Eletromagnetismo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

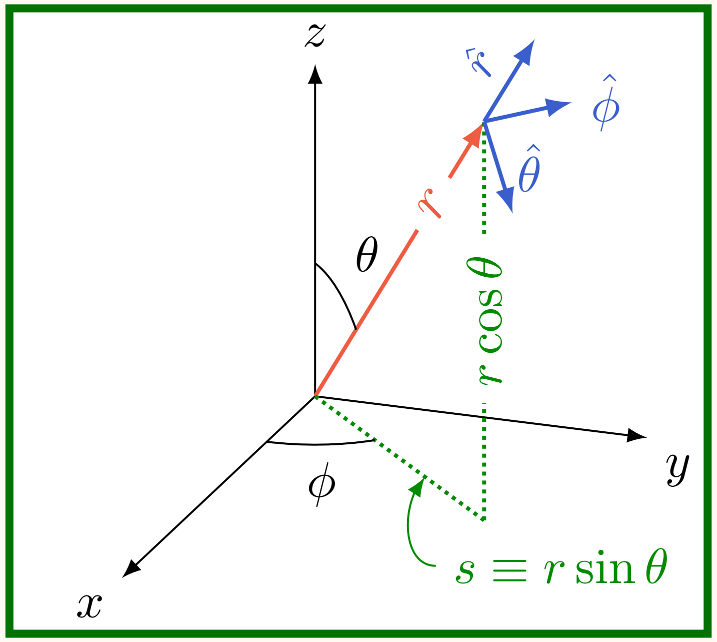
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Aula de 31 de maio
Métodos especiais

Coordenadas esféricas



$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

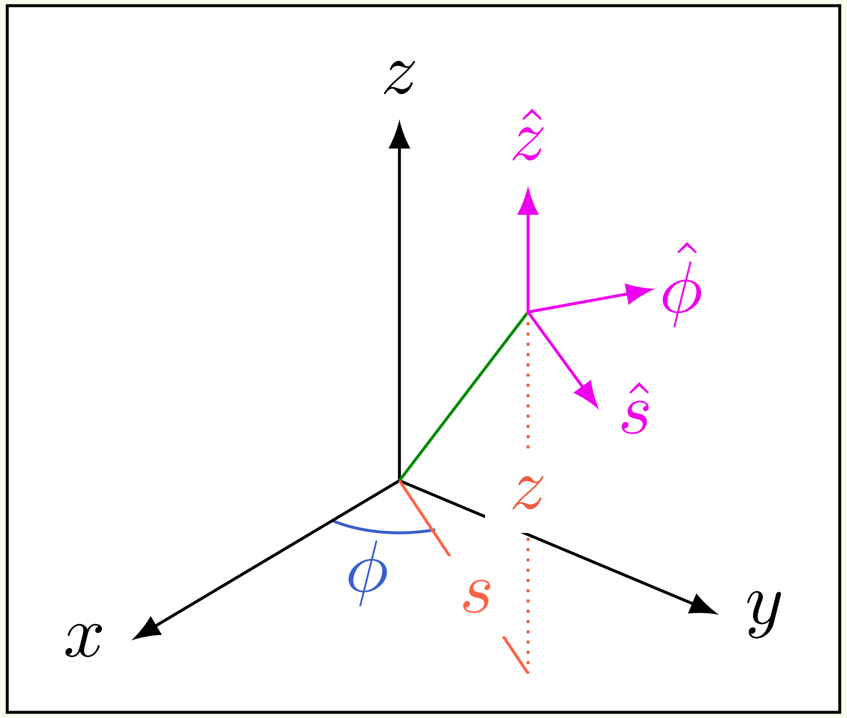
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta v_\phi\right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\phi\right)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,v_\theta\right) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}s\,\hat{s} + s\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$$



$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial (s v_s)}{\partial s} + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{s} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial (s v_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

