UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de Lorena - EEL

10. Distâncias

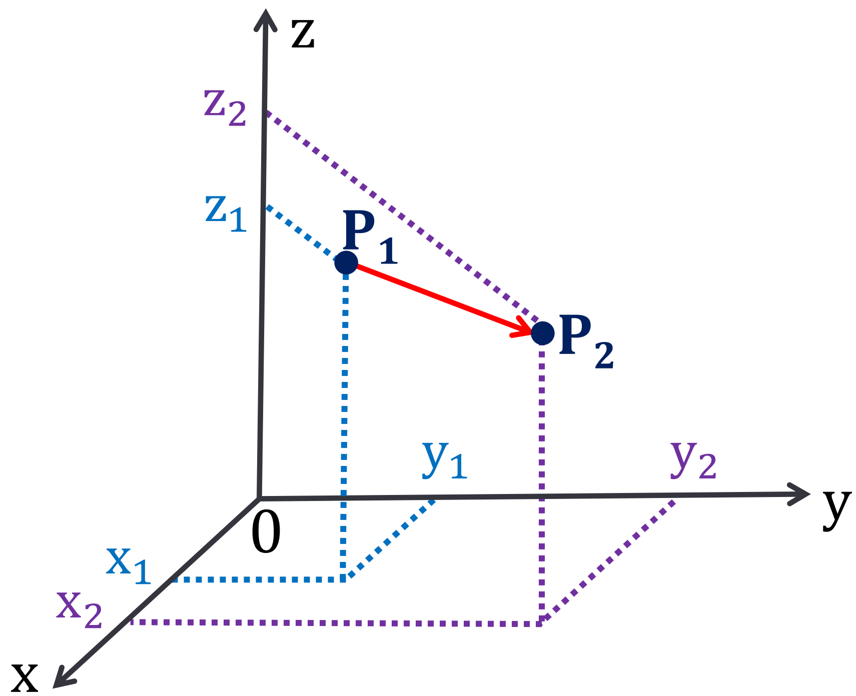
LOB 1036 - Geometria Analítica

Profa. Paula C P M Pardal

1. Distância entre Dois Pontos

- A **distância δ** entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é definida pelo ***módulo do vetor*** $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\delta = d(P_1, P_2) = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = |P_2 - P_1|$$



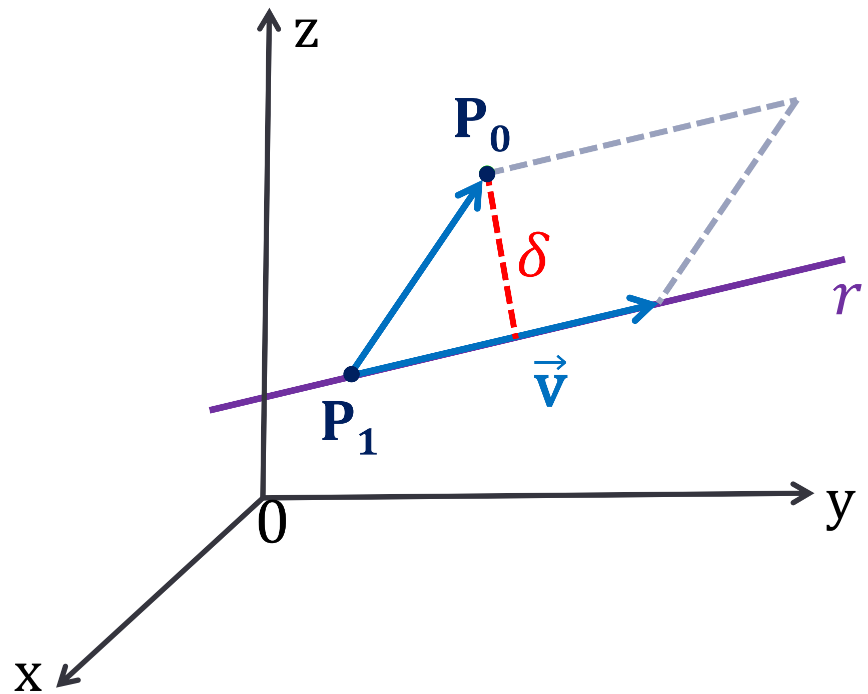
$$\therefore \delta = d(P_1, P_2) = \sqrt{(P_2 - P_1)\cdot(P_2 - P_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. Distância de um Ponto a uma Reta

