Exercícios $\begin{cases} \text{Lista 1 - } 27, 28, 29, 30 \\ \text{Lista 2 - } 2, 3, 8, 11 \end{cases}$

LISTA 1

27 a) $r_1: \underset{\alpha_1}{3}x + \underset{\beta_1}{6k}y - 7 = 0$

$k = ?$ tal que $r_1 // r_2$

$r_2: \underset{\alpha_2}{9k}x + \underset{\beta_2}{8}y - 15 = 0$

$$r_1 // r_2 \iff (\alpha_1, \beta_1) = m(\alpha_2, \beta_2), \quad m \in \mathbb{R}$$

$$(3, 6k) = m(9k, 8)$$

$$(3, 6k) = (9mk, 8m)$$

$$\therefore \begin{cases} 3 = 9mk & (i) \\ 6k = 8m & (ii) \end{cases}$$

(i) $m = \dfrac{1}{3k}$

$m \longrightarrow$ (ii): $6k = 8\dfrac{1}{3k}$

$$k^2 = \frac{4}{9} \longrightarrow k = \pm\frac{2}{3}$$

b) $r_1: \underset{\alpha_1}{3k}x + \underset{\beta_1}{8}y - 5 = 0$

$k = ?$ tal que $r_1 \perp r_2$

$r_2: \underset{\alpha_2}{-4k}x + \underset{\beta_2}{6}y - 1 = 0$

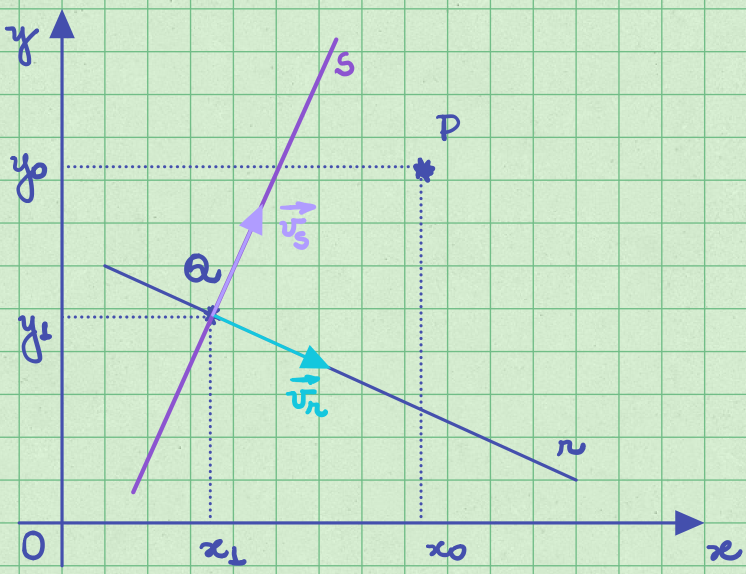
$$r_1 \perp r_2 \iff (\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = 0$$

$$(3k, 8) \cdot (-4k, 6) = 0$$

$$-12k^2 + 48 = 0$$

$$k^2 = 4 \longrightarrow k = \pm 2$$

28



$r: ax + by + c = 0$

$s = ?$ tal que $s \perp r$, $Q \in s$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0$

a) $r: ax + by + c = 0$

$x = 0, \quad y = -\dfrac{c}{b} \quad \therefore \quad A\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$

$y = 0, \quad x = -\dfrac{c}{a} \quad \therefore \quad B\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$

$\vec{v_r} \parallel \vec{AB} \longrightarrow \vec{v_r} = K\,\vec{AB} = K(B - A) = K\left(-\dfrac{c}{a}, \dfrac{c}{b}\right)$

$K = \dfrac{ab}{c} \longrightarrow \vec{v_r} = (-b, a)$

$\vec{v_s} = (\alpha, \beta)$

$\therefore \quad \vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0$

$(-b, a) \cdot (\alpha, \beta) = 0$

$-\alpha b + \beta a = 0 \longrightarrow \alpha = \dfrac{a}{b}\beta$

$\alpha \longrightarrow \vec{v_s} : \quad \vec{v_s} = \left(\dfrac{a}{b}\beta, \beta\right) = \dfrac{\beta}{b}(a, b) = (a, b)$ //

$K \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{v_s} = (a, b) \parallel s \\ Q(x_1, y_1) \in s \\ R(x, y) \end{array}\right\}$

