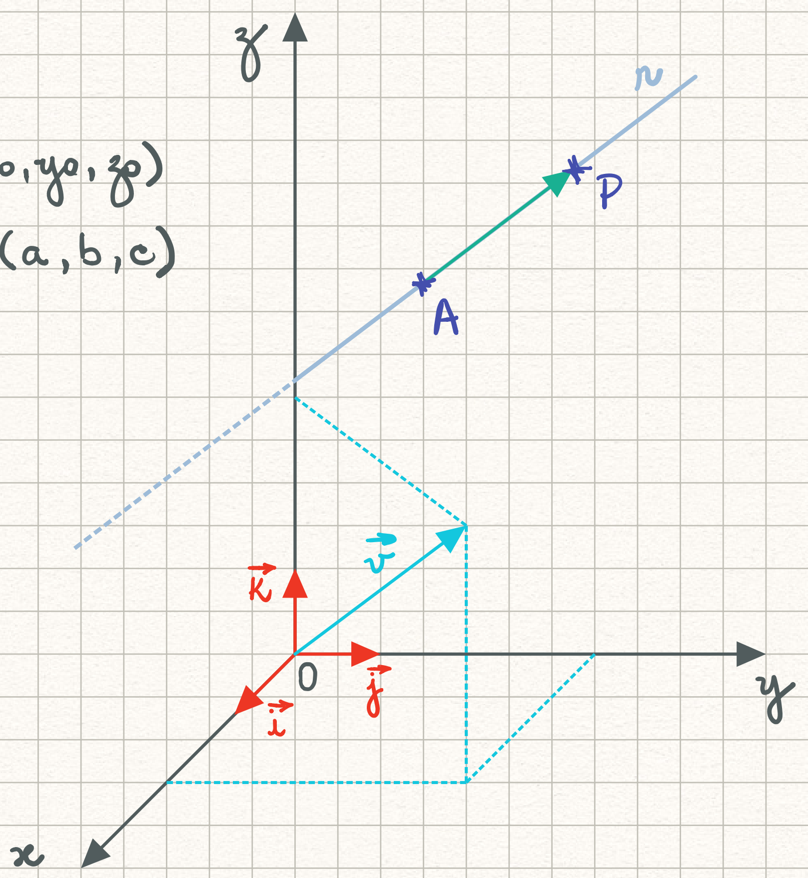
26/05/2021

$A(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = (a, b, c)$



$P \in r \iff \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

$\therefore \ \overrightarrow{AP} = t\vec{v}, \ t \in \mathbb{R}$

Eq. vetorial : $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \ t \in \mathbb{R}$

Eqs. Paramétricas : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Eqs. Simétricas : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \quad (= t)$

Eqs. Reduzidas : Escolher 2 igualdades a partir das Eqs. Simétricas, dependendo se x, y ou z é a variável livre.

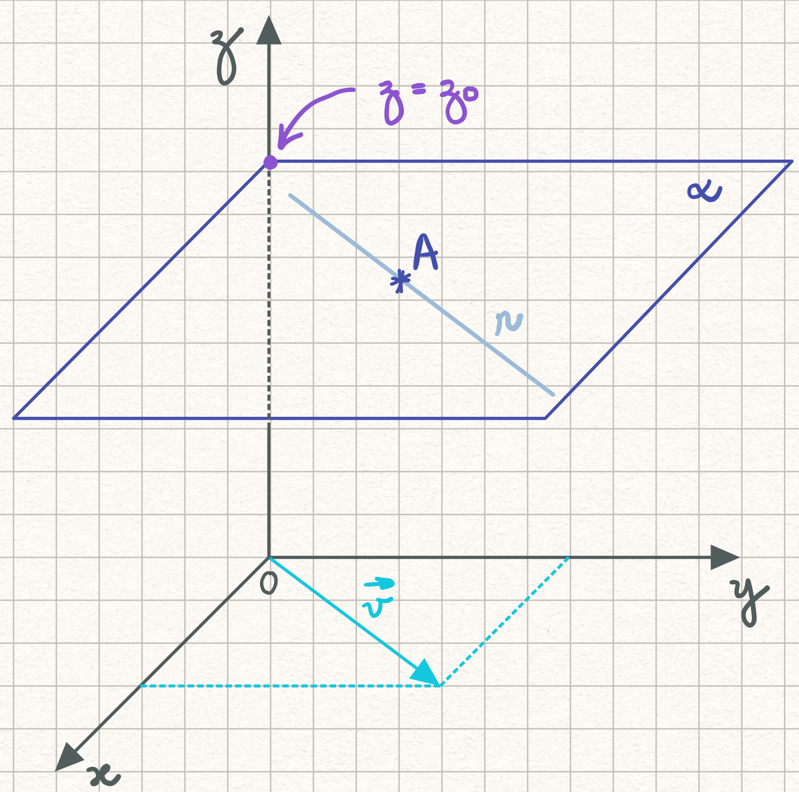
RETAS PARALELAS AOS PLANOS COORDENADOS

(Oxy, Oxz, Oyz)

* Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula

$c = 0$ $\longrightarrow$ $\vec{v} = (a, b, 0) = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\vec{v}$ é CL de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\therefore$ $\vec{v}$ é coplanar com $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\longrightarrow$ $\vec{v} \subset Oxy$.



$A(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = (a, b, 0)$

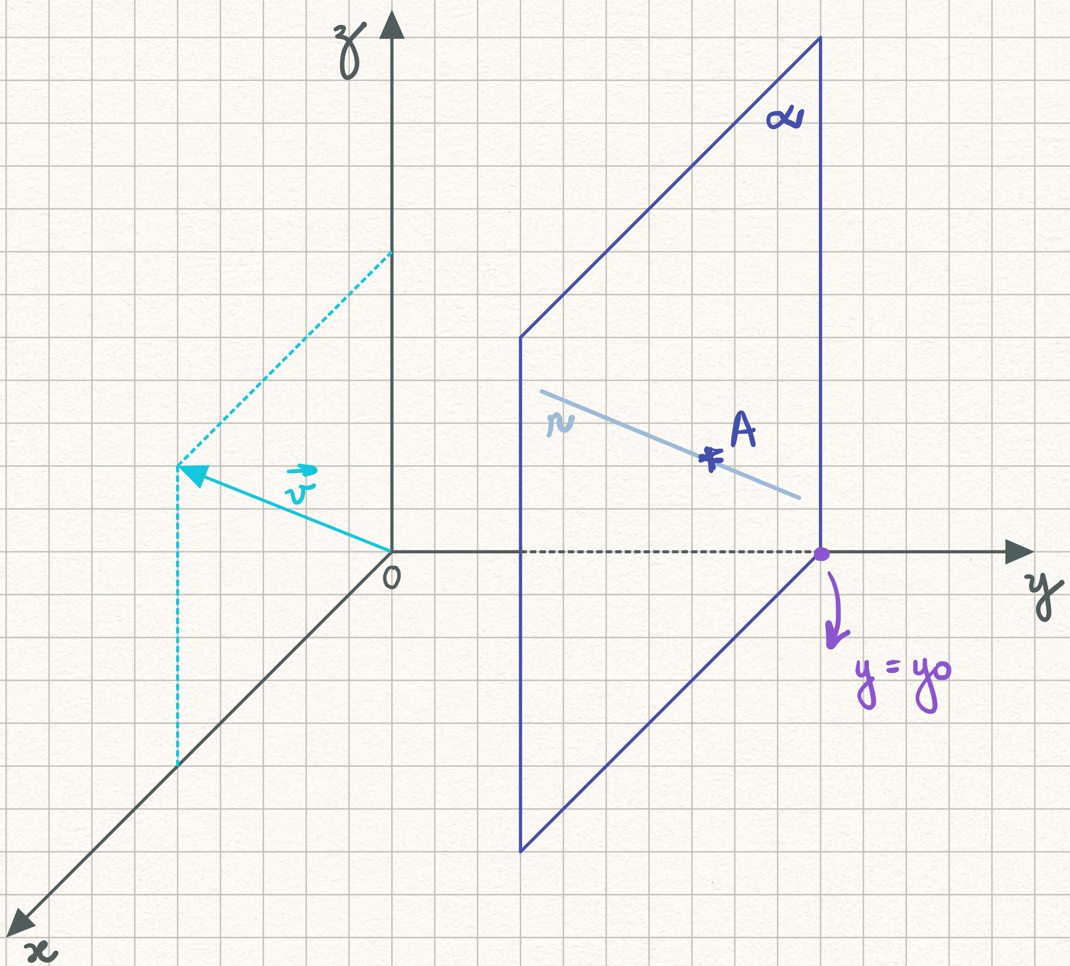
$\vec{v} \perp Oz$

Eqs. Simétricas: $r: \begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \end{cases}$ $(ab \neq 0)$

Eqs. Reduzidas: $r: \begin{cases} z = z_0 \\ y = mx + n \text{ ou } x = py + q \end{cases}$

$b = 0 \longrightarrow \vec{v} = (a, 0, c) = a\vec{i} + c\vec{k}$

$\vec{v}$ é CL de $\vec{i}$ e $\vec{k}$ $\therefore$ $\vec{v}$ é coplanar com $\vec{i}$ e $\vec{k}$ $\longrightarrow \vec{v} \subset Oxz$.