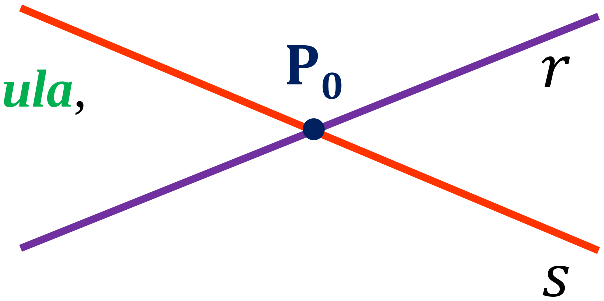
- Sejam r uma reta definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$; e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do espaço, $P_0 \notin r$. A ***distância δ*** é o módulo da ***projeção ortogonal*** do ponto P_0 sobre a reta r.

  - Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_0}$ determinam um ***paralelogramo*** cuja altura corresponde à ***distância δ*** do ponto P_0 à reta r.

$$\therefore \delta = d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{v}|}$$



Retas CONCORRENTES



- A **distância δ** entre duas retas concorrentes r e s é ***nula***, por definição.

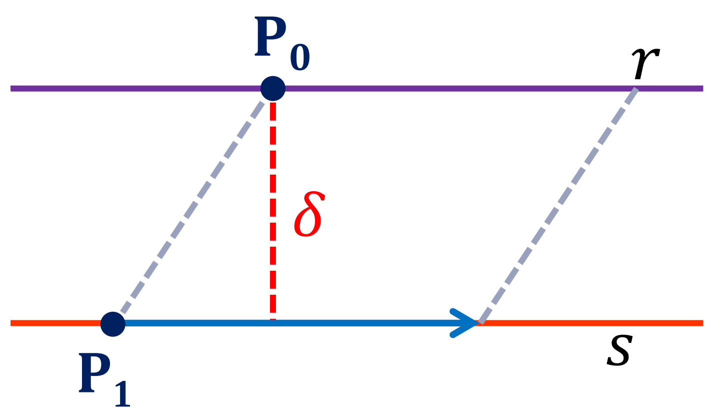
Retas PARALELAS

- A **distância δ** entre as retas paralelas r e s é o módulo da ***projeção ortogonal*** de um ponto qualquer P_0 de uma delas à outra.

