UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

11. Cônicas

LOB 1036 - Geometria Analítica
Profa. Paula C P M Pardal

11.1 O Problema do Lugar Geométrico

- Dada uma condição geométrica (*figura*) → determinar uma condição algébrica (*equação*) que a represente.
  - A recíproca também é válida: dada uma equação, encontrar a figura por ela determinada.
- O lugar geométrico de uma equação (com duas ou três variáveis) é o conjunto de pares ou ternas de pontos que satisfazem:

$$f(x, y) = 0 \text{ ou } g(x, y, z) = 0$$

Exemplos

1. A equação $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \delta = 0$ representa uma **reta** $\therefore$ o lugar geométrico de $\alpha x + \beta y + \delta = 0, \forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, é uma reta.

2. Encontrar o lugar geométrico determinado pela equação $|x| + |y| - 1 = 0$.

   - **Quadrado** de vértices $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.

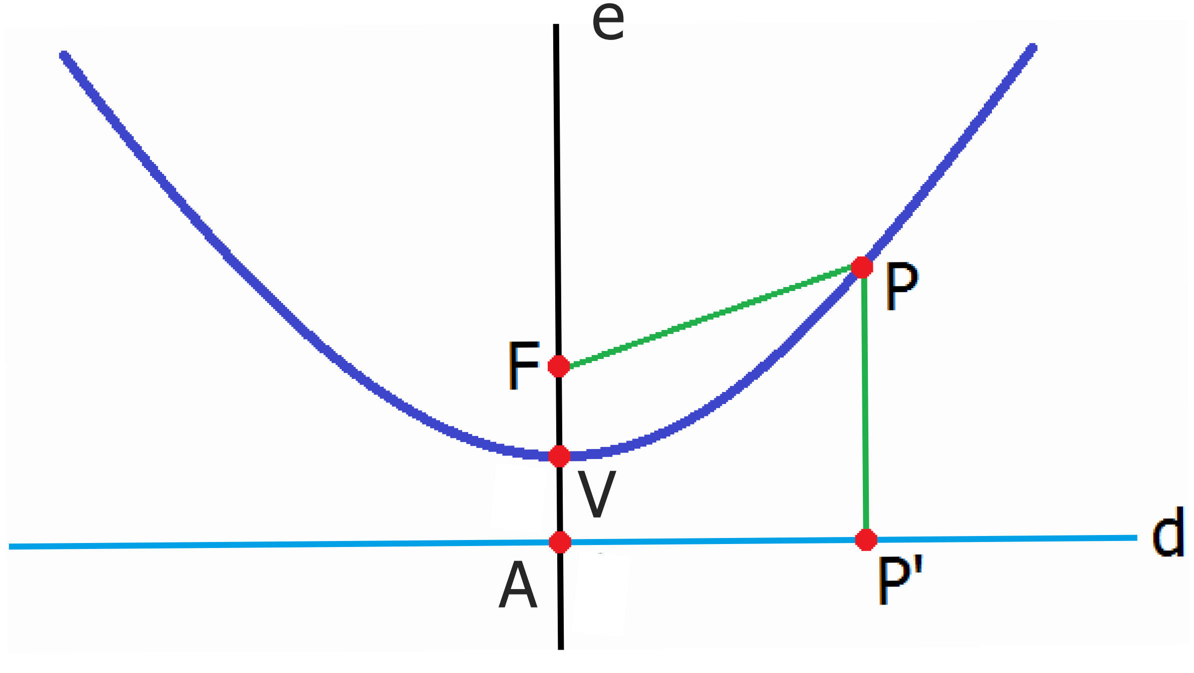
3. Determinar a equação do lugar geométrico no plano de todos os pontos que estão a uma distância 1 do ponto $C(1,1)$.

   - $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow$ **circunferência de raio 1** cujo centro é o ponto $C(1,1)$.

11.2 A Parábola

- Considere em um plano uma reta d e um ponto F, chamado de *foco*, F $\notin$ d.

  Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano **equidistantes** de F e d.



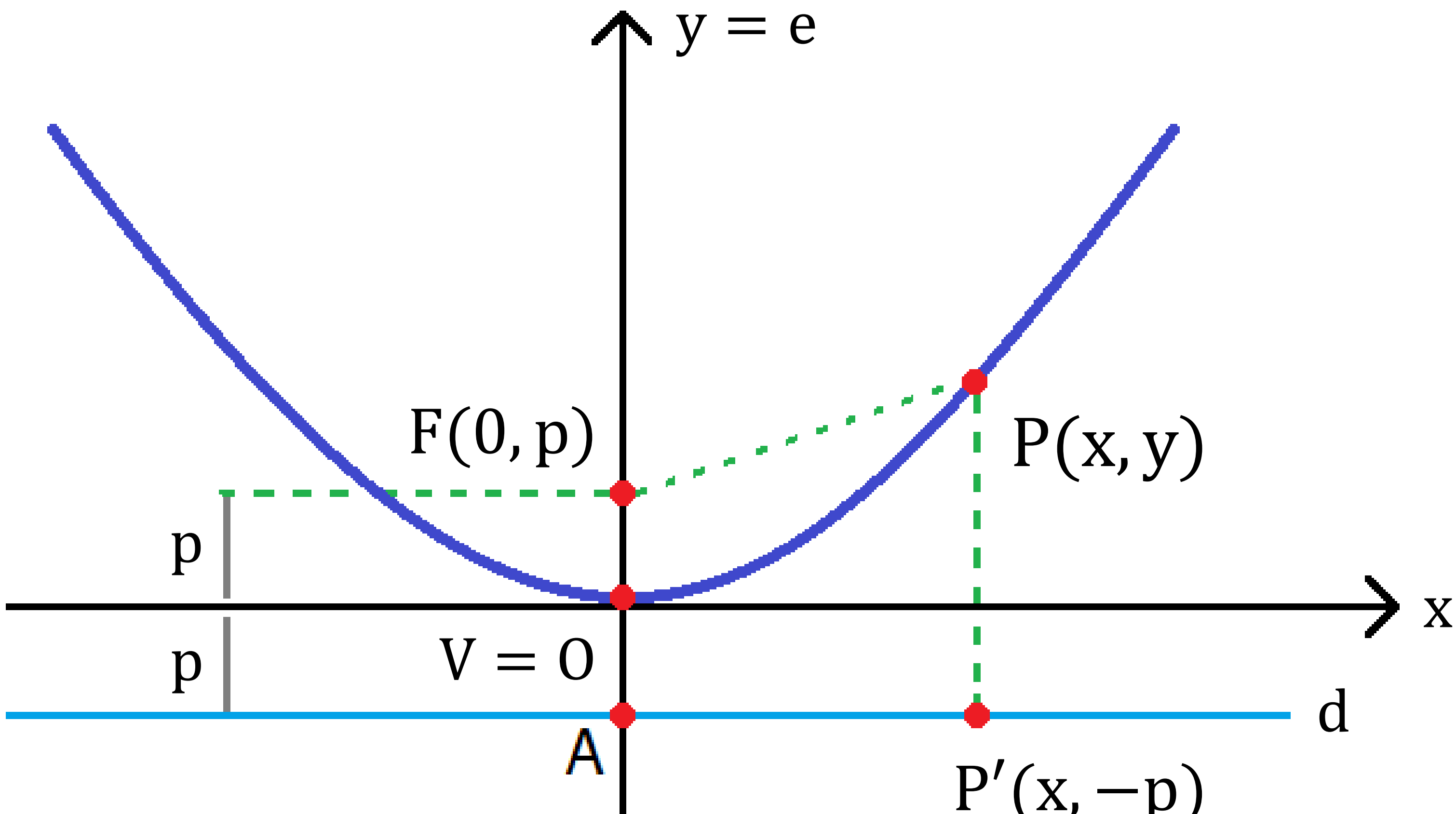
- Se P’ é o pé da perpendicular baixada a partir do ponto P até a reta d, de acordo com a definição anterior, P pertencerá à parábola se e somente se:

$$\delta(P,F) = \delta(P,P') \;\therefore\; \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$$

Elementos da Parábola

1. Foco: ponto **F**.
2. Diretriz: reta fixa **d**.
3. Eixo: reta **e** que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz d.
4. Vértice: ponto **V** → ponto médio entre o foco e a diretriz → intersecção da parábola com seu eixo.

Quando o eixo da parábola coincide com o eixo 0y



- Da definição: $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\right|$ ou $\left|\overrightarrow{\mathrm{FP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{P'P}}\right|$.

- Substituindo as coordenadas dos pontos F, P e P', tem-se:

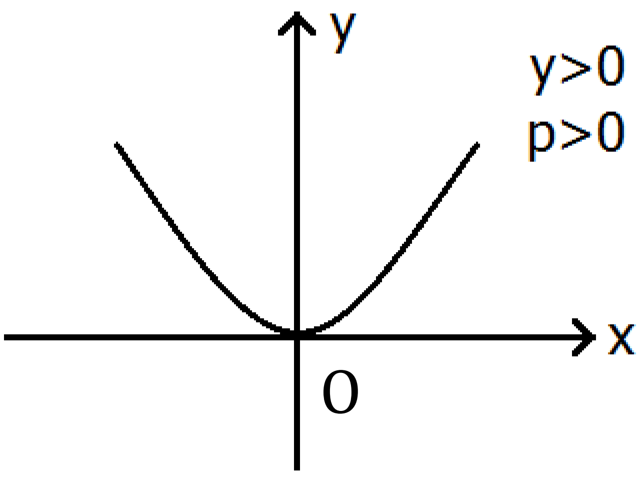
$$|(x - 0, y - p)| = |(x - x, y + p)|$$

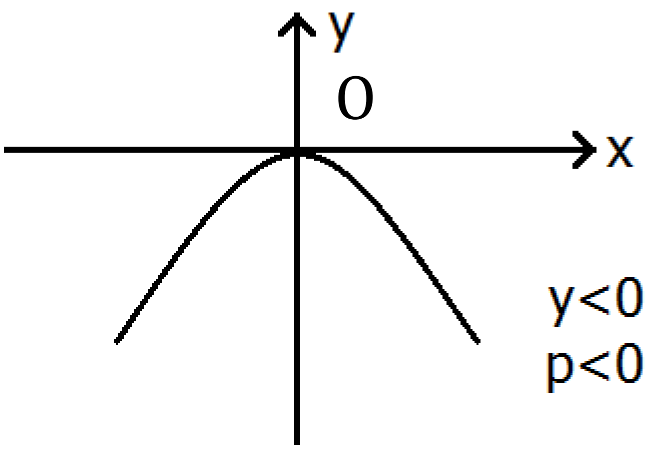
- Após manipulações algébricas, obtém-se:

$$\boldsymbol{x^2 = 4py}$$

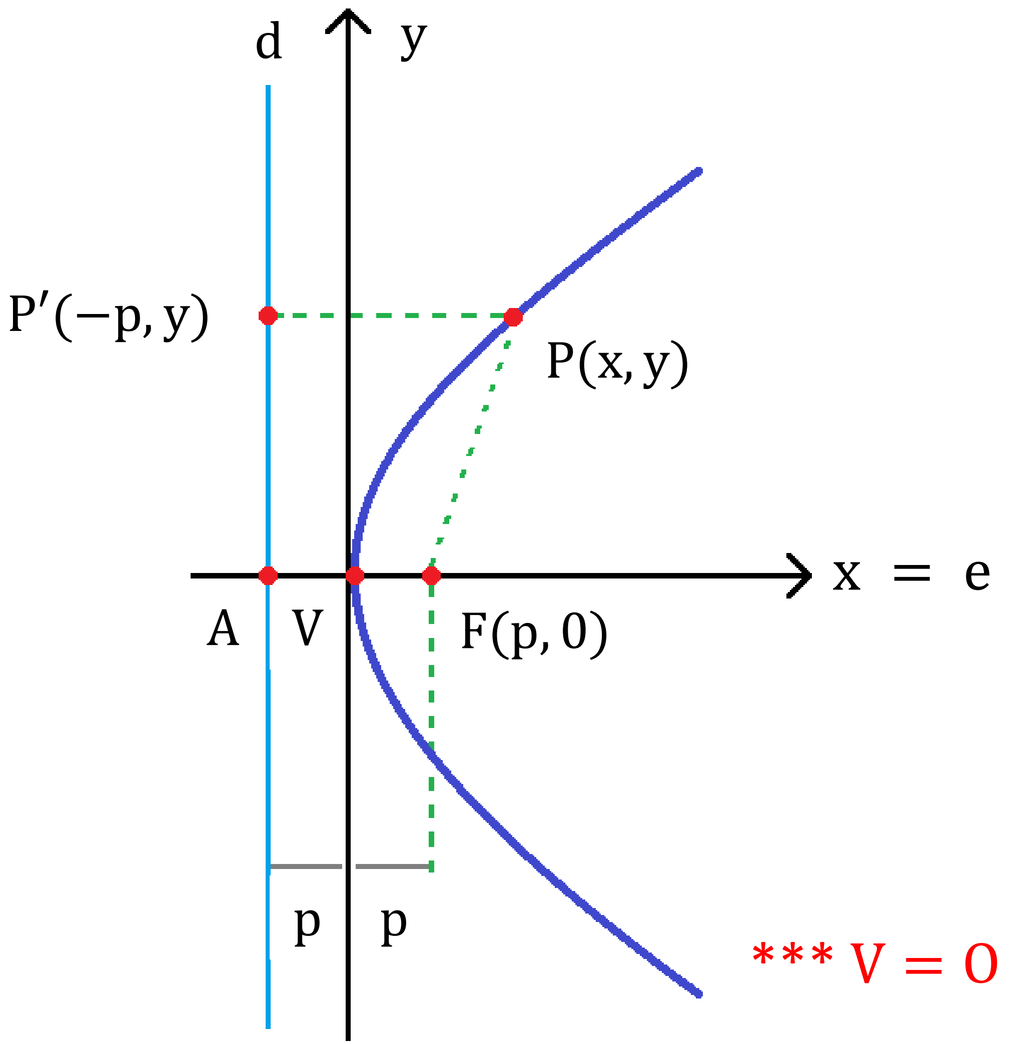
- Esta é a ***equação reduzida*** da parábola com vértice na origem e eixo coincidindo com o eixo Oy. O n. real p, $p \neq 0$, é chamado parâmetro.

- Como $x^2 \geq 0$, $4py$ será positivo ou nulo e os sinais de p e de y serão sempre iguais. Assim:
  - Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima; e
  - Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.





Quando o eixo da parábola coincide com o eixo 0x



$*** \; V = O$

- Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da parábola, da definição $|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P'P}|$, tem-se:

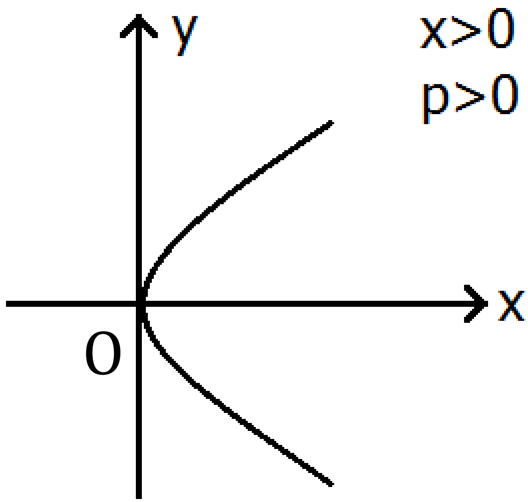
$$|(x - p, y - 0)| = |(x + p, y - y)|$$

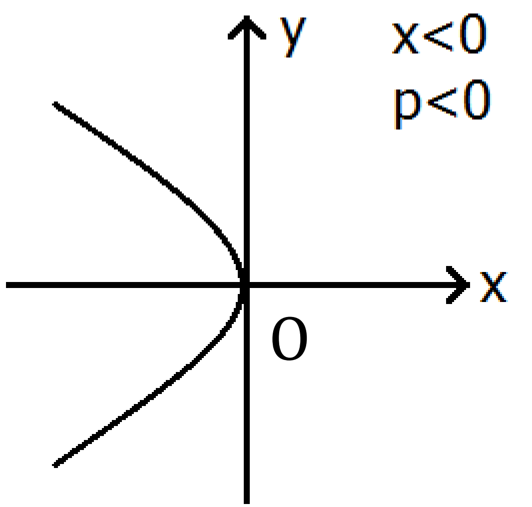
- E, após manipulações algébricas, obtém-se:

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

  - Esta é a ***equação reduzida*** da parábola com vértice na origem e eixo coincidindo com o eixo Ox.

- Como $y^2 \geq 0$, $4px$ será positivo ou nulo e os sinais de p e de x serão sempre iguais. Assim:
  - Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para direita; e
  - Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para esquerda.



