Lista 4: Máximos e Mínimos e Teoremas Principais do Cálculo Diferencial

Máximos e Mínimos

Os exercícios 1-3 abaixo têm como objetivo apresentar um roteiro de como encontrar pontos de extremo (máximo ou mínimo) de uma função $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida num aberto. Ao longo desses exercícios, demonstraremos o *critério da Hessiana*.

(Formas quadráticas) Seja $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação bilinear. Dizemos que L é *simétrica* se $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Se L é simétrica, definimos sua *forma quadrática associada* $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $q(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Tipicamente, denotamos o valor de q no ponto $\mathbf{x}$ por $q \cdot \mathbf{x}^2$.

Equivalentemente, toda transformação bilinear simétrica $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é do tipo $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j$ em que a matriz $[L] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por $[L]_{ij} = \alpha_{ij}$ é simétrica (isto é, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$).

Dessa forma, toda forma quadrática é do tipo $q \cdot \mathbf{x}^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ em que a matriz dos α_{ij}'s é simétrica. Toda forma quadrática é *homogênea de grau 2*: $q \cdot (c\mathbf{x})^2 = c^2(q \cdot \mathbf{x}^2)$.

Seja $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Dizemos que q é:

(i) *não-negativa definida* se $q \cdot \mathbf{x}^2 \geq 0\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

(ii) *positiva definida* se $q \cdot \mathbf{x}^2 > 0\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

(iii) *não-positiva definida* se $q \cdot \mathbf{x}^2 \leq 0\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

(iv) *negativa definida* se $q \cdot \mathbf{x}^2 < 0\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

(v) *indefinida* se existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tais que $q \cdot \mathbf{x}^2 > 0$ e $q \cdot \mathbf{x}^2 < 0$.

Sejam agora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Pelo teorema de Schwarz, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, a matriz $\left[h_{ij}(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right]$ é simétrica. Ela é a chamada *matriz hessiana de f no ponto* $\mathbf{x}$, e a denotamos por $h_f(\mathbf{x})$. Sua forma quadrática associada, $H_f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^2 = \sum_{i,j=1} h_{ij}(\mathbf{x})\ v_i v_j$, é chamada de *forma quadrática hessiana de f no ponto* $\mathbf{x}$.

Relembramos que $\mathbf{p} \in \Omega$ é dito *ponto crítico* de f se $Df(\mathbf{p})$ é a transformação linear nula, ou, equivalentemente, se $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

1) (Critério de definição de uma forma quadrática) Sejam $q \cdot \mathbf{x}^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ uma forma quadrática e $[A_{ij} = \alpha_{ij}]$ sua matriz associada. Como A é simétrica, vimos em Álgebra Linear que A é diagonalizável: existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (seus autovalores, não necessariamente todos distintos) e uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ consistindo de autovetores de A:

$$A \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(a) Mostre que $q \cdot \mathbf{u}_i^2 = \lambda_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Usando a transformação bilinear L associada à matriz A, mostre que, se $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{u}_k$, então

$$q \cdot \mathbf{v}^2 = L(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n c_k^2\ L(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k^2 \tag{1}$$

(b) Mostre que:

(i) se A possui um autovalor $\lambda_{i^*} < 0$, então q não pode ser não-negativa ou positiva definida. *Dica:* quanto vale $q \cdot \mathbf{u}_{i^*}^2$?

(ii) se A possui um autovalor $\lambda_{j^*} > 0$, então q não pode ser não-positiva ou negativa definida. *Dica:* quanto vale $q \cdot \mathbf{u}_{j^*}^2$?

(c) Mostre que, se todos os autovalores de A são ≥ 0 (respectivamente, > 0, ≤ 0, < 0), então q é não-negativa definida (respectivamente, positiva definida, não-positiva definida, negativa definida). *Dica:* use a equação (1) acima.

(d) Mostre que q é indefinida se, e somente se, A possui autovalores tanto positivos quanto negativos. *Dica:* use a equação (1) acima.

(e) Considere o caso específico $n = 2$. Mostre que:

(i) q é não-negativa ou não-positiva definida se, e somente se, $\det A \geq 0$;

(ii) q é positiva ou negativa definida se, e somente se, $\det A > 0$;

(iii) q é indefinida se, e somente se, $\det A < 0$.

Dica: Lembre que o determinante de uma matriz diagonalizável é o produto de seus autovalores, e use os itens **(c)** e **(d)**.

2) **(Pontos de extremo local são críticos)** Seja $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e suponha que $\mathbf{p}$ é um ponto de extremo (mínimo ou máximo) local de f. Mostre que $\mathbf{p}$ é um ponto crítico de f.

Ideia da prova: para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que o segmento aberto

$$(\mathbf{p} - \delta\mathbf{v}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{v}) \subset \Omega$$

e considere a curva $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to \Omega$ dada por $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$.

Como $\mathbf{p} = \gamma(0)$ é um ponto de extremo local de f, 0 é também um ponto de extremo local de $f \circ \gamma\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$. Nesse caso, sabemos da Matemática I que precisamos ter $(f \circ \gamma)'(0) = 0$. Conclua que $Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) = 0$ usando a Regra da Cadeia.

3) **(Critério da Hessiana)** Seja $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, e seja $\mathbf{p} \in \Omega$ um ponto crítico de f.

(a) Suponha que $\mathbf{p}$ é também um ponto de extremo local de f. Mostre que a forma quadrática hessiana de f em $\mathbf{p}$, $H_f(\mathbf{p})$, é:

(i) não-negativa definida se $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo local;

(ii) não-positiva definida se $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo local.

