MAT0164 - Números Inteiros: Uma Introdução à Matemática

LISTA 4

2021

1. Prove que três ímpares consecutivos não podem ser todos primos, com exceção de 3, 5 e 7.

2. Sejam p, q primos, $p \geqslant q \geqslant 5$. Provar que $24|(p^2 - q^2)$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a, b) = p$, p primo. Calcular $mdc(a^2, b)$ e $mdc(a^2, b^2)$.

4. Prove que:

   (a) Se p é um primo maior do que 3, então $p^2 + 2$ é composto.

   (b) Se p é um primo ímpar diferente de 5 então $10|(p^2 - 1)$ ou $10|(p^2 + 1)$.

5. Seja n um inteiro seja p um primo tal que $p \mid n$. Mostre que existem $k > 0$ e $m \in \mathbb{Z}$, com $p \nmid m$ e $n = p^k m$.

6. Seja $n > 0$ um inteiro . Provar que:

   (a) Se $(2^n - 1)$ é primo então n é primo. (Os números da forma $M_p = 2^p - 1$ com p primo são chamados de **Números de Mersenne**.)

   (b) Se o inteiro n é tal que $(2^n + 1)$ é primo então n é uma potência de 2. (Os números $F_k = 2^{2^k} + 1, k \geq 0$, são conhecidos como **Números de Fermat**.)

7. Prove que:

   (a) Um inteiro $n > 4$ é composto se, e somente se, $n \mid (n-2)!$.

   (b) O único primo positivo da forma $n^3 - 1$ é 7.

   (c) Nenhum inteiro da forma $8^n - 1, n > 1$ é primo.

   (d) Todo inteiro da forma $n^4 + 4$ com $n > 1$ é composto.

   (e) Todo inteiro $n > 11$ pode ser escrito como soma de dois números compostos positivos.

   (f) Todo primo da forma $3n + 1$ também é da forma $6m + 1$.

   (g) Todo primo da forma $3n + 2$ tem um divisor primo dessa forma.

   (h) O único primo p tal que $3p + 1$ é um quadrado perfeito é 5.

   (i) Seja $p > 1$ um primo ímpar. Mostre que p pode ser escrito de modo único como $p = a^2 - b^2$, com $1 < a, b < p$.

8. Determinar a maior potência de 14 que divide 100!

9. Mostrar que existem infinitos primos da forma $4n + 3$, $n \in \mathbb{Z}$.

10. Seja n um inteiro positivo ímpar. Mostrar que a soma de n termos consecutivos de uma Progressão Aritmética com elementos inteiros é divisível por n.

11. Sejam m e n inteiros positivos. Mostrar que se $x = \sqrt[n]{m}$ não é um inteiro então x é irracional.

12. Seja p um inteiro primo positivo. Mostrar que:

    (a) Se $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant k \leqslant p-1$ então $p|\binom{p}{k}$.

    (b) Se $a, b \in \mathbb{Z}$ então $p|\,[(a+b)^p - (a^p + b^p)]$.

    (c) Para todo $a \in \mathbb{Z}$ temos $p|(a^p - a)$.

    (d) Se $a, b \in \mathbb{Z}$ então, ou $(a^p - b^p)$ e p são primos entre si, ou $p^2|(a^p - b^p)$.

    O resultado em (c) é conhecido como **Pequeno Teorema de Fermat**.

13. Mostre que $47 \mid (2^{23}-1)(2^{23}+1)$.

14. Seja $a \in \mathbb{Z}$ e p um primo tal que $p \nmid a$. Prove que p divide um, e apenas um entre os números $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ e $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

15. Provar que se $a \neq b$, existem infinitos inteiros positivos n tais que $mdc(a+n,\, b+n) = 1$.

16. Mostrar que não existe nenhum polinômio $p(n)$, não constante, com coeficientes inteiros tal que $p(n)$ seja primo, para todo $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

    (Esse resultado é a Proposição 2.7.4 do livro "Números: Uma Introdução à Matemática".)

17. Sejam i, j e n inteiros com $1 \leq i < j \leq n$. Mostre que $mdc(i(n!)+1, j(n!)+1) = 1$.

18. Use o resultado do exercício anterior para provar que existem infinitos números primos.

    (**Sugestão:** Suponha que existam r números primos e tome $n = r+1$ no exercício anterior.)

19. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que n é um número primo se, e somente se, $s(n) = n+1$.

    (Aqui $s(n)$ denota a soma dos divisores positivos de n.)

20. Sejam a e b inteiros relativamente primos. Mostre que $s(ab) = s(a)s(b)$.

21. Um número $N > 2$ é um número **perfeito** se a soma de todos os seus divisores positivos, exceto ele mesmo, é igual a N. Mostre que se $2^n - 1$ ($n \geq 2$) é primo então $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.

22. Vale uma recíproca parcial do exercício anterior. Prove que se N é um número perfeito **par** então $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, onde p é primo.

    Sugestão: Escreva $N = 2^k m$ com m ímpar. Use a hipótese de N ser perfeito para provar que $(2^k - 1) \mid m$.

    Observação: Até hoje nada se sabe sobre a existência de números perfeitos ímpares, só se sabe que, caso existam, são MUITO grandes!

23. Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$ o n-ésimo Número de Fermat. Prove que:

    (a) Se $d \mid F_n$ então d é da forma $4m+1$.

    (b) Se $m < n$ então $F_m \mid F_n - 2$.

    (c) $\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = 1$ se $m \neq n$.

24. Mostre que nenhuma potência de um número primo é um número perfeito.