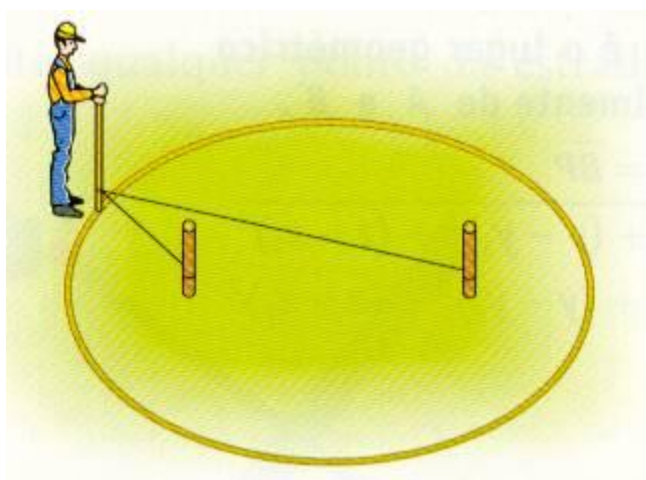


11.3 A ELIPSE

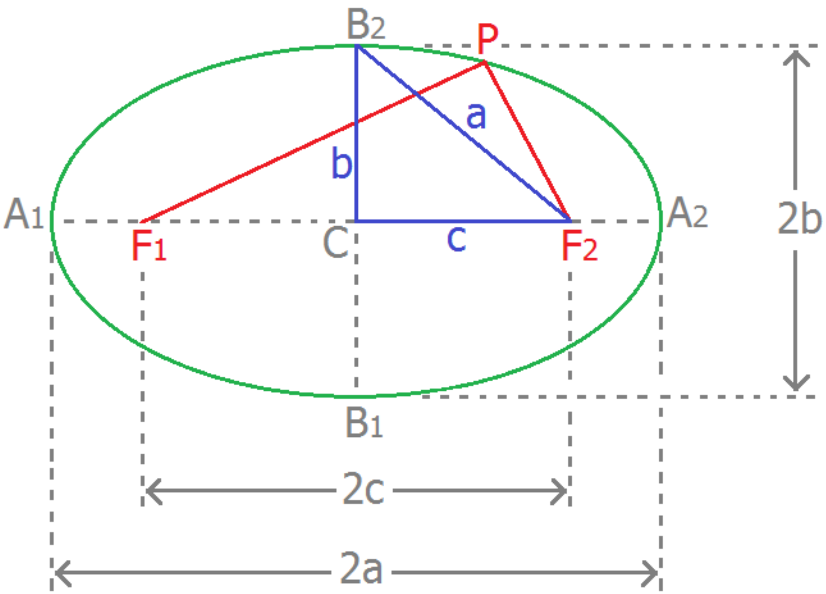
Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano, chamados *focos* F_1 e F_2, é **constante**.

- *Elipse* é o conjunto de todos os pontos P de um plano tais que:

$$\delta(P,F_1) + \delta(P,F_2) = 2a \therefore \left|\overrightarrow{PF_1}\right| + \left|\overrightarrow{PF_2}\right| = 2a$$



- Mantendo-se fixa a soma $\mathbf{2a}$:
  - Quanto mais próximos estiverem os dois focos entre si, mais circular será a elipse → *circunferência* → $F_1 = F_2$.
  - Quanto mais afastados estiverem estes pontos, mais achatada será a elipse → *parábola* → $A_1 = F_1$ e $A_2 = F_2$.



Elementos da Elipse

1. Focos: pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.
2. Distância Focal: distância $\mathbf{2c}$ entre os focos.
3. Centro: ponto médio $\mathbf{C}$ do segmento F_1F_2.
4. Eixo Maior: segmento $\mathbf{A_1A_2}$ de comprimento $\mathbf{2a}$.
5. Eixo Menor: segmento $\mathbf{B_1B_2}$ de comprimento $\mathbf{2b}$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no ponto médio).
6. Vértices: pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$.
7. Excentricidade: medida adimensional do achatamento da elipse: $\boldsymbol{e = \frac{c}{a}} \rightarrow$ como $c < a$, $\mathbf{0 < e < 1}$.

Observação: de acordo com o triângulo B_2CF_2, na figura anterior, em toda elipse vale a relação: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

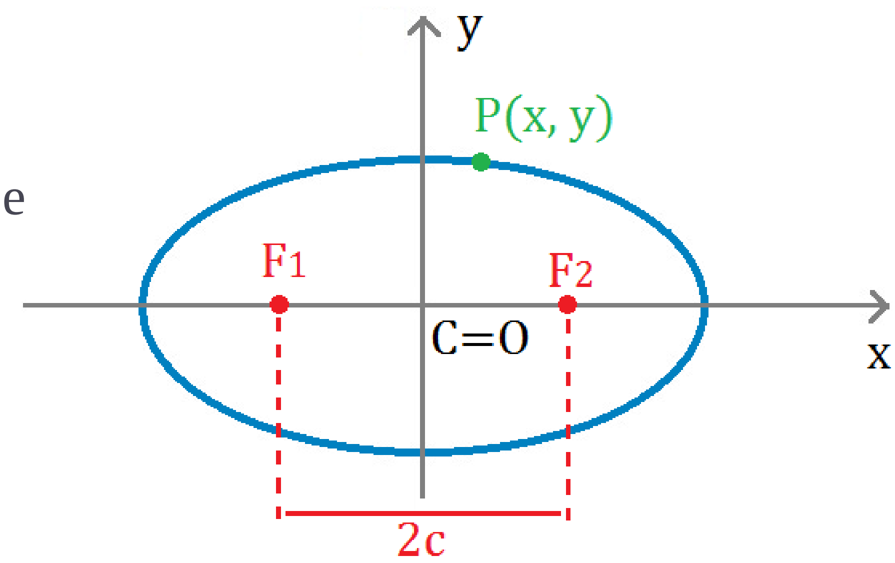
Quando o eixo maior coincide com o eixo Ox

- Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Por definição:

$$|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a \text{ ou } |\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

- Substituindo as coordenadas de F_1, F_2, P e lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

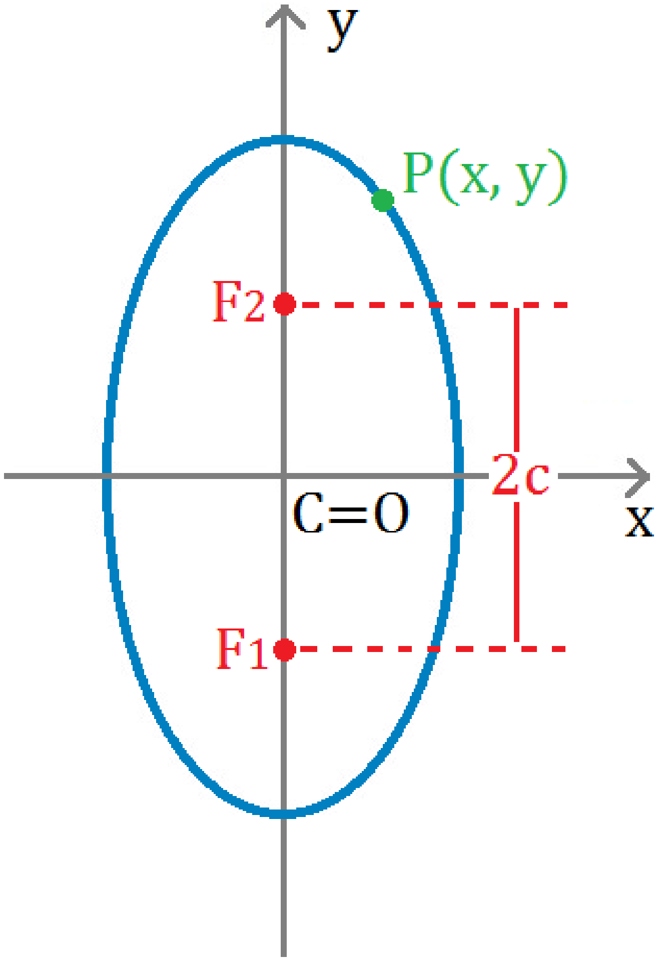


Esta é a ***equação reduzida*** da elipse de centro na origem do sistema e eixo maior sobre Ox.