Ideia da prova: Foquemos no caso em que $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo local: se $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo local, então $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo local de $-f$ e vale $H_{-f}(\mathbf{p}) = -H_f(\mathbf{p})$. Portanto, o caso de máximo segue do caso de mínimo.

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ qualquer, e tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que a curva

$$\begin{aligned}\gamma\colon (-\delta, \delta) &\to \Omega \\ t &\mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}\end{aligned}$$

seja bem-definida. Como vimos no exercício anterior, $(f \circ \gamma)'\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ é dada por $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$. Usando a Regra da Cadeia, mostre que $(f \circ \gamma)''(0) = ((f \circ \gamma)')'(0) = H_f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}^2$.

Como 0 é um ponto de mínimo local de $f \circ \gamma$, use o critério de mínimo local da Matemática I para concluir que $H_f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}^2 \geq 0$.

(b) Mostre que, se $H_f(\mathbf{p})$ é positiva definida, então $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo local estrito. Conclua que se $H_f(\mathbf{p})$ é negativa definida, então $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo local estrito.

Ideia da prova: Como $q = H_f(\mathbf{p})$ é contínua e a esfera $S = S(\mathbf{0}, 1)$ é compacta, o Teorema do Valor Extremo de Weierstrass nos diz que existe $\mathbf{u} \in S$ tal que

$$q \cdot \mathbf{v}^2 \geq q \cdot \mathbf{u}^2 \;\forall\; \mathbf{v} \in S$$

Como q é também positiva definida, $q \cdot \mathbf{u}^2 > 0$; seja $c = \frac{1}{2}(q \cdot \mathbf{u}^2)$.

Seja $\mathbf{x} \in \Omega$ qualquer. Aplicando o Teorema do Polinômio de Taylor de ordem 2 para f no ponto $\mathbf{p}$, temos que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \frac{1}{2}D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{x}-\mathbf{p}) + r(\mathbf{x}-\mathbf{p})$$

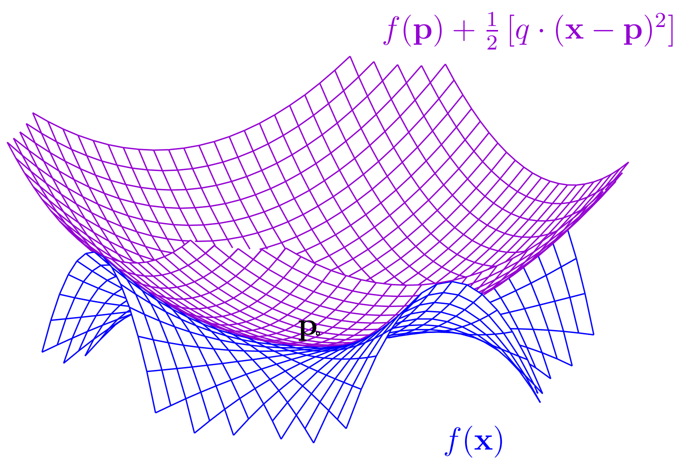
com

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|r(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||^2} = 0 \tag{2}$$

Mas $\mathbf{p}$ é um ponto crítico de f e $D^2f(\mathbf{p})$ é a transformação bilinear associada à forma quadrática $H_f(\mathbf{p}) = q$ (prove essa segunda afirmação; é só usar a definição de $D^2f(\mathbf{p})$), logo

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left[q \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})^2\right] + r(\mathbf{x}-\mathbf{p})$$

Intuitivamente, o que mostramos é que, na vizinhança de um ponto crítico, o gráfico de f é uma «perturbação de ordem 2» de um parabolóide elíptico côncavo com mínimo em $\mathbf{p}$:



(É um resultado da Geometria Analítica que, se uma forma quadrática Q é positiva definida, então seu gráfico é um parabolóide elíptico côncavo).

O que faremos agora é mostrar que essa caracterização é *estável* por perturbações de ordem 2: o fato de q ser positiva definida nos dirá que $\mathbf{p}$ é também um mínimo local estrito de f.

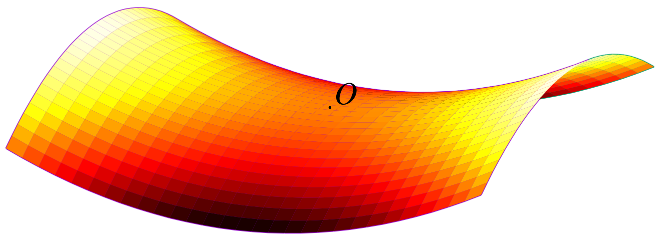
Para isso, use a equação (2) para concluir que, se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então $|r(\mathbf{h})| \leq \frac{c}{2} \, ||\mathbf{h}||^2$ desde que $||\mathbf{h}|| < \varepsilon$ (c é a constante definida acima). Então, se $\mathbf{x} \in \Omega$ é tal que $||\mathbf{x} - \mathbf{p}|| < \varepsilon$,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}\left[q \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})^2\right] + r(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \\
&\geq \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{p}||^2}{2} \; q \cdot \mathbf{u}^2 - |r(\mathbf{x} - \mathbf{p})| \\
&\geq ||\mathbf{x} - \mathbf{p}||^2 \left(c - \frac{c}{2}\right) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

Conclua que $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo local estrito de f.

