y| = 1 \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Fazendo a análise de sinal:

* $x > 0 \;,\; y > 0$:

$x + y - 1 = 0$ ou $r_1: \; y = -x + 1 \quad \begin{cases} x = 0 \;,\; y = 1 \\ y = 0 \;,\; x = 1 \end{cases}$

* $x > 0 \;,\; y < 0$:

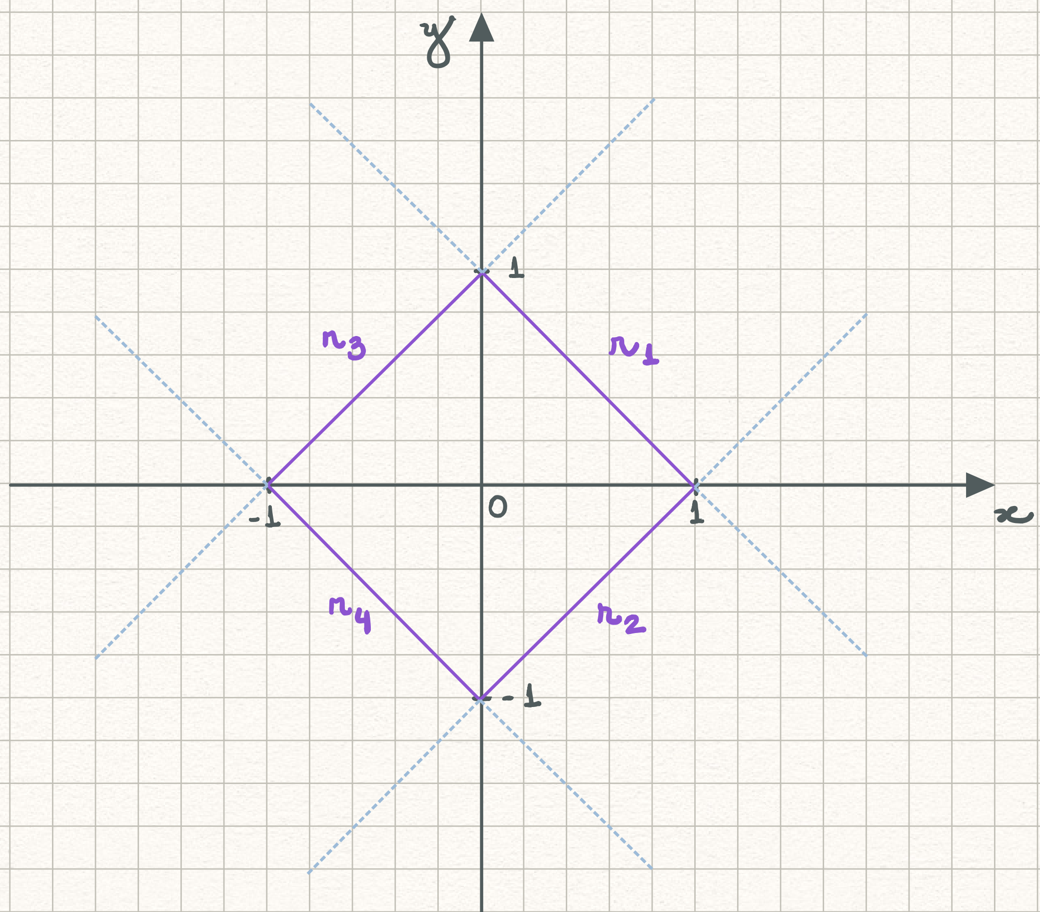
$x - y - 1 = 0$ ou $r_2: \; y = x - 1 \quad \begin{cases} x = 0 \;,\; y = -1 \\ y = 0 \;,\; x = 1 \end{cases}$

* $x < 0 \;,\; y > 0$:

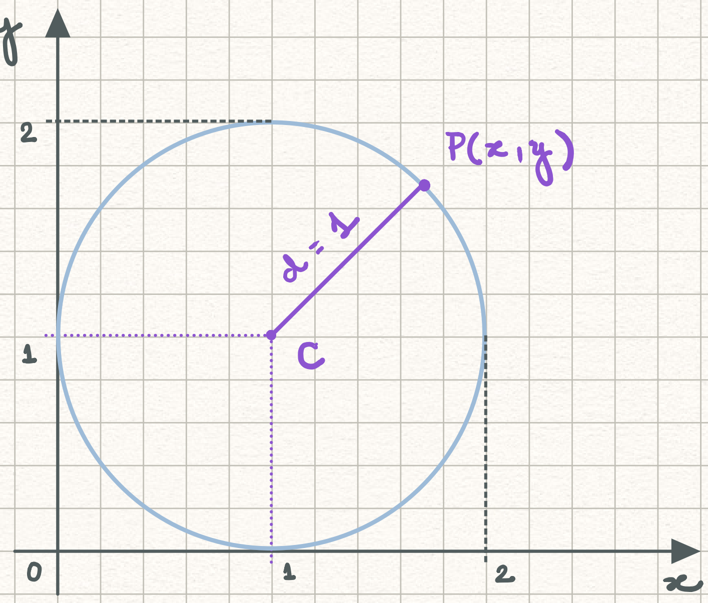
$-x + y - 1 = 0$ ou $r_3: \; y = x + 1 \quad \begin{cases} x = 0 \;,\; y = 1 \\ y = 0 \;,\; x = -1 \end{cases}$

* $x < 0 \;,\; y < 0$:

$-x - y - 1 = 0$ ou $r_4: \; y = -x - 1 \quad \begin{cases} x = 0 \;,\; y = -1 \\ y = 0 \;,\; x = -1 \end{cases}$



3



$d = \delta(C,P) = 1$

$\delta(C,P) = |\vec{CP}|$

$\vec{CP} = (x-1, y-1)$

$|\vec{CP}| = \sqrt{\vec{CP}\cdot\vec{CP}}$

$= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

Assim:

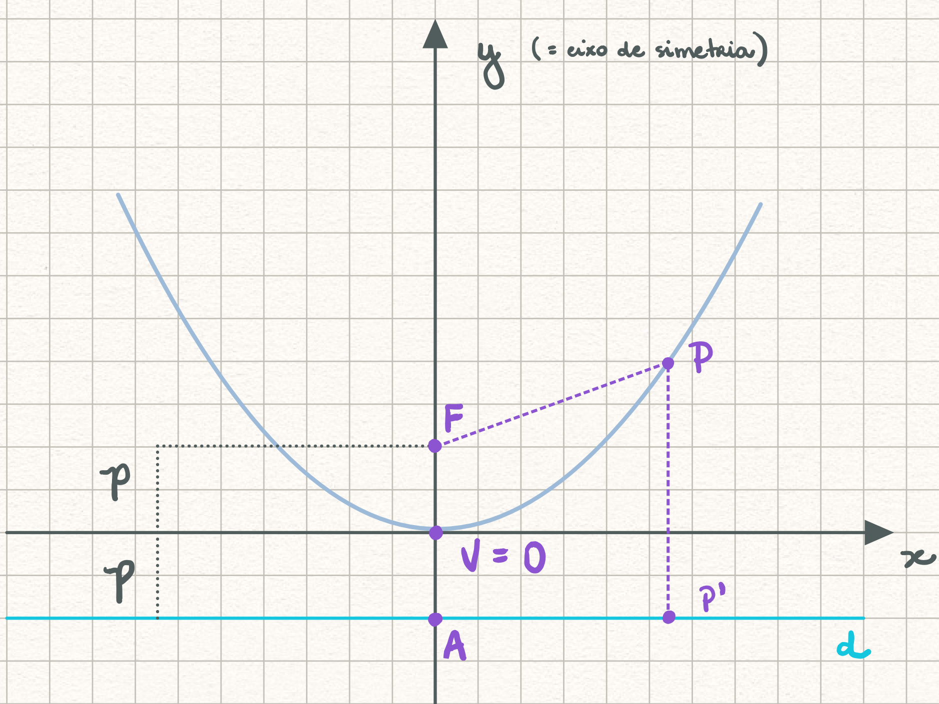
$\delta(C,P) = 1$ e $\delta(C,P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