$A(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = (a, 0, c)$

$\vec{v} \perp Oy$

Eqs. Simétricas: $r: \begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$ $(ac \neq 0)$

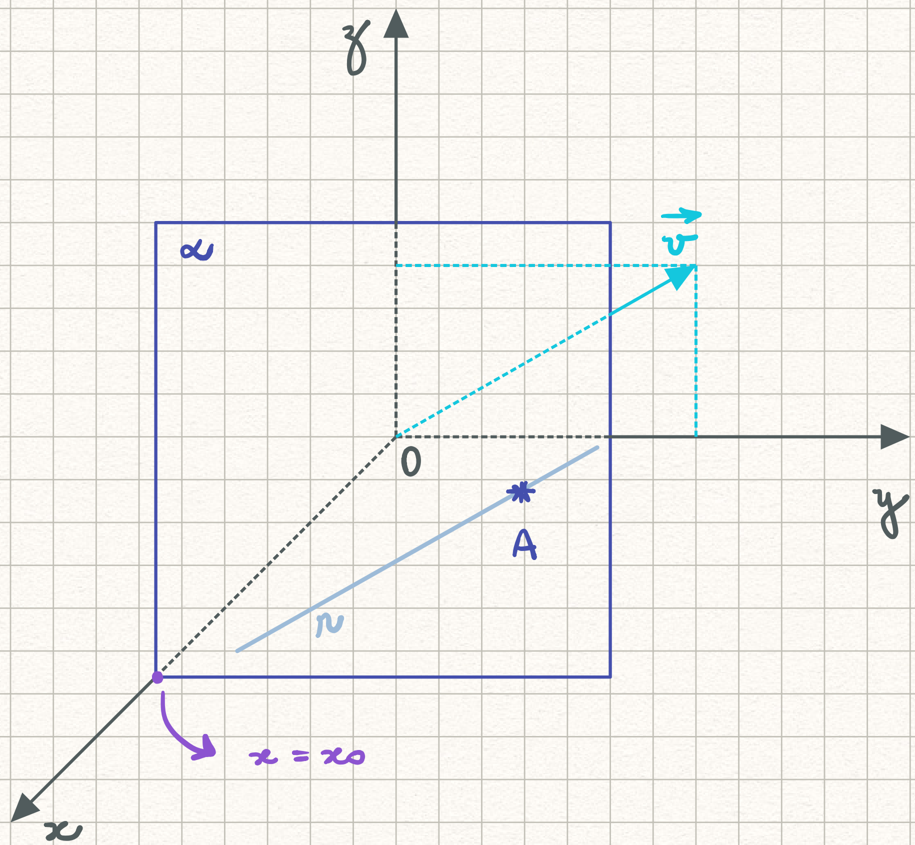
Eqs. Reduzidas: $r: \begin{cases} y = y_0 \\ z = mx + n \text{ ou } x = pz + q \end{cases}$

$a = 0 \longrightarrow \vec{v} = (0, b, c) = b\vec{j} + c\vec{k}$

$\vec{v}$ é CL de $\vec{j}$ e $\vec{k}$ $\therefore$ $\vec{v}$ é coplanar com $\vec{j}$ e $\vec{k}$ $\longrightarrow$ $\vec{v} \subset Oyz$.