$(x, y) \in s \iff \vec{QR} \parallel \vec{v_s}$

$\therefore \quad \vec{QR} = t\,\vec{v_s}$

$R = Q + t\,\vec{v_s}$

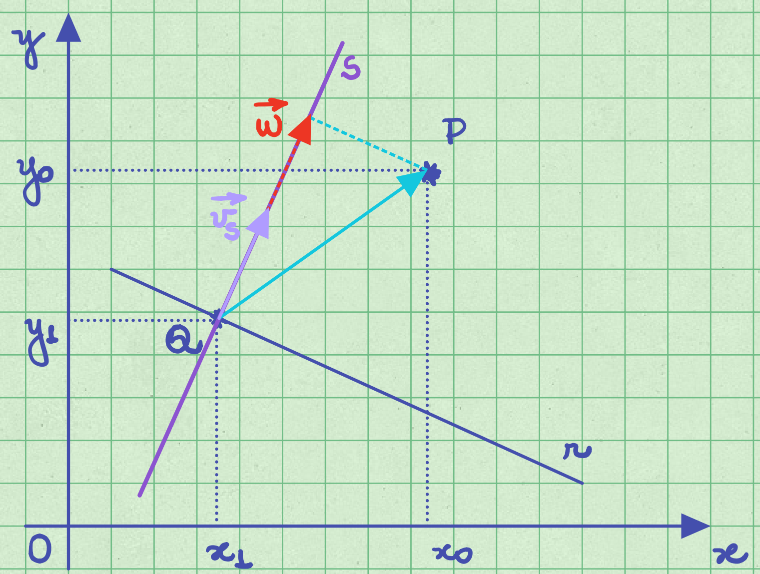
E Vetorial : $(x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b), \; t \in \mathbb{R}$

E Paramétricas : $\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

E Simétricas : $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}$

E Reduzida : $bx - ay + c = 0 \;, \quad c = ay_1 - bx_1$

b) $\vec{v_s} = (a, b)$ (calculado em "a")



$\vec{w} = \text{proj}_{\vec{v_s}} \overrightarrow{QP}$

projetar sobre $\vec{v_s}$ equivale a projetar sobre s, pois $\vec{v_s} \parallel s$

$$\vec{w} = \left(\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v_s}}{\vec{v_s} \cdot \vec{v_s}} \right) \vec{v_s} \quad (1)$$

Calculando os elementos necessários em (1):

$\overrightarrow{QP} = P - Q = (x_0 - x_1, \; y_0 - y_1)$

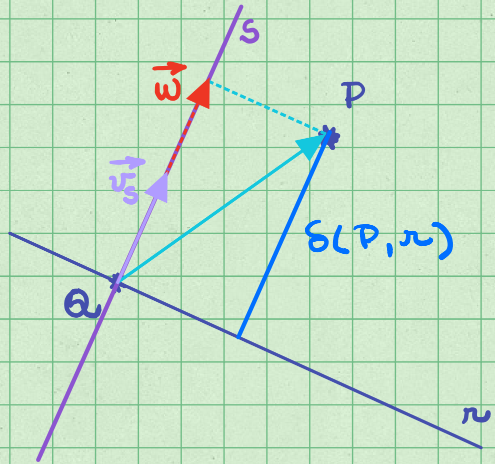
$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v_s} = (x_0 - x_1, \; y_0 - y_1) \cdot (a, b) = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$

$\vec{v_s} \cdot \vec{v_s} = (a, b) \cdot (a, b) = a^2 + b^2$

Substituindo em (1):

$$\vec{w} = \left(\frac{ax_0 - ax_1 + by_0 - by_1}{a^2 + b^2} \right) \overbrace{(a, b)}^{\vec{v_s}}$$

c)