Portanto:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ $\begin{cases} \text{Eq. da circunferência} \\ C(1,1) \text{ e } R = 1 \end{cases}$

A PARÁBOLA

Equação da parábola cujo eixo de simetria coincide com Oy



P(x,y)

P'(x, -p)

F(0, p)

Definição de parábola : $|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PP'}|$

ou $|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P'P}|$ (1)

$\overrightarrow{FP} = P - F = (x, y) - (0, p) = (x, y-p)$

$|\overrightarrow{FP}| = \sqrt{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FP}} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ //

$\overrightarrow{P'P} = P - P' = (x, y) - (x, -p) = (0, y+p)$

$|\overrightarrow{P'P}| = \sqrt{\overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{P'P}} = \sqrt{(y+p)^2} = (y+p)$ //

Substituindo os módulos em (1):

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = (y+p) \qquad (\ )^2$$

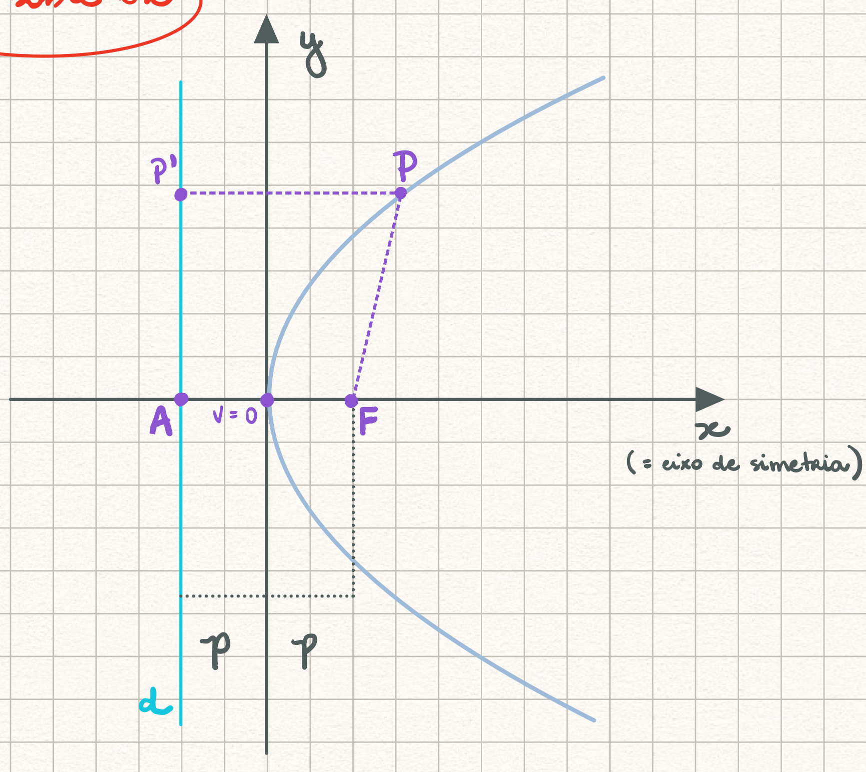
$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2py + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2py + \cancel{p^2}$$

$\therefore \quad x^2 = 4py$ Eq. reduzida da parábola $\begin{cases} V \text{ coincide com origem} \\ \text{eixo sobre } Oy \end{cases}$

$p \in \mathbb{R}^* \ldots$ parâmetro

Eixo sobre Ox



$y^2 = 4px$ Eq. reduzida da parábola $\begin{cases} V \text{ coincide com origem} \\ \text{eixo sobre } Ox \end{cases}$