OBS. 1: Um ponto crítico que não é ponto de extremo local é chamado de *ponto de sela*. Se $H_f(\mathbf{p})$ é indefinida (isto é, se $h_f(\mathbf{x})$ possui autovalores tanto positivos quanto negativos), $\mathbf{p}$ será ponto de mínimo local em algumas direções (por exemplo, na direção correspondente a um autovetor de $h_f(\mathbf{x})$ com autovalor positivo) e ponto de máximo local em algumas outras direções (como na direção correspondente a um autovetor de $h_f(\mathbf{x})$ com autovalor negativo).

Nesse caso, $\mathbf{p}$ é um ponto de sela de f, e o formato do gráfico de f numa vizinhança de $\mathbf{p}$ é semelhante ao da função $g(x, y) = x^2 - y^2$ numa vizinhança da origem (figura abaixo) (o gráfico da função g inspirou o nome *ponto de sela*).



OBS. 2: Juntando os exercícios 1, 2 e 3, construímos um modo algorítmico de encontrar pontos de extremo local de uma função de classe C^2 definida num aberto.

Primeiro, encontramos seus pontos críticos. Em segundo lugar, analisamos os autovalores da matriz hessiana em cada ponto crítico: se todos os autovalores forem positivos, o ponto é de mínimo local; se todos os autovalores forem negativos, o ponto é de máximo local; e se a matriz hessiana tiver autovalores tanto negativos quanto positivos, o ponto é de sela.

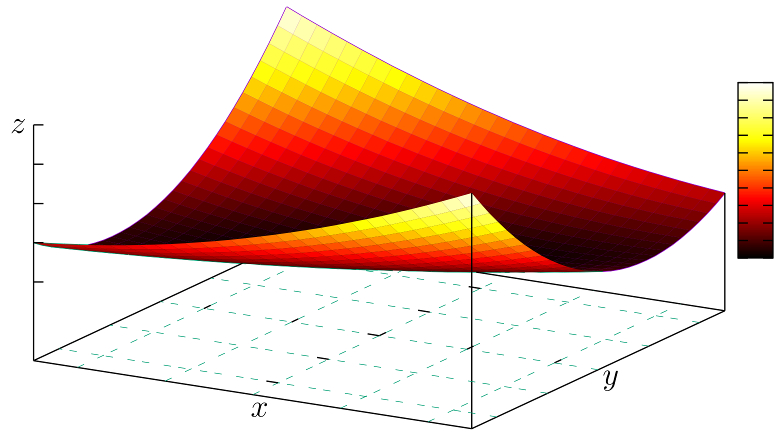
Se todos os autovalores da hessiana forem não-negativos (respectivamente, não-positivos) mas algum dos autovalores for 0, em geral não é possível dizer se o ponto é de mínimo local (respectivamente, de máximo local) ou de sela. Um exemplo é o seguinte:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2 + y^3 \end{aligned}$$

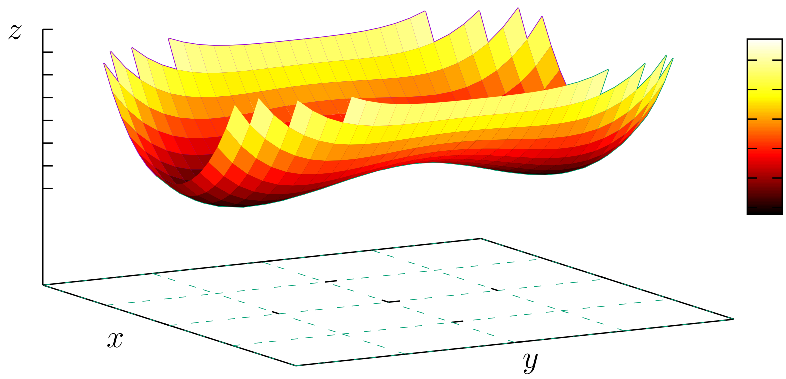
A origem $(0,0)$ é um ponto crítico dessa função, e $H_f(0,0)\cdot(v_1,v_2)^2 = 2v_1^2$ tem matriz hessiana $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, cujos autovalores são 2 e 0. No entanto, $(0,0)$ não é um ponto de mínimo local de f: a sequência $\left(0, -\frac{1}{n}\right)$ converge para $(0,0)$ (e portanto, eventualmente entra em qualquer vizinhança da origem) e $f\left(0,-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3} < 0 = f(0,0)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Nos exercícios 4-6 abaixo, encontre e classifique (entre ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela) os pontos críticos da função f. Verifique se f possui pontos de extremo globais, e, em caso afirmativo, encontre-os.

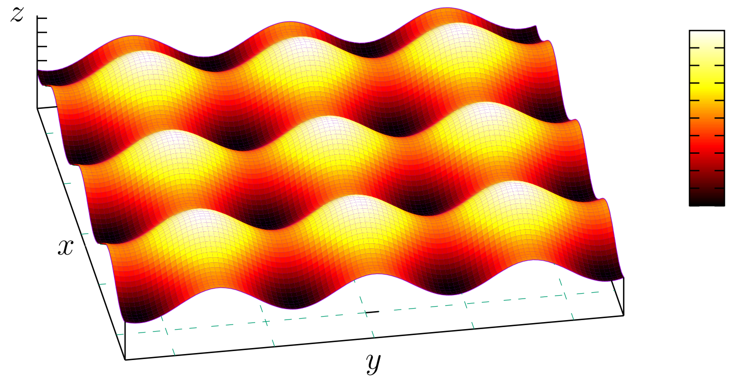
4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$



5) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 10(x^2 - y^2 + (x^2+y^2)^2)$



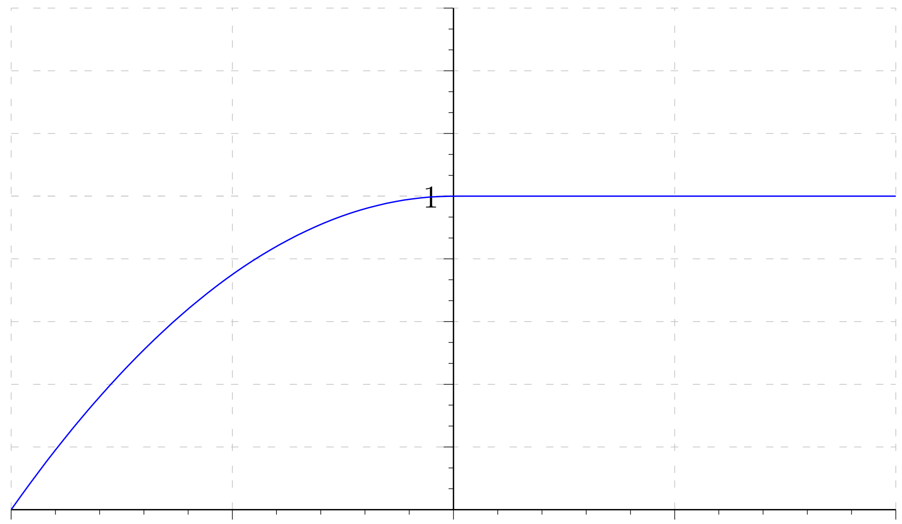
6) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x-y)\cos(x+y)$



Teorema da Função Injetora

7) Seja $\gamma\colon (0,2) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Mostre que γ é diferenciável e $D\gamma(t)$ é injetora para todo $t \in (0,2)$, mas γ não é injetora: $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \gamma(\frac{3}{2}) = (-1,0)$. Isso contradiz o Teorema da Função Injetora?

8) Seja $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com o seguinte gráfico:



Sejam $Q = [-1,1] \times [0,1]$ e $F\colon Q \to \mathbb{R}^3$ dada por

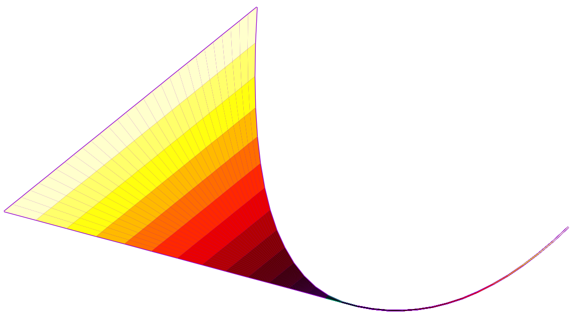
$$F(t,s) = (t, (1-s)f(t) + s(2 - f(t)), t^2)$$

Deduza do Teorema da Função Injetora que

$$\dim Im\ DF(t,s) \leq 1 \qquad \forall\ (t,s) \in (0,1) \times (0,1)$$

Encontre $Im\ \ DF(t,s)$ explicitamente para cada $(t,s) \in \mathring{Q}$, e mostre que $\dim Im\ \ DF(t,s)$ passa por uma descontinuidade ao cruzar o eixo dos s, $S = \{(0,s)\ s \in (0,1)\}$.

$(0,0,0) = F\left(0, \frac{1}{2}\right) \in M = F\left(\mathring{Q}\right)$ é um exemplo do que chamamos de *singularidade* geométrica de tipo cúspide:



Teoremas da Função Sobrejetora e da Função Aberta

9) Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x^2 - 3e^{xz} + 10y^3, 5x^6z^2 - \cos(x^2 - z))$. Mostre que f é uma função aberta, i.e., se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, $f(\Omega)$ é aberto.

Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita

10) (Invariância diferenciável da dimensão) Sejam $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^q$ abertos não-vazios e $f\colon U \to V$ uma bijeção. Suponha que f é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$ e $f^{-1}\colon V \to U$ é diferenciável em $f(\mathbf{x}_0) \in V$. Mostre que $p = q$.

11) (Invariância diferenciável da fronteira) Dizemos que um aberto limitado U de $\mathbb{R}^n$ tem *fronteira regular de classe* C^k se, para cada ponto $\mathbf{x} \in \partial U$ da fronteira de U, existem $\varepsilon > 0$ e uma função bijetora $\varphi\colon B(\mathbf{x}, \varepsilon) \to \varphi(B(\mathbf{x}, \varepsilon))$ tal que (i) φ e φ^{-1} são de classe C^k; (ii) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; e (iii) se $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, então $\partial U \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \varphi_n^{-1}(\{0\})$.

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos não-vazios e $f\colon U \to V$ de classe C^k com f^{-1} de classe C^k. Mostre que, se $\Omega \subset U$ é um aberto de fronteira regular de classe C^k tal que $\overline{\Omega} \subset U$, então $f(\Omega)$ é também um aberto de fronteira regular de classe C^k e $f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega)$. *Dica:* $f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega)$ é uma consequência de ser f um homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ e $\overline{f(\Omega)}$. Se $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \partial f(\Omega)$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, tome $\varepsilon > 0$ e φ como acima. $f(B(\mathbf{x}, \varepsilon))$ é aberto (por quê?), logo existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{y}, \delta) \subset f(B(\mathbf{x}, \varepsilon))$. Mostre que $\psi\colon B(\mathbf{y}, \delta) \to \mathbb{R}$, dada por $\psi = \varphi \circ f^{-1}$, satisfaz as condições necessárias.

12) Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z$. Prove que existem um quadrado aberto $Q = (-\delta, \delta)^2$ centrado em $(0, 0)$, um intervalo aberto $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ centrado em 0 e uma função $\zeta\colon Q \to I$ de classe C^1 tais que, se $(x, y, z) \in Q \times I$ pertence ao prisma aberto $(-\delta, \delta)^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f(x, y, z) = 0$ se, e somente se, $z = \zeta(x, y)$. Isto é, em $Q \times I$, a relação $f(x, y, z) = 0$ define z implicitamente como função C^1 de x e y.

Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ e $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$. É possível encontrar uma forma explícita para ζ?

13) Seja $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z, w) = ((z-1)\log(1 + (z-1)^2) - xy\sin w + (1+x)(1-w), z^2 e^{yz} + \arctan w)$$

Prove que existem um quadrado aberto $Q_1 = (-\delta, \delta)^2$ centrado em $(0, 0)$, um quadrado aberto

$Q_2 = (-\varepsilon, \varepsilon)^2$ centrado em $(0,0)$ e uma função $\psi\colon Q_1 \to Q_2$ de classe C^1 tais que, se $(x,y,z,w) \in Q_1 \times Q_2$, $f(x,y,z,w) = (1 - \log 2, 0)$ se, e somente se, $(z,w) = \psi(x,y)$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$. É possível encontrar uma forma explícita para ψ?

Juntando Tudo: Superfícies

Sejam $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um conjunto não-vazio e $\mathbf{p}$ um ponto de M. Uma *parametrização de dimensão m de M numa vizinhança de* $\mathbf{p}$ consiste de um par (U, φ), em que U é um aberto do $\mathbb{R}^m$ e φ é uma função $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que:

(i) existe aberto $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $\varphi(U) = V \cap M$ ($V \cap M$ é chamada de *vizinhança parametrizada de* $\mathbf{p}$ *de dimensão* m);

(ii) φ é um homeomorfismo entre U e $V \cap M$;

(iii) φ é de classe C^1;

(iv) $D\varphi(\mathbf{x})$ é injetora para todo $\mathbf{x} \in U$.

Se cada ponto de M possui uma vizinhança parametrizada de dimensão m, dizemos que M é uma *superfície de classe C^1 de dimensão m e codimensão n* (m-superfície).

14) Seja $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Denotamos seu *pólo norte* por $\mathcal{N} = (0,0,1)$, e seu *pólo sul* por $\mathcal{S} = (0,0,-1)$. Considere as funções

$$\xi_N\colon S^2 \setminus \{\mathcal{N}\} \to \mathbb{R}^2, \quad \xi_S\colon S^2 \setminus \{\mathcal{S}\} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_N, \varphi_S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

dadas por:

$$\xi_N(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$
$$\varphi_N(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)$$
$$\xi_S(x,y,z) = \left(-\frac{x}{1+z}, -\frac{y}{1+z}\right)$$
$$\varphi_S(u,v) = -\varphi_N(u,v)$$

Mostre que ξ_N e ξ_S são contínuas, que φ_N e φ_S são de classe C^1 e que $D\varphi_N(u,v)$, $D\varphi_S(u,v)$ são injetoras para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Mostre também que

$$\xi_N = \varphi_N^{-1}$$

$$S^2 \setminus \{\mathcal{N}\} = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{N}\}\right) \cap S^2$$

$$\xi_S = \varphi_S^{-1}$$

$$S^2 \setminus \{\mathcal{S}\} = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{S}\}\right) \cap S^2$$

Conclua que φ_N e φ_S são parametrizações de dimensão 2 de S^2. Como

$$S^2 = \left(S^2 \setminus \{\mathcal{N}\}\right) \cup \left(S^2 \setminus \{\mathcal{S}\}\right)$$

segue que S^2 é uma 2-superfície. Será que é possível generalizar esse exercício para mostrar que S^n é uma n-superfície? (Só para pensar sobre).

15) Seja $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\psi(\theta,\phi) = ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta)$$

Seja $\mathbb{T}^2 = \psi(\mathbb{R}^2)$. Mostre que, para quaisquer $\theta_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$, a restrição de ψ a

$$Q_0 = (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) \times (\phi_0 - \pi, \phi_0 + \pi)$$

é uma parametrização de dimensão 2 de $\mathbb{T}^2$. numa vizinhança de $\psi(\theta_0, \phi_0)$. Conclua que $\mathbb{T}^2$ é uma 2-superfície (o 2-toro). Mostre que $\mathbb{T}^2$ é compacto.

16) Sejam

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\}$$

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\right\}$$

e $C = S_1 \cap S_2$. Use o Teorema do Valor Regular do ex. 24 (sem necessariamente prová-lo) para mostrar que S_1, S_2 são 2-superfícies e C é 1-superfície. Encontre uma função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que seja uma parametrização local de C (i.e., cada $t \in \mathbb{R}$ possui uma vizinhança aberta para a qual a restrição de φ é uma parametrização de C numa vizinhança de $\varphi(t)$) com $\varphi(\mathbb{R}) = C$.