Quando o eixo maior coincide com o eixo 0y

- Com procedimento análogo ao anterior:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



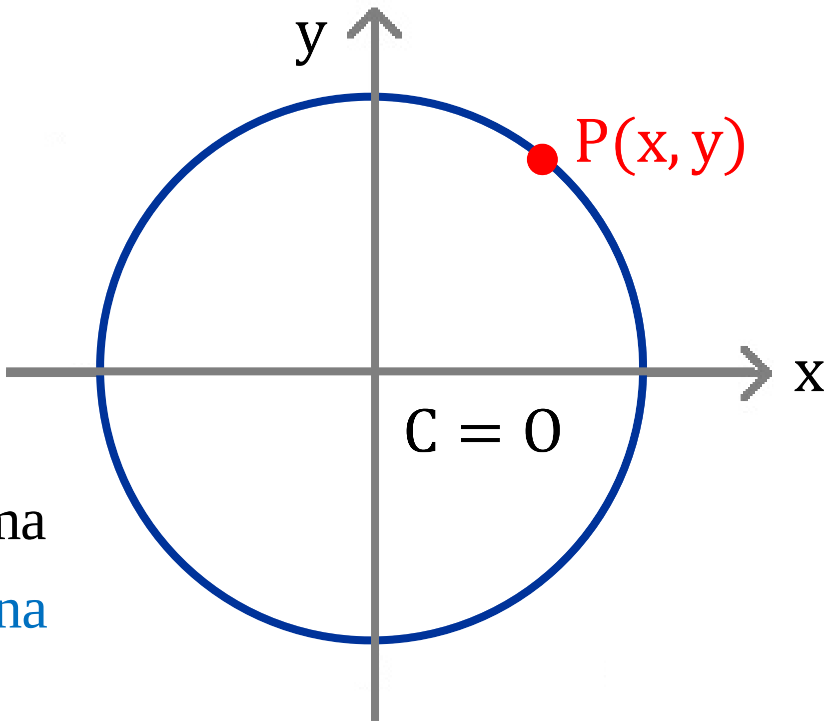
Esta é a ***equação reduzida*** da elipse de centro na origem do sistema e eixo maior sobre 0y.

Observação

No caso em que $a = b$, a equação da elipse pode ser reescrita como:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ ou } x^2 + y^2 = b^2$$

que representa a ***equação reduzida*** de uma circunferência de raio a ou b e centro na origem do sistema.



11.4 A HIPÉRBOLE

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos desse plano, chamados *focos* F_1 e F_2, é **constante, *em valor absoluto***.

- *Hipérbole* é o conjunto de todos os pontos P de um plano tais que:

$$|\delta(P,F_1) - \delta(P,F_2)| = 2a \therefore \left| |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| \right| = 2a$$

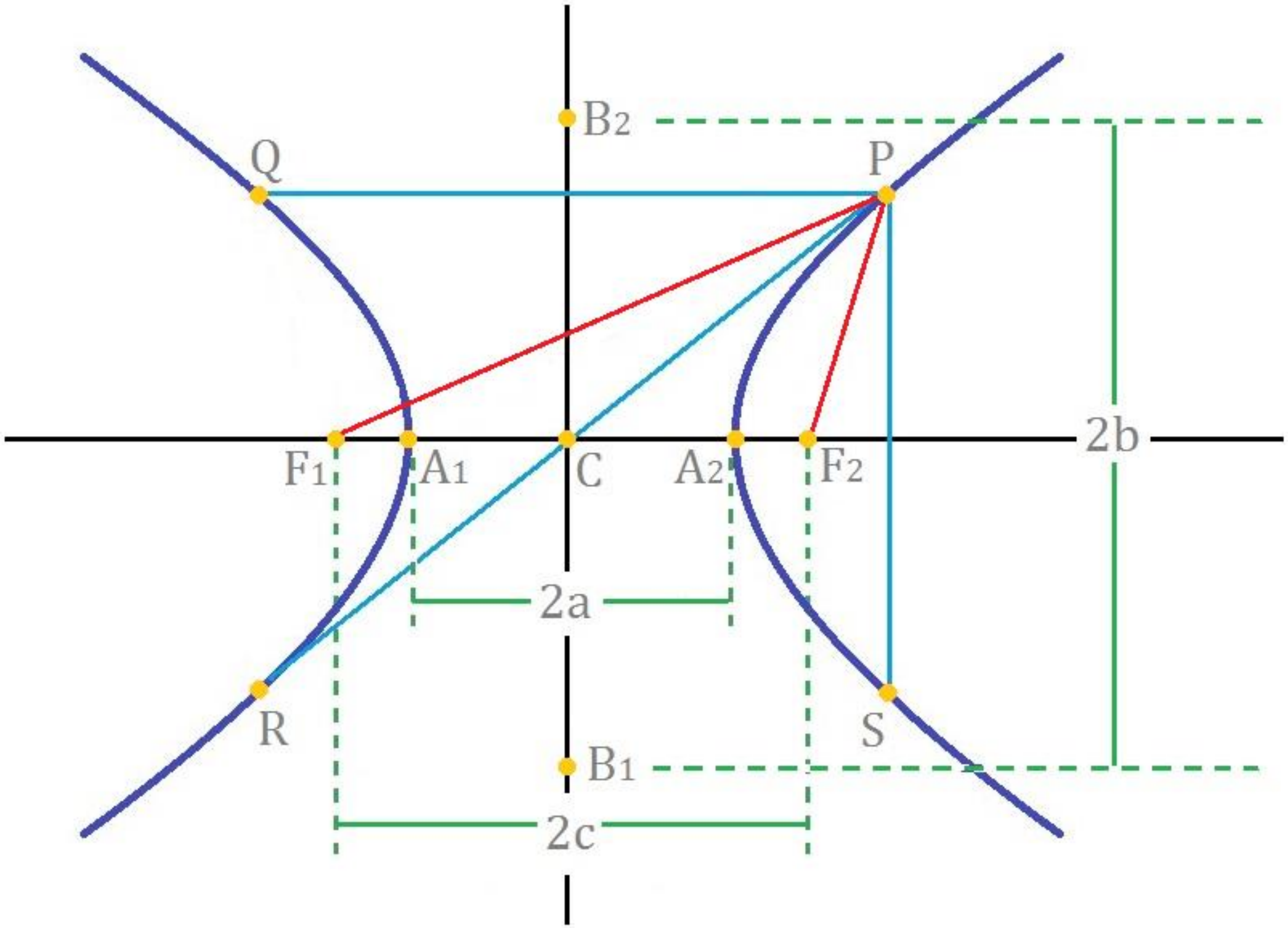
- Com base na definição, para facilitar o entendimento, considere:

i. Uma reta que passa pelos focos F_1 e F_2;

ii. Os pontos A_1 e A_2, intersecção entre os dois ramos da hipérbole e a reta definida em (i), tal que $\overline{A_1A_2} < \overline{F_1F_2}$;

iii. Uma reta $\perp$ a reta definida em (i) no ponto C (ponto médio dos segmentos F_1F_2 e A_1A_2).

- A hipérbole é uma ***curva simétrica*** em relação a essas duas retas e em relação ao ponto C.



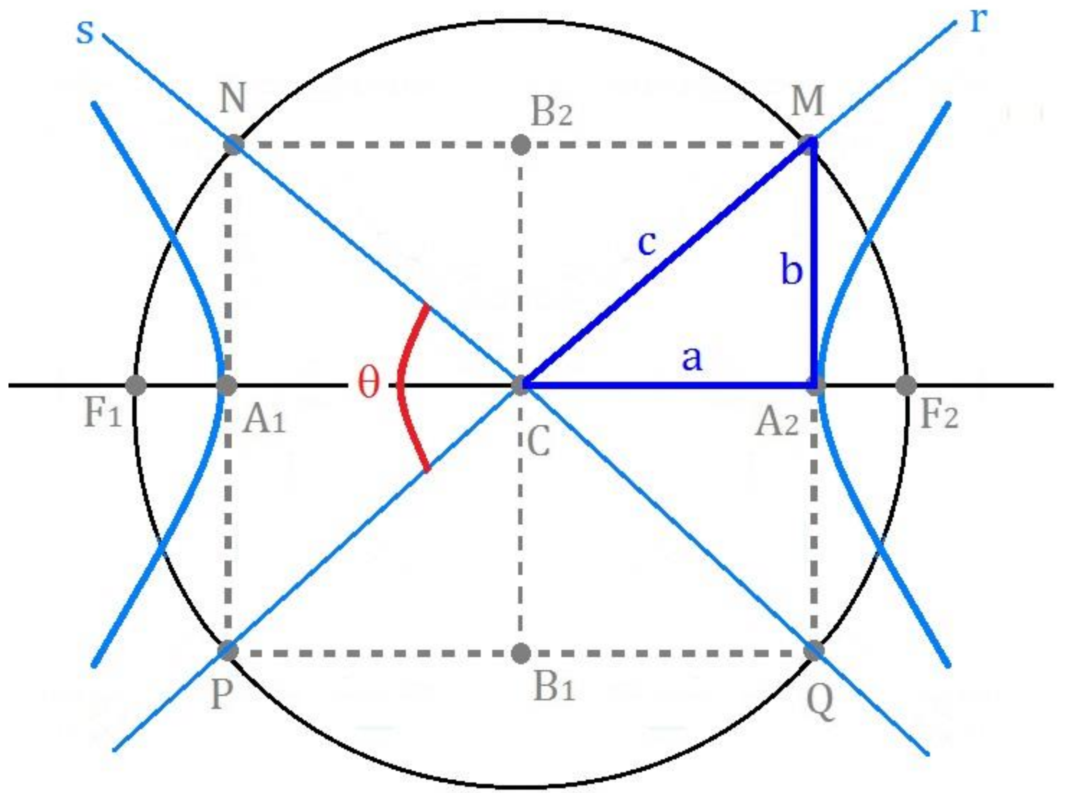
Ainda pela simetria, conclui-se que: $\delta(A_1,F_1) = \delta(A_2,F_2)$ e $\delta(A_1,A_2) = 2a$.

Elementos da Hipérbole

1. Focos: pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.
2. Distância Focal: distância $\mathbf{2}\boldsymbol{c}$ entre os focos.
3. Centro: ponto médio $\mathbf{C}$ do segmento F_1F_2.
4. Vértices: pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$.
5. Eixo Real ou Transverso: segmento $\mathbf{A_1A_2}$ de comprimento $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$.
6. Eixo Imaginário ou Conjugado: segmento $\mathbf{B_1B_2}$ de comprimento $\mathbf{2}\boldsymbol{b}$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no ponto médio C).

Consideração

- Seja uma circunferência de raio c e mesmo centro C da hipérbole. Pelos vértices A_1 e A_2, trace cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2. As quatro extremidades das cordas são vértices do retângulo MNPQ, inscrito na circunferência, conforme a figura:



- As retas r e s, que contém as diagonais do retângulo MNPQ, chamam-se ***assíntotas*** da hipérbole.

- O ângulo θ é chamado ***abertura*** da hipérbole (quanto menor o valor de a, maior o valor de θ, e vice-versa).

- Chama-se ***excentricidade*** da hipérbole a medida adimensional $\boldsymbol{e = \frac{c}{a}} \rightarrow$ como $a < c$, $\boldsymbol{e > 1}$.