Slide 11

Determinação da concavidade:

$x^2 = 4py \longrightarrow x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \therefore$ p e y têm mesmo sinal

Logo, se $\begin{cases} p > 0, & y > 0 \\ p < 0, & y < 0 \end{cases}$

p determina a concavidade:

$p > 0$ ... concavidade (+) (para cima)

$p < 0$ ... concavidade (−) (para baixo)

$y^2 = 4px \longrightarrow y^2 \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R} \ \therefore$ p e x têm mesmo sinal

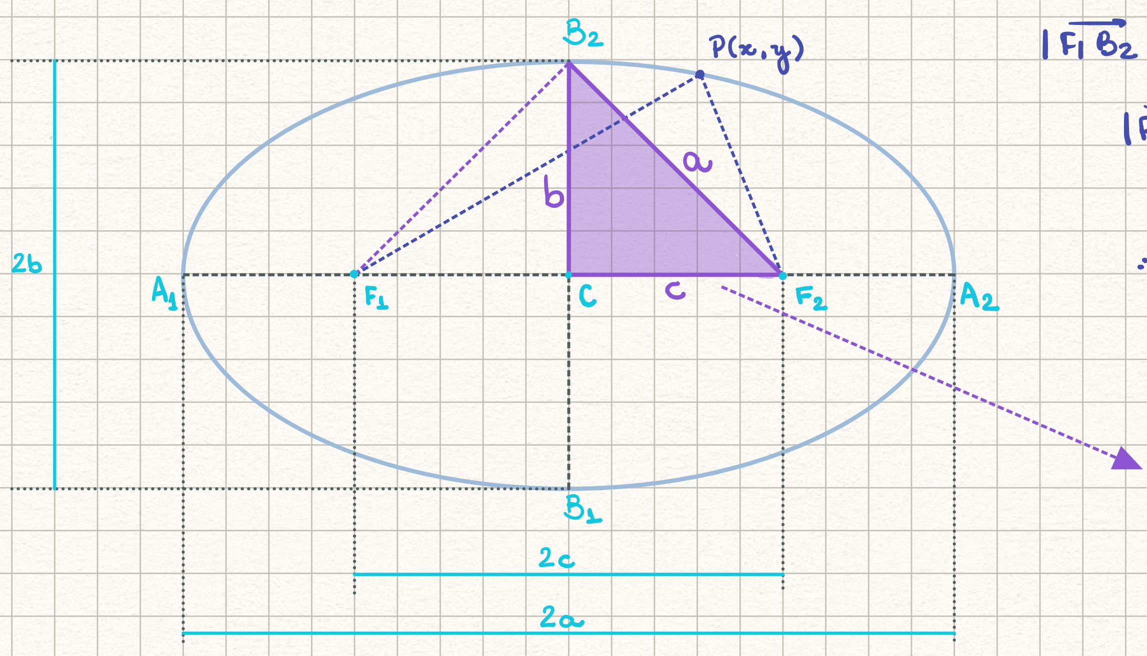
Logo, se $\begin{cases} p > 0, & x > 0 \\ p < 0, & x < 0 \end{cases}$

p determina a concavidade:

$p > 0$ ... concavidade (+) (para direita)

$p < 0$ ... concavidade (−) (para esquerda)