17) (Funções racionais no círculo) Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário, e considere as funções

$$\begin{aligned} \xi\colon S^1 \setminus \{(0,1)\} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \tfrac{x}{1-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to S^1 \setminus \{(0,1)\} \\ t &\mapsto \left(\tfrac{2t}{1+t^2}, \tfrac{t^2-1}{1+t^2}\right) \end{aligned}$$

Fazendo analogia ao exercício 14 acima, podemos supor que φ é uma parametrização de dimensão 1 do círculo. Observe também que a imagem de φ contém todo o S^1, com a exceção do ponto $(0, 1)$. Podemos assim, de certa forma, «identificar» $\mathbb{R}$ com $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$.

Observe que temos $\varphi(0) = (0, -1)$ e

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = (0,1)$$

Assim, podemos tentar «atribuir» ao ponto $(0,1)$ o símbolo ∞ e «identificar» o círculo com um «completamento» da reta real, adicionando-se um «ponto no infinito».

Considere a função $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$. Como vimos em Matemática I, infelizmente não é possível atribuir nenhum valor $f(0)$ a 0 de forma a estender f a uma função contínua definida em todo $\mathbb{R}$.

O objetivo desse exercício será mostrar que é possível, sim, estender f a uma função contínua, mas agora tomando valores em S^1, fazendo uso do ponto no infinito. A maneira ingênua de fazer isso, encorajada pelas informalidades

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$

seria colocar $f(0) = \infty,\ f(\infty) = 0$. Veremos agora que isso, surpreendentemente, funciona.

Seja $\tilde{f}\colon S^1 \to S^1$ a função dada por $\tilde{f}(x,y) = (x,-y)$. Mostre que, para todo $t \neq 0$, vale

$$\frac{1}{t} = f(t) = (\xi \circ \tilde{f} \circ \varphi)(t)$$

Como $\tilde{f}(\varphi(0)) = \tilde{f}(0,-1) = (0,1) = \infty$ e $\tilde{f}(\infty) = \tilde{f}(0,1) = (0,-1) = \varphi(0)$, segue que $\tilde{f}$ é a extensão desejada. Com um pouco mais de teoria, poderíamos verificar até que $\tilde{f}$ é uma extensão *analítica* de f.

Sejam agora $p(t), q(t)$ polinômios, q não identicamente nulo. Se cancelamos todas as raízes reais comuns a p e q, obtemos polinômios $p_1(t)$, $q_1(t)$ sem raízes comuns tais que, para todo t tal que $q(t) \neq 0$:

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p_1(t)}{q_1(t)}$$

Assim, podemos assumir de início que p e q não possuem raízes em comum e considerar a função *racional* $R(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, definida em $U = \{t \in \mathbb{R} \mid q(t) \neq 0\}$.

Ora, pelo raciocínio que fizemos acima, podemos estender R unicamente a uma função contínua $R\colon S^1 \to S^1$. Para isso, definimos $R(s) = \infty$ se $q(s) = 0$; e, para definir $R(\infty)$, precisamos primeiro analisar a relação entre os graus de p e q:

(i) se o grau de p é menor do que o grau de q, então $\lim_{t\to-\infty} R(t) = \lim_{t\to+\infty} R(t) = 0$ e definimos $R(\infty) = 0$;

(ii) se o grau de p é maior do que o grau de q, então $\lim_{t\to-\infty}|R(t)| = \lim_{t\to+\infty}|R(t)| = \infty$ e definimos $R(\infty) = \infty$;

(iii) e se $p(t) = a_d t^d + \cdots + a_1 t + a_0$ e $q(t) = b_d t^d + \cdots + b_1 t + b_0$ têm o mesmo grau, então $\lim_{t\to-\infty} R(t) = \lim_{t\to+\infty} R(t) = \frac{a_d}{b_d}$ e definimos $R(\infty) = \frac{a_d}{b_d}$.

A extensão de funções racionais complexas para a *esfera de Riemann* (o plano complexo mais um ponto no infinito, equivalente a S^2) para o estudo de suas propriedades é um tópico de pesquisa atual nas áreas de Análise Complexa e Dinâmica Complexa.

18) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = ((x - 3\cos z)^2 + y^2, z)$.

(a) Mostre que

$$JF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2(x - 3\cos z) & 2y & 6(x - 3\cos z)\sin z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e conclua que $DF(\mathbf{p})$ é sobrejetora $\forall\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sejam $R = (4, 16) \times (-2\pi, 2\pi)$ e $\Omega = F^{-1}(R)$. Mostre que para cada $(t, s) \in R$, $F^{-1}(\{(t, s)\})$ é um círculo no plano $z = s$.

(c) Faça um esboço de Ω, indicando $F^{-1}\left(\left\{\left(9, -\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right)$ e $F^{-1}\left(\left\{\left(12, \frac{5\pi}{4}\right)\right\}\right)$.

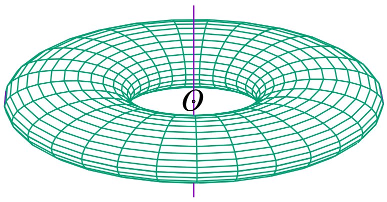
$$\Omega = \bigcup_{(t,s)\in R} F^{-1}(\{(t,s)\})$$

é um exemplo de uma *folheação* de codimensão 2 por círculos.

Extremos com Vínculos: Multiplicadores de Lagrange

19) Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{T} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 \leq 1\right\}$$



(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é compacto e que $\partial\mathcal{T} = g^{-1}(\{0\})$,

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2) \end{aligned}$$

(b) Encontre os valores máximo e mínimo da função

$$f(x,y,z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$$

em $\mathcal{T}$. *Dica:* use o critério da hessiana em $\mathring{\mathcal{T}}$ e o critério dos multiplicadores de Lagrange em $\partial\mathcal{T}$.