$A(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = (0, b, c)$



$\vec{v} \perp Ox$

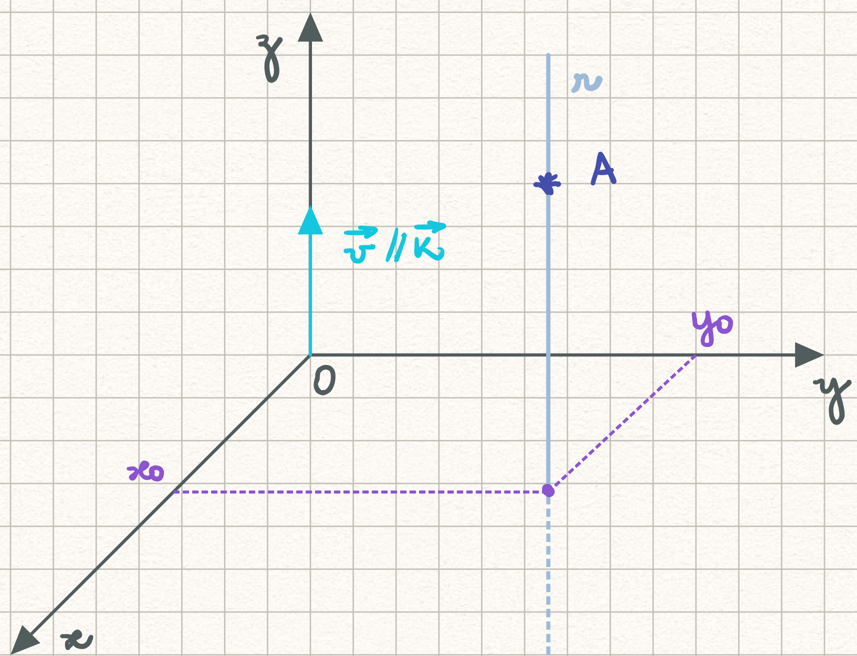
Eqs. Simétricas: $r: \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$ $(bc \neq 0)$

Eqs. Reduzidas: $r: \begin{cases} x = x_0 \\ z = my + n \text{ ou } y = pz + q \end{cases}$

RETAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS
(Ox, Oy, Oz)

* Duas das componentes de $\vec{v}$ são nulas

$a = b = 0 \longrightarrow \vec{v} = (0, 0, c) = c\vec{k} \quad \therefore \quad \vec{v} \parallel \vec{k}$ e $\vec{v} \parallel Oz$



$A(x_0, y_0, z_0)$

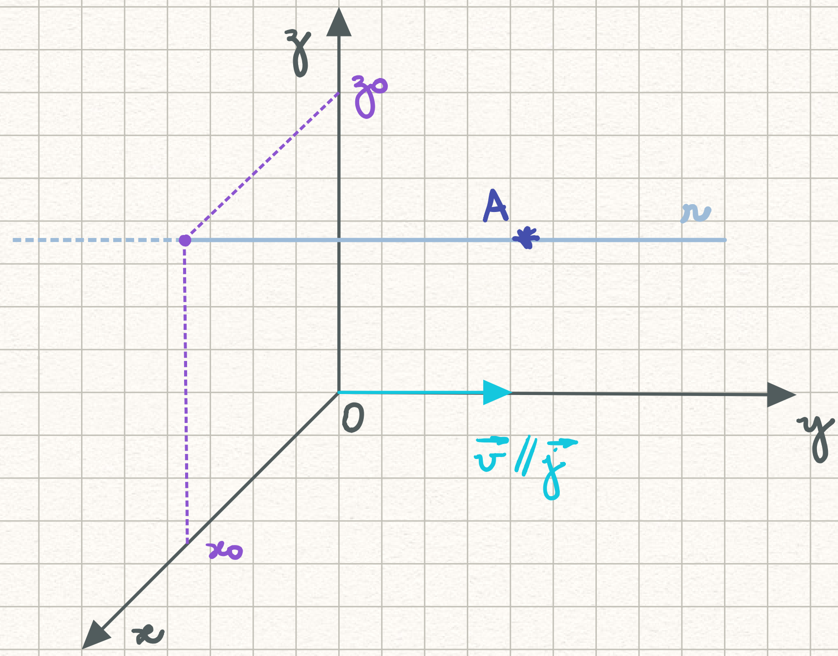
$\vec{v} = (0, 0, c)$

$\vec{v} \parallel Oz$

Eqs. Paramétricas $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

$\nexists$ Eqs. Simétricas ou Eqs. Reduzidas de r!

$a = c = 0 \longrightarrow \vec{v} = (0, b, 0) = b\vec{j} \therefore \vec{v} \parallel \vec{j}$ e $\vec{v} \parallel Oy$