A ELIPSE



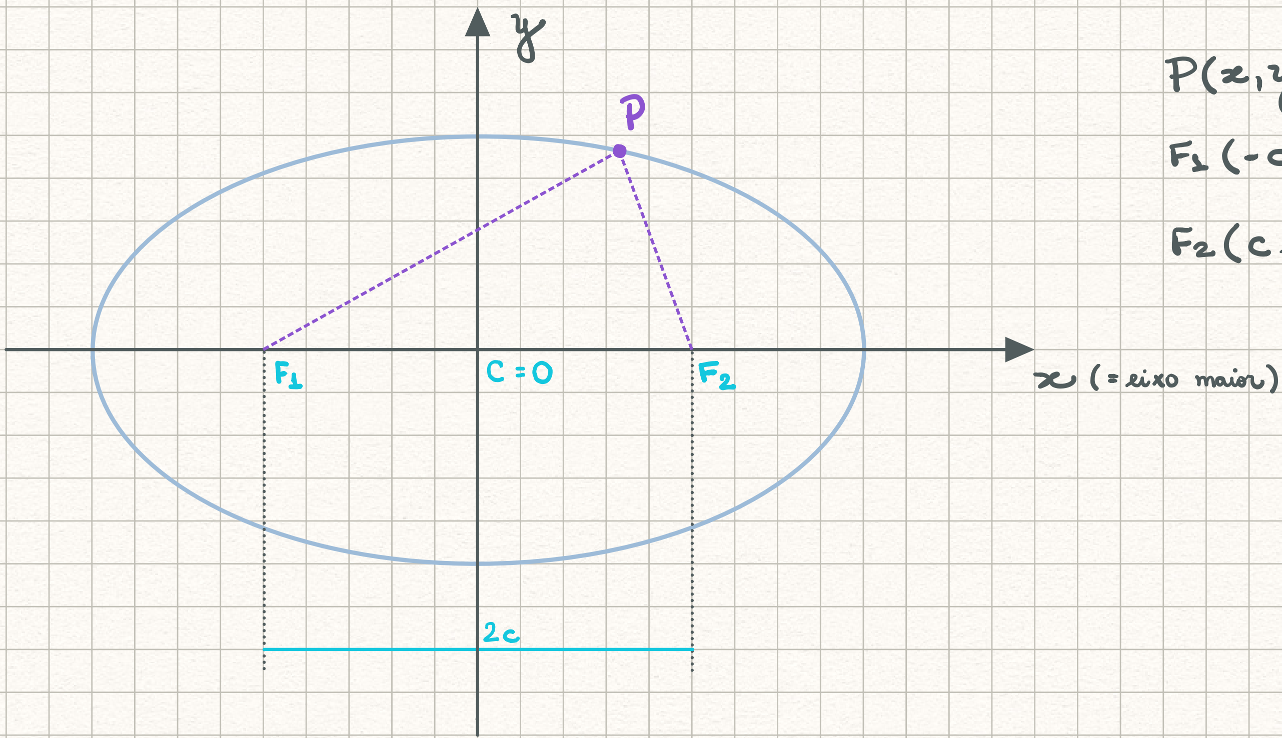
$|\overrightarrow{F_1B_2}| + |\overrightarrow{F_2B_2}| = 2a$

$|\overrightarrow{F_1B_2}| = |\overrightarrow{F_2B_2}|$

$\therefore |\overrightarrow{F_2B_2}| = a$ //

$a^2 = b^2 + c^2$ //

Equação da elipse cujo eixo maior coincide com Ox



$P(x, y)$

$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

Definição de elipse : $|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$

ou $|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a \quad (1)$

$\overrightarrow{F_1P} = P - F_1 = (x + c, y)$

$|\overrightarrow{F_1P}| = \sqrt{\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_1P}} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ //

$\overrightarrow{F_2P} = P - F_2 = (x - c, y)$

$|\overrightarrow{F_2P}| = \sqrt{\overrightarrow{F_2P} \cdot \overrightarrow{F_2P}} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ //

Substituindo os módulos em (1):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (\ )^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + [(x-c)^2 + \cancel{y^2}]$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \qquad (\ )^2$$

$$a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Sabe-se que, na elipse, vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad a^2 - c^2 = b^2$$