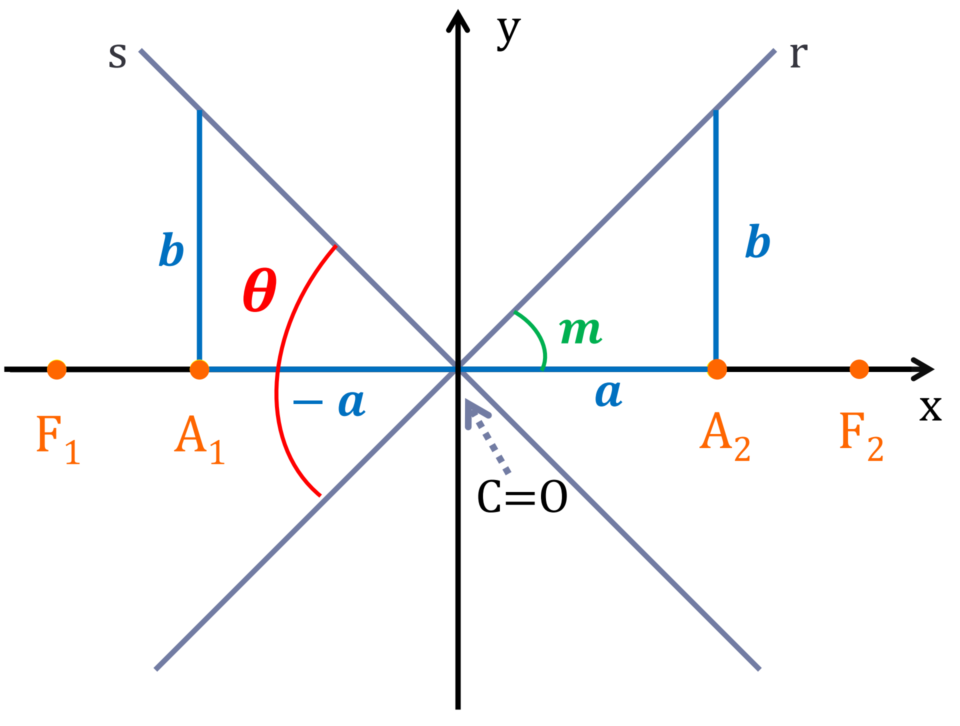
  - ***Observação***: de acordo com o triângulo A_2CM, na figura anterior, em toda hipérbole vale a relação: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

- A hipérbole cujas assíntotas são perpendiculares, de forma que $\boldsymbol{a = b}$, chama-se ***Hipérbole Equilátera***.

Observação

- As assíntotas são retas que passam pela origem e, portanto, têm equação do tipo:

$y = m\,x$, m... declividade da reta



- Para a assíntota r: $m_r = \frac{b}{a}$

- Para a assíntota s: $m_s = -\frac{b}{a}$

- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = m \rightarrow \frac{\theta}{2} = \tan^{-1}(m)$

$\therefore\ \theta = 2\tan^{-1}(m)$, θ ... ângulo de abertura da hipérbole.

Quando o eixo real coincide com o eixo Ox

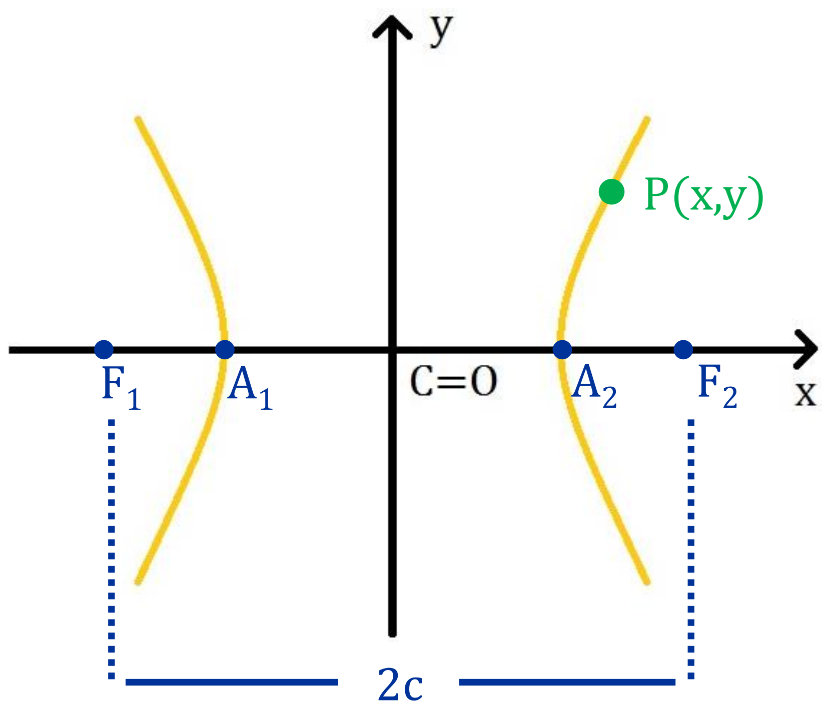
- Seja $\mathrm{P}(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de focos $\mathrm{F}_1(-c, 0)$ e $\mathrm{F}_2(c, 0)$. Por definição:

$$|\delta(\mathrm{P}, \mathrm{F}_1) - \delta(\mathrm{P}, \mathrm{F}_2)| = 2a$$

- Substituindo as coordenadas de F_1, F_2, P e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