$A(x_0, y_0, z_0)$

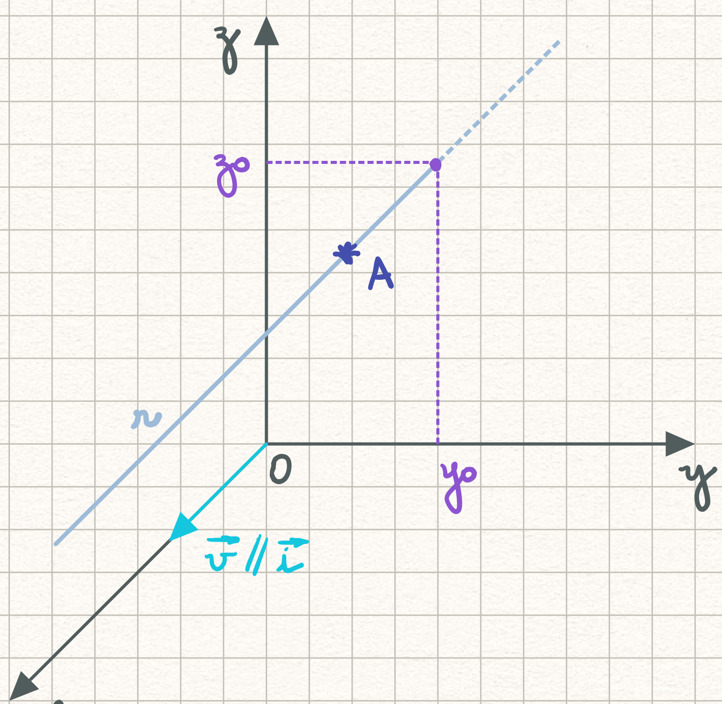
$\vec{v} = (0, b, 0)$

$\vec{v} \parallel Oy$

Eqs. Paramétricas $\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

$\nexists$ Eqs. Simétricas ou Eqs. Reduzidas

$b = c = 0 \longrightarrow \vec{v} = (a, 0, 0) = a\vec{i} \therefore \vec{v} \parallel \vec{i}$ e $\vec{v} \parallel Ox$



$A(x_0, y_0, z_0)$

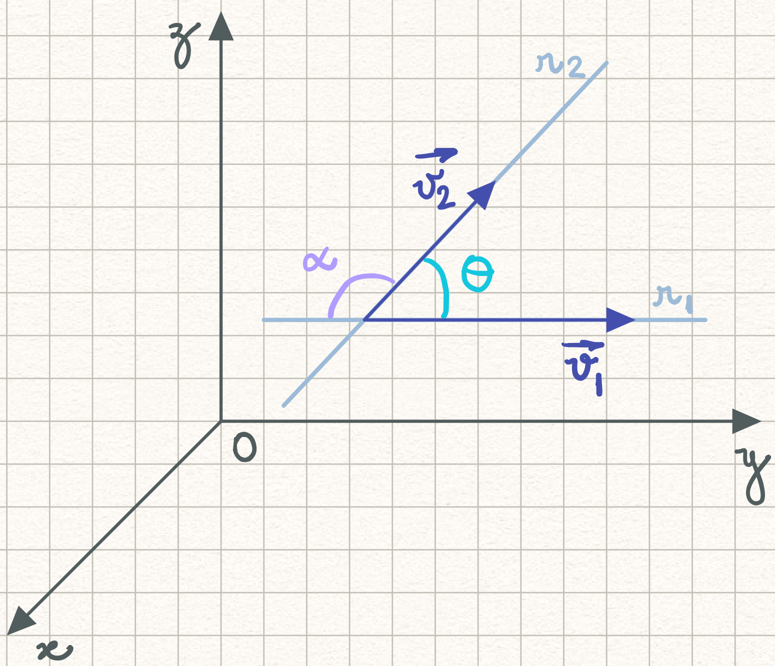
$\vec{v} = (a, 0, 0)$

$\vec{v} \parallel Ox$

Eqs. Paramétricas $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

$\nexists$ Eqs. Simétricas ou Eqs. Reduzidas

Slide 16



Entre duas retas r_1 e r_2, formam-se dois ângulos:

θ ... ângulo agudo

α ... ângulo obtuso

Qual escolher?

SEMPRE o menor: θ

Portanto:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Slide 18 - Posição Relativa de Duas Retas

Duas retas no espaço podem ser
- Coplanares
  - Concorrentes: $\exists \cap$
  - Paralelas: $\nexists \cap$
- Reversas: $\nexists \cap$

Teste da Posição Relativa: ($r_1 \parallel \vec{v}_1$ e $A_1 \in r_1$; $r_2 \parallel \vec{v}_2$ e $A_2 \in r_2$)

1) Se coplanares, $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}] = 0$. Então:

a) Se paralelas, $\exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v}_1 = k\vec{v}_2$.

b) Senão: concorrentes ($\nexists\, k$; $\exists\, I = r_1 \cap r_2$)

2) Se reversas: $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}] \neq 0$.

$I = r_1 \cap r_2$

O ponto de intersecção I entre duas retas concorrentes é o resultado do sistema formado pelas EQUAÇÕES REDUZIDAS das duas retas.