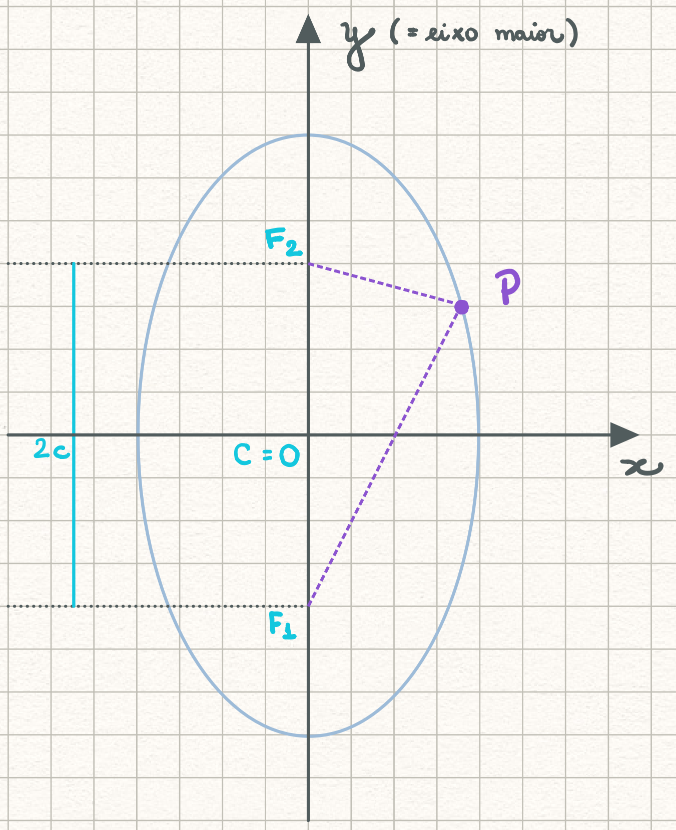
Desta forma:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (\div\, a^2b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eq. reduzida da elipse $\begin{cases} C \text{ coincide com a origem} \\ \text{eixo maior sobre } Ox \end{cases}$

Eixo maior sobre Oy



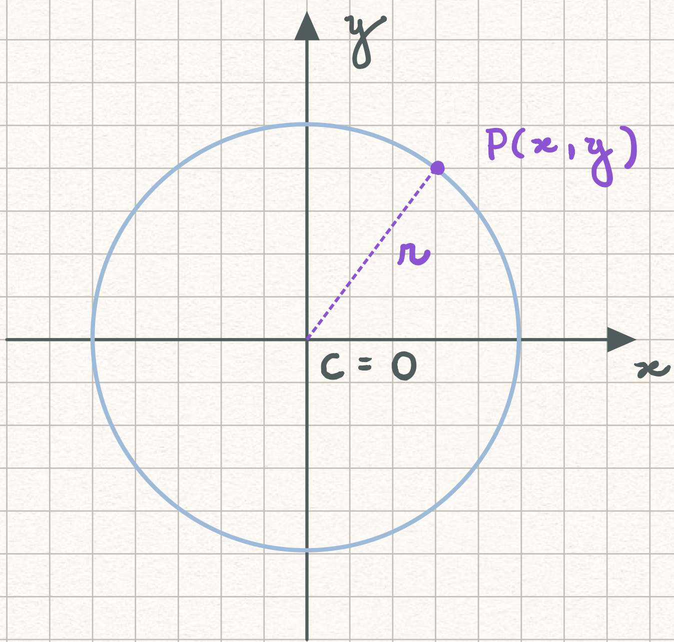
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Eq. reduzida da elipse

$\begin{cases} C \text{ coincide com a origem} \\ \text{eixo maior sobre } Oy \end{cases}$

Slide 17

A circunferência é um caso particular da elipse em que $\nexists$ c. Desta forma, $a = b$ e consequentemente, todos os pontos sobre essa curva estão à mesma distância do seu centro C.



Substituindo $a = b$ em uma das eqs. reduzidas da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tem-se: $x^2 + y^2 = b^2$

$b = r$

$x^2 + y^2 = r^2$

Eq. reduzida da circunferência cujo centro C coincide com a origem