$$\delta(P, r) = |\vec{w}|$$

$$\vec{w} = K(a, b)$$

$$\therefore\ |\vec{w}| = |K|\,|(a,b)|$$

$$|\vec{w}| = |K|\sqrt{(a,b)\cdot(a,b)}$$

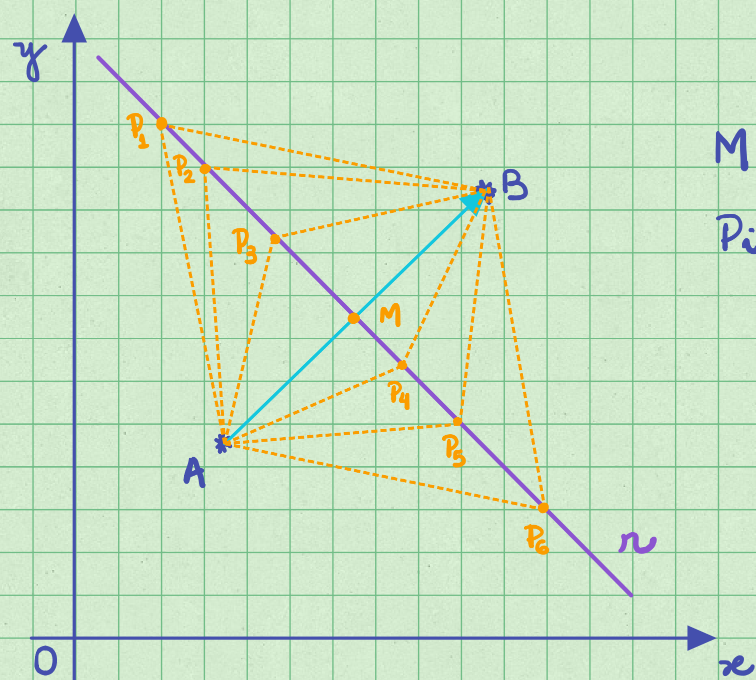
$$|\vec{w}| = |K|\sqrt{a^2+b^2}$$

Portanto:

$$\delta(P, r) = \left|\left(\frac{ax_0 - ax_1 + by_0 - by_1}{a^2+b^2}\right)\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\delta(P, r) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \quad , \quad c = -ax_1 - by_1$$

29



M ... ponto médio de $\vec{AB}$

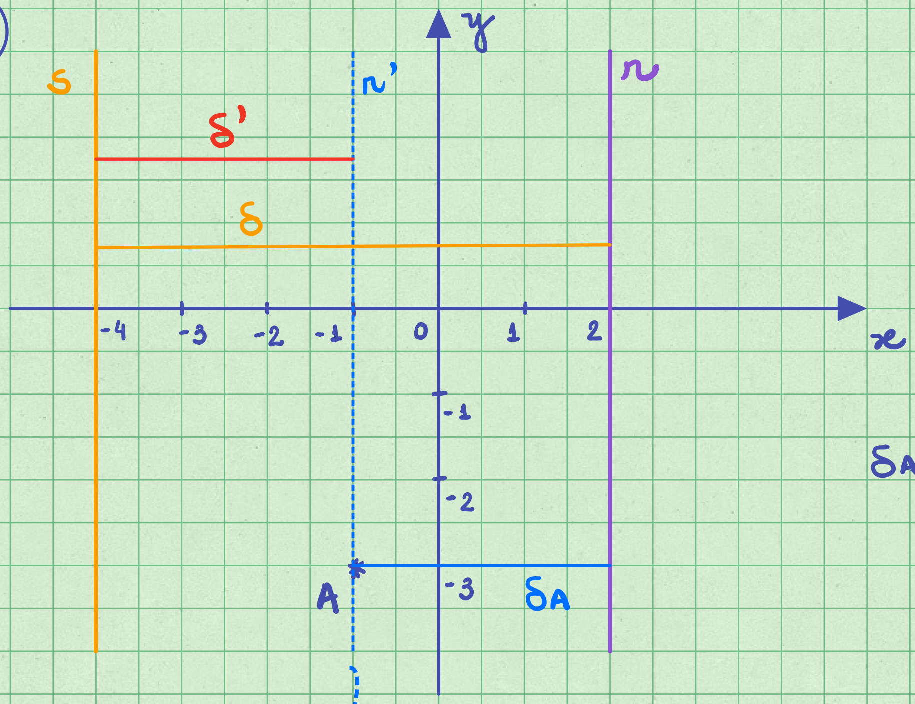
P_i ... qualquer ponto sobre r, equidistante dos pontos A e B

Equidistam de dois pontos quaisquer A e B, fixos no plano, todos os pontos da reta que:

(i) contém o ponto médio do vetor formado por esses pontos fixos ($\vec{AB}$);

(ii) é ortogonal a esse vetor $\vec{AB}$.

30



$r: x - 2 = 0$

$x = 2 \rightarrow r \parallel Oy$

δ_A ... distância de A a r

$\delta_A = \delta(A, r) = 3$

qualquer ponto sobre a reta r' está a uma distância $\delta_A = 3$ de r.