EXEMPLO - Slide 20

$$r_1: \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 9 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r_2: \ x - 3 = \frac{-4 - y}{2} = \frac{z - 4}{2}$$

No Exemplo, já foi dito que $\exists\ I = r_1 \cap r_2$, portanto não é necessário fazer o teste de posição relativa.

Encontrando as eqs. reduzidas:

$$r_1 \quad \frac{x-8}{2} = 1 - y = \frac{z-9}{3} \longrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ z = 12 - 3y \end{cases} \quad (1)$$

$$r_2 \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}y \\ z = -y \end{cases} \quad (2)$$

As eqs. (1) e (2) formam o sistema cuja solução é I:

$$\begin{cases} x = 10 - 2y & (i) \\ z = 12 - 3y & (ii) \\ x = 1 - \frac{1}{2}y & (iii) \\ z = -y & (iv) \end{cases}$$

$(ii) = (iv): \quad 12 - 3y = -y$

$y = 6$

$y \longrightarrow (i): \ x = -2$

$y \longrightarrow (iv): \ z = -6$

Logo: $I(-2, 6, -6)$

EXERCÍCIOS

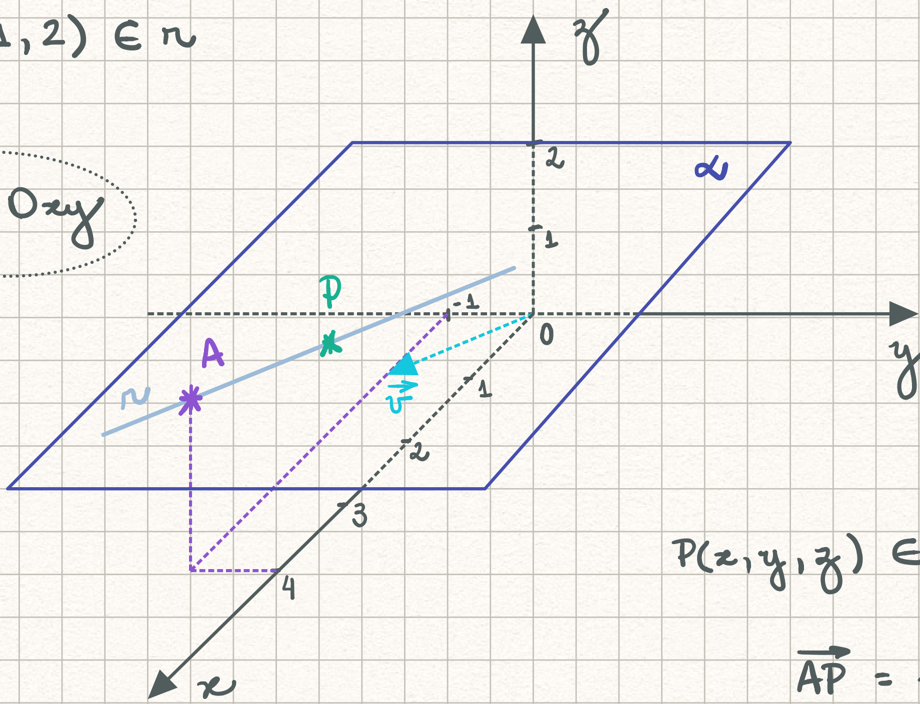
1) $\vec{v} \parallel \vec{i} - \vec{j} \therefore \vec{v} = k(\vec{i} - \vec{j}),\ k \neq 0$

