# POLINÔMIOS DE LEGENDRE

## ELETROMAGNETISMO

### *Equação diferencial*

Ao aplicar o método da separação de variáveis em coordenadas esféricas, encontramos a equação diferencial que define os polinômios de Legendre. Especificamente, procuramos uma solução para a equação de Laplace, $\nabla^2 V = 0$ na forma

$$V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta). \tag{1}$$

Resultou então que

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) = 0. \tag{2}$$

Como cada um dos termos à esquerda depende de uma variável diferente, a equação somente tem solução se o primeiro termo for uma constante e o segundo, o negativo da mesma constante. Veremos que é prático chamar essa constante de $\ell(\ell+1)$. Igualar a $-\ell(\ell+1)$ o segundo termo à esquerda na Eq. (2) resulta na equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\operatorname{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) = -\ell(\ell+1)\Theta. \tag{3}$$

As funções trigonométricas tornam a Eq. (3) pouco atraente. Como de costume quando se trata de coordenadas esféricas, é mais conveniente trabalhar com a variável $u = \cos\theta$. Com isso, podemos ver que $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta$, o que promete simplificar a equação diferencial. Para simplificá-la ainda mais, multiplicamos o denominador e o numerador da função na primeira derivada à esquerda por $\operatorname{sen}\theta$, para mostrar que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) = -\ell(\ell+1)\Theta. \tag{4}$$

Dado que $\operatorname{sen}^2\theta = 1-u^2$ e que $\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{d}u$, a Eq. (4) pode ser escrita na forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big((1-u^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\Big) = -\ell(\ell+1)\Theta, \tag{5}$$

muito mais tratável do que a Eq. (3).

A Eq. (5) é homogênea. Se $f(u)$ for uma solução, $\lambda f(u)$ também será solução, onde $\lambda$ é uma constante arbitrária. Para eliminar essa indefinição, convenciona-se exigir que a solução seja igual à unidade para $u = 1$, isto é,

$$\Theta(u=1) = 1. \tag{6}$$

## *Solução pelo método de Frobenius*

O método de Frobenius recomenda procurar soluções polinomiais para a Eq. (5). De maneira geral, procurar soluções com a forma

$$\Theta(u) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_{n,m} u^m, \tag{7}$$

onde os $\alpha_{n,m}$ são coeficientes a determinar e $m$ é um inteiro que, em princípio, pode ser escolhido arbitrariamente.[1] A convenção (6) impõe uma condição sobre os coeficientes:

$$\sum_{n=0}^{m} \alpha_{n,m} = 1. \tag{8}$$

[1] As soluções polinomiais não são as únicas, mas são as únicas que são bem comportadas em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Essa questão está muito bem discutida no livro texto, logo abaixo à Eq. (3.63).

### *Casos particulares*

Para ver que a solução pode ser um polinômio, podemos examinar dois casos particulares.

**1. Constante.**

O menor inteiro $m$ que faz sentido, na Eq. (7), é a unidade. Nesse caso, o polinômio tem grau zero, ou seja, é uma constante:

$$\Theta_0(u) = \alpha_{0,0}. \tag{9}$$

Com $\Theta(u)$ constante, as derivadas no lado esquerdo da equação (5) se anulam e resulta que

$$\ell(\ell+1)\alpha_{0,0} = 0. \tag{10}$$

O coeficiente $\alpha_{0,0}$ não pode ser zero: se fosse, a função $\Theta$ se anularia. Assim, a Eq. (10) implica $\ell = 0$. Achamos uma solução. Fixar o coeficiente $\alpha_0$ é fácil, a partir da Eq. (6), e segue que

$$\Theta_0(u) = 1. \tag{11}$$

**2. Função linear.**

Com $m = 2$, o polinômio é linear:

$$\Theta_1(u) = \alpha_{0,1} + \alpha_{1,1} u. \tag{12}$$

Podemos substituir o lado direito da Eq. (12) no lugar de $\Theta$ na equação diferencial. (5). O resultado é

$$-2\alpha_{1,1}u = -\ell(\ell+1)\alpha_{0,1} - \ell(\ell+1)\alpha_{1,1}u. \tag{13}$$

Os termos proporcionais a $u$ nos dois lados da Eq. (13) devem ter coeficientes iguais. O coeficiente $\alpha_{1,1} \neq 0$ não pode ser zero: se fosse, o polinômio se reduziria a uma constante, caso que já superamos. Assim, a Eq. (13) exige que o fator de $\alpha_{1,1}u$ à esquerda seja igual ao fator de $\alpha_{1,1}u$ à direita:

$$-2 = -\ell(\ell+1), \tag{14}$$

o que mostra que a função linear é a solução da equação diferencial quando

$$\ell = 1. \tag{15}$$

Já o termo constante no lado direito da Eq. (13) não tem correspondente no lado esquerdo. Segue que $\alpha_{0,1} = 0$, e assim a solução (12) se reduz a $\Theta_1(u) = \alpha_{1,1}u$, e como ela está sujeita à condição (6), podemos ver que