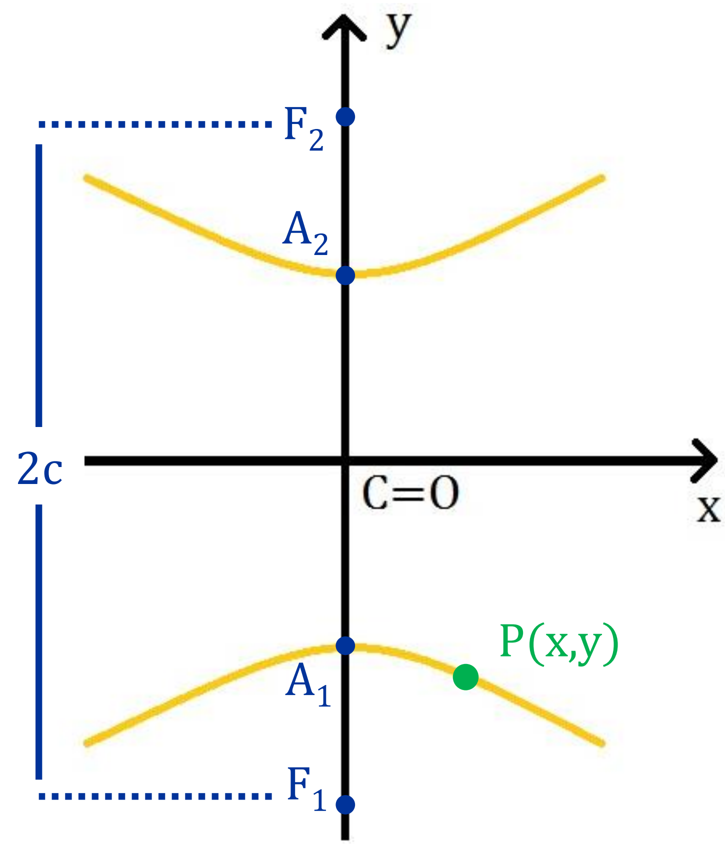
Esta é a ***equação reduzida*** da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre $\mathrm{O}x$.



Quando o eixo real coincide com o eixo Oy

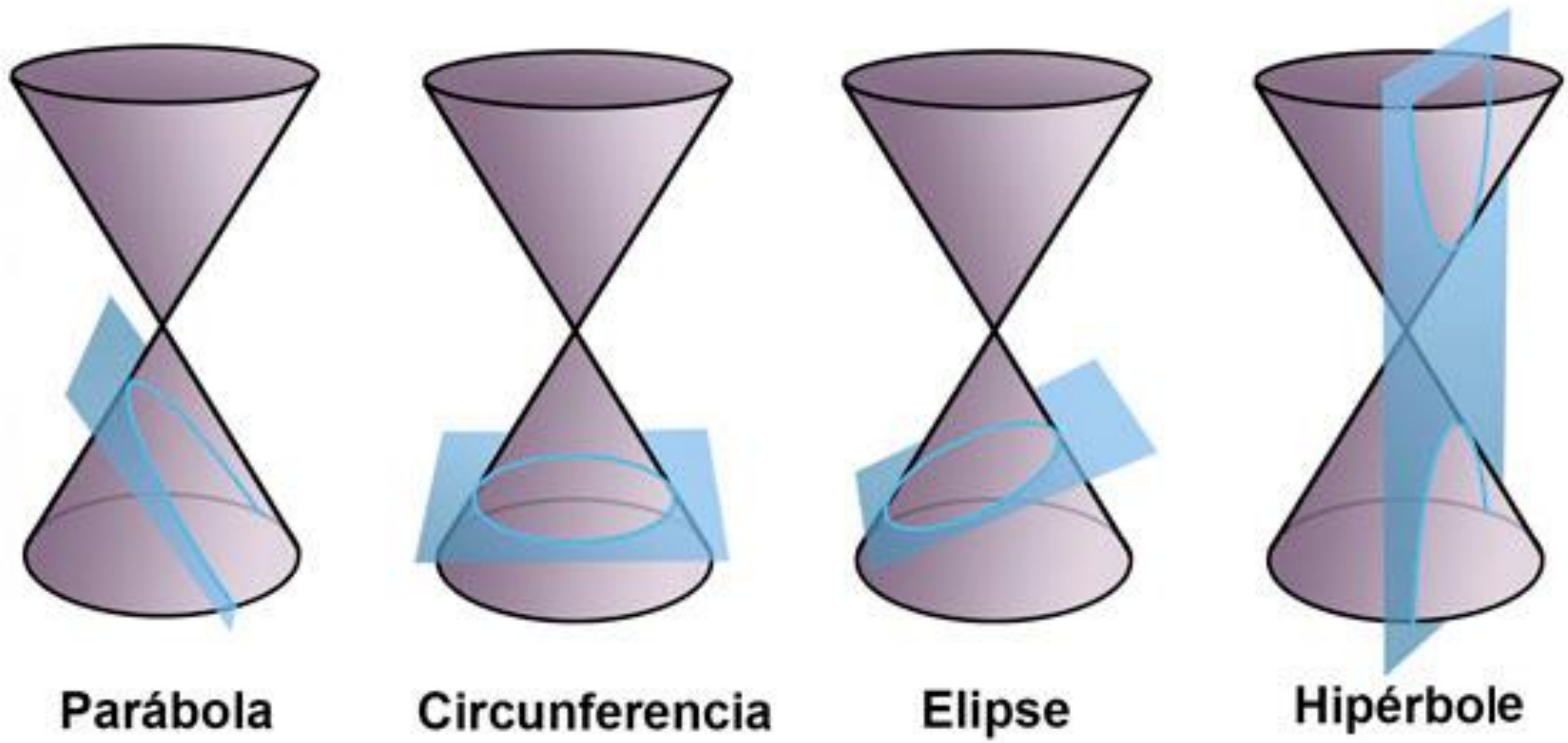
- Com procedimento análogo ao anterior:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Esta é a ***equação reduzida*** da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre O*y*.

De onde vêm as Cônicas (ou Seções Cônicas)?



EXERCÍCIOS

1. Encontre a equação da parábola de vértice $V(0,0)$ e foco $F(0,-3)$. Esboce o gráfico.

   $\boldsymbol{x^2 = -12y}$

2. Identificar o lugar geométrico e os elementos dos pontos que satisfazem a equação $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$. Esboce o gráfico.

   Elipse: $\mathbf{A_1(0,-3), A_2(0,3), F_1(0,-2), F_2(0,2), e = {}^2/_3}$

3. Determine os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole $y^2 - 4x^2 = 1$. Determine as equações das assíntotas. Esboce o gráfico.

   $\mathbf{A_1(0,-1), A_2(0,1), B_1\left(-\frac{1}{2},0\right), B_2\left(\frac{1}{2},0\right), F_1\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right), F_2\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right), e = \frac{\sqrt{5}}{2}}$