$$\therefore \delta = d(r, s) = d(P_0, s), P_0 \in r$$

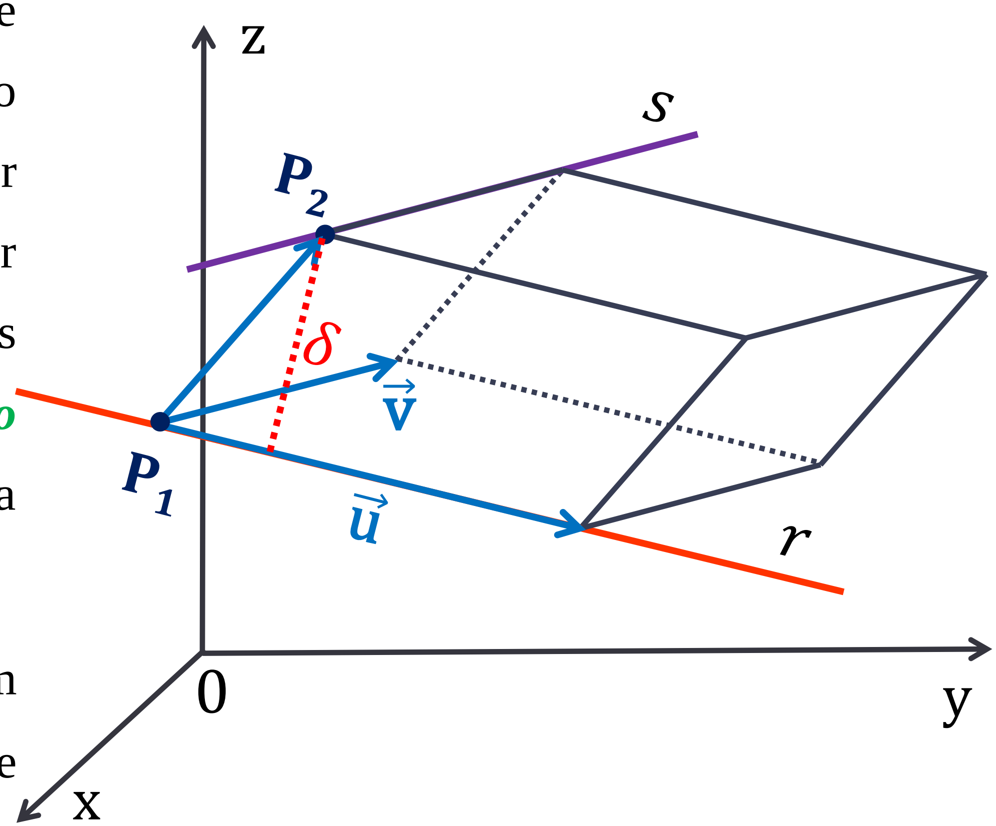
ou

$$\therefore \delta = d(r, s) = d(P_0, r), P_0 \in s$$



Se as retas são <u>REVERSAS</u>

- Sejam duas retas reversas r e s: a reta r é definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$; e a reta s, por um ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. A **distância δ** entre as retas r e s é o módulo da ***projeção ortogonal*** de um ponto qualquer de uma delas sobre a outra.



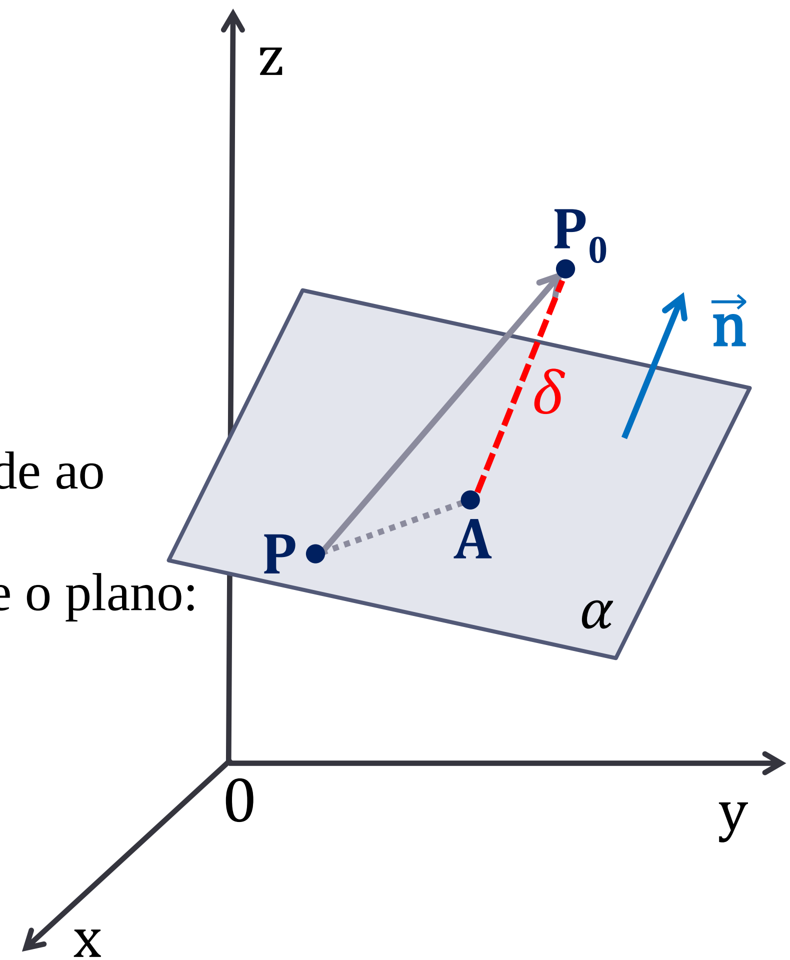
Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ formam um ***paralelepípedo***, cuja base é definida por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e cuja altura é a **distância δ** entre r e s:

$$\therefore\ \delta = d(r, s) = |\text{proj}_{\vec{u}\times\vec{v}}\overrightarrow{P_1P_2}|$$

4. Distância de um Ponto a um Plano

- Sejam um plano α: $ax + by + cz + d = 0$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$; $P_0 \notin \alpha$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP_0} \parallel \vec{n} \\ A, P \in \alpha \end{cases}$$