Desafios

20) (Raiz quadrada de uma perturbação da identidade) Consideramos o conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 a entradas reais como equivalente ao $\mathbb{R}^4$ através do isomorfismo linear:

$$\begin{aligned} L\colon\, M_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^4 \\ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] &\mapsto (a,b,c,d) \end{aligned}$$

Definimos uma função $F\colon\, \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ por

$$F(x,y,z,w) = L\left(\left[L^{-1}(x,y,z,w)\right]^2\right) = L\left(\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right]^2\right)$$

Mostre que

$$\begin{aligned} DF(1,0,1,0)(h_1,h_2,h_3,h_4) &= DF\left(L^{-1}(Id)\right)\left(L\left(\left[\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right]\right)\right) \\ &= 2(h_1,h_2,h_3,h_4) \end{aligned}$$

é uma transformação linear inversível. Conclua, usando o Teorema da Função Inversa, que toda matriz A suficientemente próxima da matriz identidade possui uma única *raiz quadrada* numa vizinhança da identidade: se $V \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é uma vizinhança aberta de Id, existe uma vizinhança aberta $U \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de Id tal que, se $A \in U$, existe uma única matriz $B \in V$ com $B^2 = A$.

21) (Funções harmônicas e Príncipios do Máximo e do Mínimo)

Recordemos o *operador de Laplace*, Δ, agindo sobre um campo escalar: se $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ é aberto e $u \in C^2(\Omega)$ (na notação do ex. 16 da lista 3), definimos:

$$\Delta u(\mathbf{x}) := \nabla \cdot (\nabla u)(\mathbf{x}) = \text{Tr } J(\nabla u)(\mathbf{x}) = \text{Tr } h_u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$$

Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é dita *harmônica* se satisfaz a equação de Laplace em Ω:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega$$

(a) Mostre que $\Delta\colon C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ é um operador linear, i.e., $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$ e $\Delta(\alpha u) = \alpha \Delta u$.

(b) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ um aberto limitado e $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ harmônica em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto e u é contínua, existem $\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}\ u(\mathbf{x})$ e $\min_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}\ u(\mathbf{x})$.

Suponha que u não atinge seu máximo em $\partial\Omega$, i.e., existe $\mathbf{x}_0$ ponto de máximo local tal que $u(\mathbf{x}_0) > \max_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}\ u(\mathbf{x})$. Prove que existe $\varepsilon > 0$ tal que a função $v_\varepsilon\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, dada por $v_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||^2$, não assume seu máximo em $\partial\Omega$. *Dica:* Seja $\delta > 0$ tal que $\overline{B} := \overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)} \subset \Omega$ e tome $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \cdot \delta < u(\mathbf{x}_0) - \max_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}\ u(\mathbf{x})$$

Mostre que

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}\ u(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \delta < u(\mathbf{x}_0) = v_\varepsilon(\mathbf{x}_0)\ \forall\, \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

(c) Seja $\mathbf{x}_1 \in \Omega$ um ponto em que v_ε assume seu valor máximo. Mostre que $\Delta v_\varepsilon(\mathbf{x}_1) = 2\varepsilon p$, e observe que isso é uma contradição (*dica:* o traço de uma matriz é a soma de seus autovalores; use o ex. 3.(a)). Conclua que u tem que assumir seu valor máximo na fronteira $\partial\Omega$. Esse é o chamado *Princípio do Máximo*: uma função harmônica num aberto limitado e contínua em seu fecho assume seu valor máximo na fronteira.

(d) Deduza também o *Princípio do Mínimo*: se $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω, então u assume seu valor mínimo em $\partial\Omega$. *Dica:* se u é harmônica em Ω, então $-u$ também o é.

22) **(Teoremas da Identidade)** Esse exercício é uma continuação do ex. 21.

(a) Usando os Princípios do Máximo e do Mínimo, prove o Teorema da Identidade para funções harmônicas em abertos limitados: se $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\overline{\Omega}$, harmônica em Ω e $u(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, então u é identicamente nula.

(b) Seja $u\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ contínua. Dizemos que u *se anula no infinito* (e escrevemos $u \in C_0$) se para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que:

$$||\mathbf{x}|| > R \implies |u(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

Suponha que $u \in C_0$ é harmônica. Usando os Princípios do Máximo e do Mínimo, mostre que u é identicamente nula. *Dica:* escolha $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, e seja R como acima. Tome $U = B(\mathbf{0}, R + \frac{1}{\varepsilon})$, observe que $||\mathbf{x}|| = R + \frac{1}{\varepsilon} > R \;\forall\; \mathbf{x} \in \partial\Omega$ e use os Princípios do Máximo e do Mínimo. Observe que $\forall\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $||\mathbf{x}|| < \frac{1}{\varepsilon}$, e conclua a demonstração.

(c) Suponha que há uma distribuição de cargas (puntiformes, lineares, superficiais ou volumétricas) em materiais condutores numa região limitada do espaço tridimensional. Suponha que essa distribuição está em equilíbrio eletrostático. Mostre o Teorema da Identidade: se ϕ, ψ ambas satisfazem as propriedades do potencial eletrostático, então $\phi = \psi$. *Dica:* se definimos o infinito como ponto de referência para o potencial eletrostático, então $u := \phi - \psi \in C_0$.