$\delta' = \delta(s, r') = 3$

$\delta = \delta_A + \delta' = 6$ ... qualquer ponto sobre a reta s está sempre a uma distância de r 3 unidades maior que r' (que contém A).

Logo, o lugar geométrico é o dos pontos sobre a reta s:

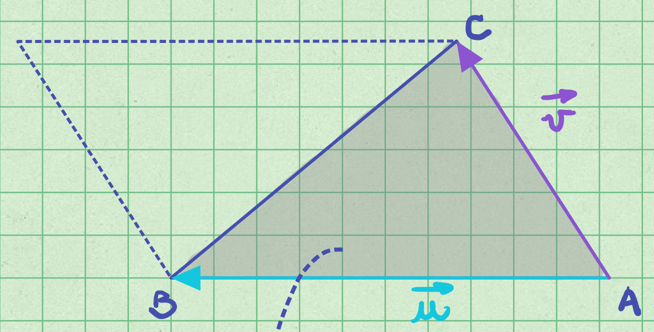
$s: x = -4$ ou $s: x + 4 = 0$

OBSERVAÇÃO: Enunciado corrigido, n. 30

Determine o lugar geométrico dos pontos no plano cuja distância à reta $r: x - 2 = 0$ é sempre 3 unidades maior que a distância do ponto $A(-1, -3)$ até a reta r.

LISTA 2

(2)



Área triângulo = 4

$B = A + \vec{u}$

$B - A = \vec{u} \quad \therefore \quad \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$C = A + \vec{v}$

$C - A = \vec{v} \quad \therefore \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Sabe-se que:

Área Paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

Área Paralelogramo $= 2$ (Área triângulo)

Logo:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = 8$

(3) $\measuredangle_{\vec{a},\vec{b}} = \dfrac{\pi}{3} = \theta$

$|\vec{a}| = 1$

$|\vec{b}| = 2$

$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = ?$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \times (-\vec{b})$$

$$= \overbrace{\cancel{\vec{a} \times \vec{a}}}^{=\vec{0}} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times (-\vec{b}) + \overbrace{\cancel{\vec{b} \times (-\vec{b})}}^{=\vec{0}}$$

$$= \vec{b} \times \vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= \vec{b} \times \vec{a} - [-(\vec{b} \times \vec{a})]$$

$$\therefore \quad \vec{u} \times \vec{v} = 2(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\longrightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |2|\,|\vec{b} \times \vec{a}|$$

P. VIII : $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$

$$= 2\,|\vec{b}|\,|\vec{a}| \operatorname{sen}\theta$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = 2\sqrt{3}$$

8

$$\vec{x} \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{6}$$

$\vec{x} = ?$

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} &= (1,0,0) \\ \vec{j} &= (0,1,0) \\ \vec{k} &= (0,0,1) \\ \vec{x} &= (a,b,c) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \vec{i} + \vec{k} &= (1,0,1) \\ \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} &= (1,1,-1) \\ 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) &= (2,2,-2) \end{aligned}$$

$$\vec{x} \times (\vec{i} + \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b\vec{i} + (c-a)\vec{j} - b\vec{k}$$

$$= (b, c-a, -b)$$

e

$$\vec{x} \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = (2,2,-2)$$

Portanto:

$$(b, c-a, -b) = (2,2,-2) \quad \begin{cases} b = 2 \\ c - a = 2 \end{cases}$$

ou $c = 2 + a$

Mas $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, então: $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{6}$

Assim:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

Substituindo b e c na equação acima:

$$a^2 + (2)^2 + (2+a)^2 = 6$$

$$a^2 + 4 + 4 + 4a + a^2 = 6$$

$$2a^2 + 4a + 2 = 0$$

ou

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

Báskara:

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \Delta = 4 - 4(1)(1) = 0$$

$$\therefore \ \underline{a = -1 \ \text{ e } \ c = 1}$$

Logo:

$$\vec{x} = (-1, 2, 1)$$

11 $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ é LD

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$ MOSTRAR!

Reescrevendo o lado esquerdo:

$$-[\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})] = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

Aplicando o Duplo Produto Vetorial:

$$-[(\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}] = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

$$-(\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{u} + \cancel{(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}} = \cancel{(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$$

$$(\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$$

Se $\{\vec{u},\vec{w}\}$ é LD, então $\vec{w} = K\vec{u}$. Assim:

$$(K\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\,(K\vec{u})$$

Portanto:

$$K(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{u} = K(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{u}$$