$$\Theta_1(u) = u. \tag{16}$$

*Caso geral*

O procedimento adotado acima pode ser repetido para $m = 3, 4, \ldots$. É fácil, mas fica cansativo para $m$ grande. É melhor fazer uma análise geral. Vamos, portanto, substituir a expressão polinomial (7) no lugar de $\Theta$ na equação diferencial. As derivadas podem ser imediatamente calculadas, e resulta que

$$\sum_{n=0}^{m} \alpha_{n,m} n(n-1)u^{n-2} - \sum_{n=0}^{m} \alpha_{n,m} n(n+1)u^{n} = -\ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{m} \alpha_{n,m} u^{n}. \tag{17}$$

O segundo termo à esquerda é parecido com o termo à direita. Podemos combinar os dois numa soma só, para obter a equação

$$\sum_{n=0}^{m} \alpha_{n,m} n(n-1)u^{n-2} = \sum_{n=0}^{m} \Big(n(n+1) - \ell(\ell+1)\Big)\alpha_{n,m} u^{n}. \tag{18}$$

A soma no lado esquerdo da Eq. (18) começa com $n = 2$, porque o fator $n(n-1)$ é nulo para $n = 0$ e para $n = 1$. Por isso, a equação se reduz a

$$\sum_{n=2}^{m} \alpha_{n,m} n(n-1)u^{n-2} = \sum_{n=0}^{m} \Big(n(n+1) - \ell(\ell+1)\Big)\alpha_{n,m} u^n. \qquad (19)$$

O que atrapalha nessa igualdade é o desequilíbrio entre as potências de $u$: $u^{n-2}$, à esquerda, e $u^n$, à direita. Para nivelar, vamos definir uma variável $p \equiv n-2$ e substituir $n$ por $p+2$ na soma à esquerda. Com isso, encontramos que

$$\sum_{p=0}^{m-2} \alpha_{p+2,m}(p+2)(p+1)u^p = \sum_{n=0}^{m} \Big(n(n+1) - \ell(\ell+1)\Big)\alpha_{n,m} u^n. \qquad (20)$$

Para facilitar mais a comparação, convém trocar outra vez o índice de soma à esquerda. Como o índice é mudo, qualquer símbolo serve, e podemos trocar $p$ por $n$:

$$\sum_{n=0}^{m-2} \alpha_{n+2,m}(n+2)(n+1)u^n = \sum_{n=0}^{m} \Big(n(n+1) - \ell(\ell+1)\Big)\alpha_{n,m} u^n. \qquad (21)$$

Fica fácil, agora, comparar o coeficiente de $u^n$, à esquerda, com o coeficiente de $u^n$, à direita. Em primeiro lugar, é necessário ver que os dois últimos termos na soma à direita não têm correspondente à esquerda. Significa que os dois últimos somandos têm de ser zero. No caso do último somando, temos que

$$\alpha_{m,m}\Big(m(m+1) - \ell(\ell+1)\Big) = 0. \qquad (22)$$

Como $\alpha_{m,m}$ não pode ser zero (se fosse zero o polinômio não teria grau $m$) a Eq. (22) exige que o fator multiplicando $\alpha_{m,m}$ seja zero, o que somente é possível se

$$m = \ell. \qquad (23)$$

Assim, tiramos a primeira conclusão importante: dado $\ell$, a solução da Eq. (5) é um polinômio de grau $\ell$. Em particular, a solução para $\ell = 0$ é uma constante, como mostra a Eq. (11), e a solução para $\ell = 1$ é linear, como mostra a Eq. (16).

Essa conclusão é tão importante que, para lembrar que a solução é um polinômio de grau $\ell$, passaremos a chamá-la de $P_\ell(u)$, em lugar de $\Theta_m(u)$. Os $P_\ell$ $(\ell = 0, 1, 2, \ldots)$ são conhecidos como polinômios de Legendre.

Para aprender mais sobre os polinômios de Legendre, vejamos o penúltimo somando no lado direito da Eq. (21). Com $n = m-1$, temos que

$$\alpha_{m-1,m}\Big((m-1)m - \ell(\ell+1)\Big) = 0. \qquad (24)$$

Aqui, também, um dos termos do produto à esquerda tem de ser zero. Como $m = \ell$, o termo entre parênteses vale $-2\ell$, que somente se anula no caso $\ell = 0$, que já resolvemos com a Eq. (11). Para os demais $\ell$s, o termo entre parênteses na Eq. (24) é diferente de zero, o que significa que $\alpha_{m-1,m} = 0$. Em outras palavras, o coeficiente que multiplica $u^{\ell-1}$ no polinômio é sempre zero. Já vimos um exemplo: no caso linear, o polinômio é dado pela Eq. (16), que não tem termo constante.