$\vec{v} = k[(1,0,0) - (0,1,0)]$

$\vec{v} = k(1,-1,0) \xrightarrow{k=1} \vec{v} = (1,-1,0)$

$A(4,-1,2) \in r$

$\vec{v} \subset Oxy$



$P(x,y,z) \in r \iff \vec{AP} \parallel \vec{v}$

$\vec{AP} = t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$

$P - A = t\vec{v} \therefore P = A + t\vec{v}$

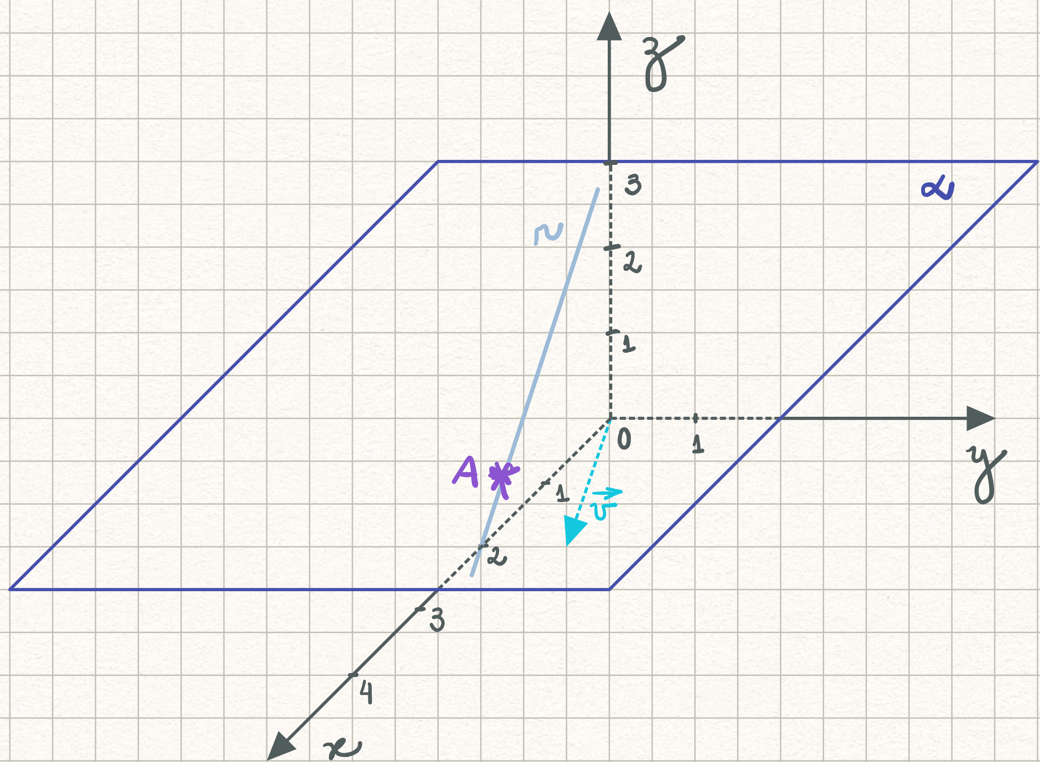
Eq. Vetorial: $(x,y,z) = (4,-1,2) + t(1,-1,0),\ t \in \mathbb{R}$

Eqs. Paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

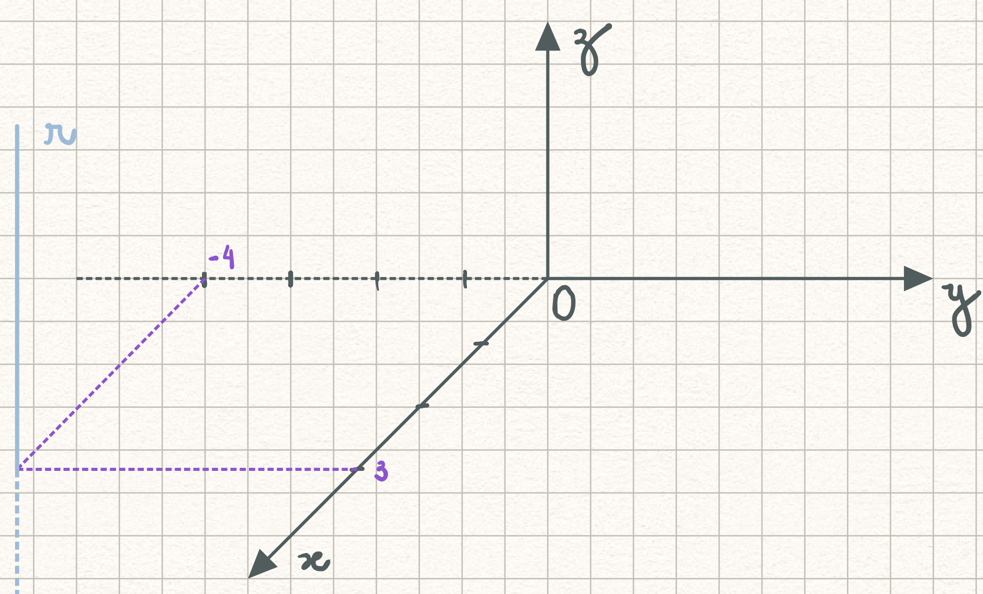
Eqs. Simétricas: $\begin{cases} z = 2 \\ x - 4 = -y - 1 \end{cases}$ (todos os pontos de r tem a coord. z fixa em 2)

Eqs. Reduzidas: $\begin{cases} z = 2 \\ x = 3 - y \end{cases}$

2) a) $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Eqs. Simétricas de uma reta contida em um plano // Oxy, que corta Oz em $z = 3$



b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Eqs. Paramétricas de uma reta cujos pontos têm as coord. x e y fixas; portanto, somente z varia e a reta // Oz.