23) Seja $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\begin{aligned}
\psi(\theta, v) &= (x(\theta, v), y(\theta, v), z(\theta, v), w(\theta, v)) \\
x(\theta, v) &= 5\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos v - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin 2v\right) \\
y(\theta, v) &= 5\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos v + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin 2v\right) \\
z(\theta, v) &= 10\cos\theta(1 + 0.05\sin v) \\
w(\theta, v) &= 10\sin\theta(1 + 0.05\sin v)
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{K} = \psi\left(\mathbb{R}^2\right)$. Prove que, para quaisquer $\theta_0, v_0 \in \mathbb{R}$, ψ restrita a uma pequena vizinhança aberta de (θ_0, v_0) é uma parametrização de dimensão 2 de $\mathcal{K}$. Conclua que $\mathcal{K}$ é uma 2-superfície (a *garrafa de Klein*). Mostre que $\mathcal{K}$ é compacta.

Essa superfície tem a seguinte propriedade curiosa: se uma pessoa caminha sobre ela sobre uma linha ($\theta =$ constante) até voltar ao ponto do qual partiu, terá seu lado esquerdo trocado com seu lado direito.

24) (Gráficos e Conjuntos de Nível Regulares)

(a) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ de classe C^1 e

$$M = \text{gráf } f = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega] \times \mathbb{R}^q \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$$

Sejam $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^{p+q}$, $\pi \colon M \to \mathbb{R}^p$ dadas por $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})$ e $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Prove que

φ é uma parametrização de dimensão p de M, cuja imagem é todo M, e cuja inversa é π. Conclua que o gráfico de uma função C^1 com domínio aberto no $\mathbb{R}^p$ é sempre uma p-superfície. *Dica:* os itens (ii) e (iii) da definição de parametrização saem por manipulação direta. Para o item (i), use $V = \Omega \times \mathbb{R}^q$. Para o item (iv), mostre que as primeiras p colunas de $Jf(\mathbf{x})$ são linearmente independentes e portanto, $\dim ImDf(\mathbf{x}) \geq p$. Conclua usando o Teorema do Núcleo e da Imagem (lista 1, ex. 1).

(b) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto, $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) \in \Omega$ ($\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$) e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Suponha que $f(\mathbf{p}) = \mathbf{c}$ e que a matriz de derivadas parciais de f em $\mathbf{p}$ com relação aos y_j, $Jf_{\mathbf{y}}(\mathbf{p})$, é inversível. Use o Teorema da Função Implícita e o item (a) acima para provar que existem vizinhanças abertas $U \subset \mathbb{R}^m$ de $\mathbf{x}_0$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{y}_0$ tais que $f^{-1}(\{\mathbf{c}\}) \cap (U \times V)$ é uma vizinhança parametrizada de de $\mathbf{p}$ de dimensão m. *Dica:* a conclusão do Teorema da Função Implícita é justamente que $f^{-1}(\{\mathbf{c}\}) \cap (U \times V)$ é o gráfico de uma função C^1 definida em U.

(c) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Suponha também que $\mathbf{c} \in f(\Omega)$ tem a seguinte propriedade: para todo $\mathbf{p} \in f^{-1}(\{\mathbf{c}\})$, a diferencial $Df(\mathbf{p})$ é sobrejetora (dizemos que $\mathbf{c}$ é um *valor regular* de f). Mostre que o conjunto de nível $\mathbf{c}$ de f, $M = f^{-1}(\mathbf{c})$ é uma m-superfície (esse é o chamado **Teorema do Valor Regular**).

Ideia da prova: Seja $\mathbf{p}$ um ponto qualquer de M. Como $Df(\mathbf{p})$ é sobrejetora, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim\ker Df(\mathbf{p}) = (m+n)-n = m$. Sejam $V = \ker Df(\mathbf{p})$ e $W = V^{\perp}$ o complemento ortogonal de V, i.e., o conjunto de todos os vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m+n}$ tais que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in \ker Df(\mathbf{p})$. Mostre que a restrição de $Df(\mathbf{p})$ a W é um isomorfismo linear (qual a dimensão de W? Use o Teorema do Núcleo e da Imagem).

Use o Teorema 1.15 de (T. Apostol, *Calculus, v. 2*, 2ª edição) para mostrar que

$$\mathbb{R}^{m+n} = V \oplus W$$

é uma decomposição em soma direta de $\mathbb{R}^{m+n}$ (lista 1, ex. 2). Use o ex. 2 da lista 1 para encontrar um isomorfismo linear $A\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $A(V) = \mathbb{R}^m$ e $A(W) = \mathbb{R}^n$. Sejam $\tilde{\Omega} = A^{-1}(\Omega)$, $\tilde{\mathbf{p}} = A^{-1}(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e $g\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ dada por $g = f \circ A$. Então $g(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{c}$ e, pela Regra da Cadeia, $Dg(\tilde{\mathbf{p}}) = Df(\mathbf{p}) \circ A$. Mostre que $Dg(\tilde{\mathbf{p}}) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{v}) = Df(\mathbf{p})|_W \cdot A(\mathbf{0}, \mathbf{v})$, e portanto, $Jg_{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{p}})$ é inversível. Pelo item (b), existe uma parametrização φ de dimensão m de $g^{-1}(\{\mathbf{c}\}) = A^{-1}(M)$ numa vizinhança de $\tilde{\mathbf{p}}$. Conclua que $A \circ \varphi$ é uma parametrização de dimensão M numa vizinhança de $\mathbf{p}$.