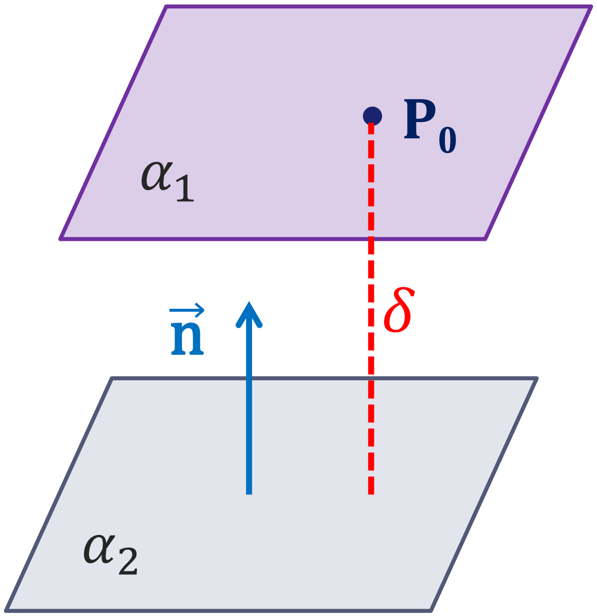
- A **distância** $\boldsymbol{\delta}$ do ponto P_0 ao plano α corresponde ao módulo da ***projeção ortogonal*** desse ponto sobre o plano:

$$\therefore \delta = d(P_0, \alpha) = \left|\overrightarrow{AP_0}\right| = \left|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_0}\right|$$

5. Distância entre Dois Planos

- A distância entre dois planos somente se define se os planos forem paralelos: $\exists\ \delta = \mathrm{d}(\alpha_1, \alpha_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = k\,\overrightarrow{n_2},\ \ k \in \mathbb{R}$.

- A **distância $\boldsymbol{\delta}$** entre os planos corresponde ao módulo da ***projeção ortogonal*** de um ponto qualquer P_0 de um dos planos sobre o outro:



$$\delta = \mathrm{d}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{d}(P_0, \alpha_2),\ P_0 \in \alpha_1$$

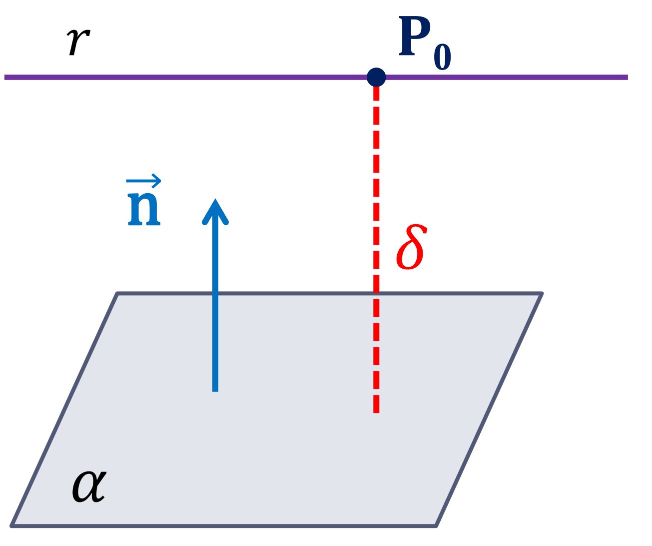
ou

$$\delta = \mathrm{d}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{d}(P_0, \alpha_1),\ P_0 \in \alpha_2$$

6. Distância de uma Reta a um Plano

- A distância de uma reta a um plano somente é definida se a reta for paralela ao plano: $\exists\ \delta = \mathrm{d}(r, \alpha) \Leftrightarrow \vec{\mathrm{n}} \perp \vec{\mathrm{v}}\ \therefore\ \vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0.$

- A **distância $\boldsymbol{\delta}$** da reta ao plano corresponde ao módulo da ***projeção ortogonal*** de um ponto qualquer P_0 da reta sobre o plano:



$$\therefore\ \delta = \mathrm{d}(r, \alpha) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \alpha),\ \mathrm{P}_0 \in r$$

EXERCÍCIOS

1. Encontre a distância entre as retas r: x = y = z – 2 e s: $\begin{cases} y = x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$.

   $\delta = d(r, s) = \frac{\sqrt{186}}{3}$

2. Determine a distância da origem ao plano α: $\begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 1 + 3h - 2t, \quad h, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$

   $\delta = d(P_0, \alpha) = \frac{7\sqrt{26}}{26}$

3. Calcule a distância entre os planos cujas eqs. são α_1: $2x + 2y + 2z - 5 = 0$ e α_2: $x + y + z - 3 = 0$.

   $\delta = d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{3}}{6}$