3) $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ $\begin{cases} A_1(-1,0,1) \\ \vec{v_1} = (2,3,2) \end{cases}$

$$s = (x,y,z) = \underbrace{\boxed{(0,0,0)}}_{A_2} + t\,\underbrace{\boxed{(1,2,0)}}_{\vec{v_2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (1,0,-1)$$

Teste da Posição Relativa:

1) Se coplanares, $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] = 0$. Então:

   a) Se paralelas, $\exists\, K \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v_1} = K\vec{v_2}$.

   b) Senão: concorrentes $(\nexists\, K;\ \exists\, I = r_1 \cap r_2)$

2) Se reversas: $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] \neq 0$.

1 $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 3 = -5 \neq 0$

Como $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] \neq 0$, r e s são retas REVERSAS.

4) $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ $\begin{cases} A_1(2,0,5) \\ \vec{v_1} = (2,3,4) \end{cases}$

$$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$A_2(5,2,7)$ $\quad$ $\vec{v_2} = (1,-1,-2)$

SE HOUVER — O exercício não afirma se $\exists\ I = r \cap s$, portanto, deve-se realizar o Teste da Posição Relativa.

Teste da Posição Relativa:

1) Se coplanares, $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] = 0$. Então:
   a) Se paralelas, $\exists\ K \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v_1} = K\vec{v_2}$.
   b) Senão: concorrentes ($\nexists\ K$; $\exists\ I = r_1 \cap r_2$)

2) Se reversas: $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] \neq 0$.

1 $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (3,2,2)$

$$[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 8 - 18 + 12 + 8 - 6$$

$[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] = 0 \quad \therefore$ r e s são COPLANARES.

a $\exists\ K \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v_1} = K\vec{v_2}$?

$$(2,3,4) = K(1,-1,-2)$$

Como $\nexists\ K$, r e s são CONCORRENTES e $\exists\ I = r \cap s$.

Escrevendo r e s em Eqs. Reduzidas:

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \longrightarrow r \begin{cases} x = 2 + \frac{2}{3}y \\ z = 5 + \frac{4}{3}y \end{cases} \quad (1)$$

$$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \longrightarrow s \begin{cases} x = 7 - y \\ z = 3 + 2y \end{cases} \quad (2)$$

As eqs. (1) e (2) formam o sistema cuja solução é I:

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{2}{3} y & (i) \\ z = 5 + \frac{4}{3} y & (ii) \\ x = 7 - y & (iii) \\ z = 3 + 2y & (iv) \end{cases}$$

(i) = (iii):

$$2 + \frac{2}{3} y = 7 - y$$

$$\frac{5}{3} y = 5$$

$$y = 3 \,//$$

$y \longrightarrow$ (iii): $x = 4 \,//$

$y \longrightarrow$ (iv): $z = 9 \,//$

$\therefore$ $I(4,3,9) \,///$

5) $$r_1: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t + 3 \\ z = 3t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \vec{v_1} = (-1, -2, 3)$$

$$r_2: \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

$x = 0$, $y = z = 0$ $\therefore$ $A(0,0,0)$

$x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ $\therefore$ $B(1,1,2)$

$\vec{v_2} = \vec{AB}$

$\vec{v_2} = (1,1,2)$

$$r: \frac{x - 1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{-z}{2} \qquad \vec{v} = (a, b, -2)$$

$a, b = ?$ tal que r seja ortogonal a r_1 e a r_2.

Se r é simultaneamente ortogonal a r_1 e a r_2, então $\vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{v_1}$ e a $\vec{v_2}$. Logo, $\vec{v} \parallel \vec{v_1} \times \vec{v_2}$:

$$\therefore \quad \vec{v} = K(\vec{v_1} \times \vec{v_2}), \quad K \neq 0 \qquad (1)$$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (-7, 5, 1)$$

Substituindo $\vec{v}$ e $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ em (1):

$$(a, b, -2) = K(-7, 5, 1)$$

$$\begin{cases} a = -7K \\ b = 5K \\ -2 = K \end{cases} \longrightarrow K = 2 \quad \therefore \quad \boxed{\begin{cases} a = 14 \\ b = -10 \end{cases}}$$