Podemos agora voltar à Eq. (21) para examinar os termos com $n \leq m-2$. Há somandos proporcionais a $u^n$ ($n = 0, 1, \ldots, m-2$) nos dois lados da iguadade. A comparação entre eles mostra que

$$\Big(n(n+1) - \ell(\ell+1)\Big)\alpha_{n,m} = (n+1)(n+2)\alpha_{n+2,m} \qquad (n = 0, 1, \ldots, m-2). \tag{25}$$

Como já sabemos que $m = \ell$, podemos escrever que

$$\Big(n(n+1) - \ell(\ell+1)\Big)\alpha_{n,\ell} = (n+1)(n+2)\alpha_{n+2,\ell} \qquad (n = 0, 1, \ldots, \ell-2). \tag{26}$$

A Eq. (26) é uma relação de recorrência. Dado $\alpha_{n+2,\ell}$, ela diz quanto vale $\alpha_{n,\ell}$. Suponhamos, por exemplo, que $\ell$ seja par. Começamos com $\alpha_{\ell,\ell}$, que ainda não conhecemos. A partir dele, a relação de recorrência determina $\alpha_{\ell-2,\ell}$, depois $\alpha_{\ell-4,\ell}$, e assim ir até chegar em $\alpha_{0,\ell}$. Com isso, teremos encontrado todos os coeficientes com $n$ par.

Os coeficientes ímpares são todos nulos, porque o penúltimo coeficiente, $\alpha_{\ell-1,\ell}$ é sempre zero, como já vimos. A relação de recorrência nos diz que $\alpha\ell - 3, \ell$ também é zero. Seguindo assim, mostraremos que todos os $\alpha n, \ell$ com $n$ ímpar são nulos, até $\alpha 1, \ell = 0$.

Se $\ell$ for ímpar, tudo se inverte. O último coeficiente, $\alpha_{\ell,\ell}$, multiplica a potência ímpar $u^\ell$. A relação de recorrência permite encontrar todos os coeficientes com $n$ ímpar. Já o penúltimo coeficiente é nulo, $\alpha_{\ell-1,\ell} = 0$. Como $\ell - 1$ é par, a relação de recorrência mostra que todos os coeficientes com $n$ par são nulos.

Em resumo, quando $\ell$ é par, a solução $P_\ell(u)$ é um polinômio de grau $\ell$ que somente tem potências pares de $u$ e é, portanto, uma função par de $u$. Quando $\ell$ é ímpar, a solução é um polinômio de grau $\ell$ que somente tem potências ímpares de $u$ e é, portanto, uma função ímpar de $u$.

De uma maneira ou de outra, todos os coeficientes são proporcionais ao coeficiente $\alpha_{\ell,\ell}$, que é desconhecido. Para encontrá-lo, basta lembrar que a soma dos coeficientes deve ser a unidade, Eq. (8).

*Dois exemplos*

Vejamos, como primeiro exemplo, $\ell = 4$. Podemos empregar a relação de recorrência para começar com $n = 4$ e descer ou, ao contrário, começar com $n = 0$ e subir. É mais simples subir. A relação de recorrência, com $\ell = 4$, toma a forma

$$(n+1)(n+2)\alpha_{n+2,4} = \Big(n(n+1) - 20\Big)\alpha_{n,4} \qquad (n = 0, 2). \tag{27}$$

Assim, com $n = 0$, vemos que

$$\alpha_{2,4} = -10\alpha_{0,4}. \tag{28}$$

Em seguida, com $n = 2$, vemos que

$$\alpha_{4,4} = -\frac{7}{6}\alpha_{2,4} = \frac{35}{3}\alpha_{0,4}. \tag{29}$$

E como os coeficientes têm soma unitária, podemos ver que

$$\alpha_{0,4}(1 - 10 + \frac{35}{3}) = 1, \tag{30}$$

ou seja,

$$\alpha_{0,4} = \frac{3}{8}. \tag{31}$$

Finalmente, podemos juntar os resultados:

$$P_4(u) = \frac{3 - 30u^2 + 35u^4}{8}. \tag{32}$$

Vejamos, agora, o segundo exemplo: $\ell = 3$. Como $\ell$ é ímpar, começaremos com $\alpha 1, 3$ e subiremos. A relação de recorrência é

$$(n+1)(n+2)\alpha_{n+2,3} = \Big(n(n+1) - 12\Big)\alpha_{n,3} \qquad (n = 1), \tag{33}$$

e ela nos dá, imediatamente, que

$$\alpha_{3,3} = -\frac{5}{3}\alpha_{1,3}. \tag{34}$$

Impomos, em seguida, que a soma dos coeficientes é unitária:

$$\alpha_{1,3}(1 - \frac{5}{3}) = 1, \tag{35}$$

para ver que

$$\alpha_{1,3} = -\frac{3}{2}. \tag{36}$$

Por fim, temos que

$$P_3 = \frac{-3u + 5u^3}{2}. \tag{37}$$

Uma segunda versão, que publicarei mais adiante, mostrará [a partir da Eq. (5)] que os polinômios são ortogonais.