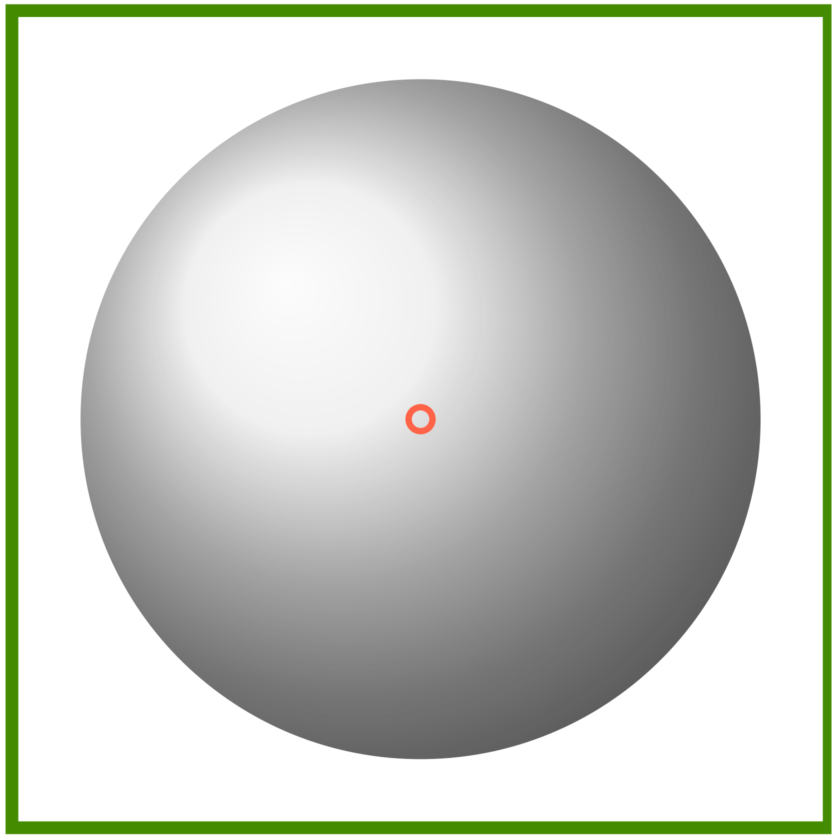
Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Propriedades

Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$



Propriedades

1. $\displaystyle\int_A V(\vec{r})\,\mathrm{d}A = 4\pi R^2 V(0)$

Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

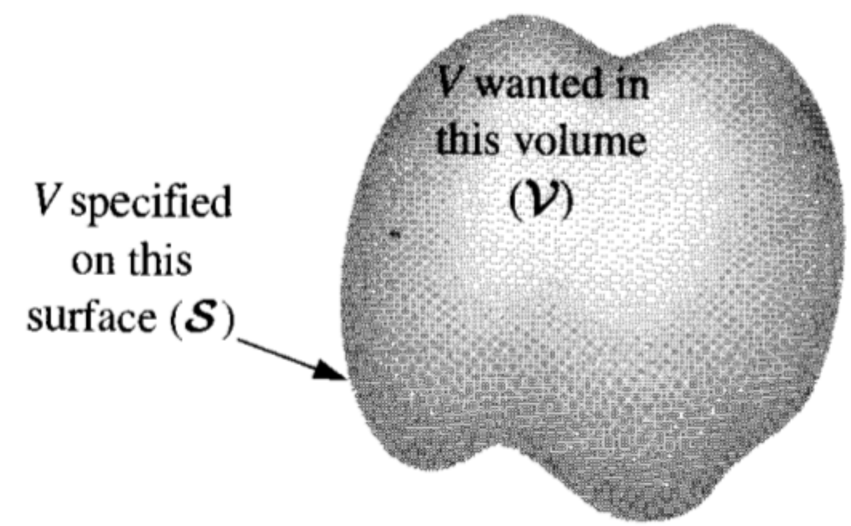


Figure 3.5

Propriedades

1. $$\int_A V(\vec{r})\, \mathrm{d}A = 4\pi R^2 V(0)$$

2. Condição de contorno: V na superfície → SUFICIENTE PARA DETERMINAR SOLUÇÃO DENTRO DA SUPERFÍCIE

Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

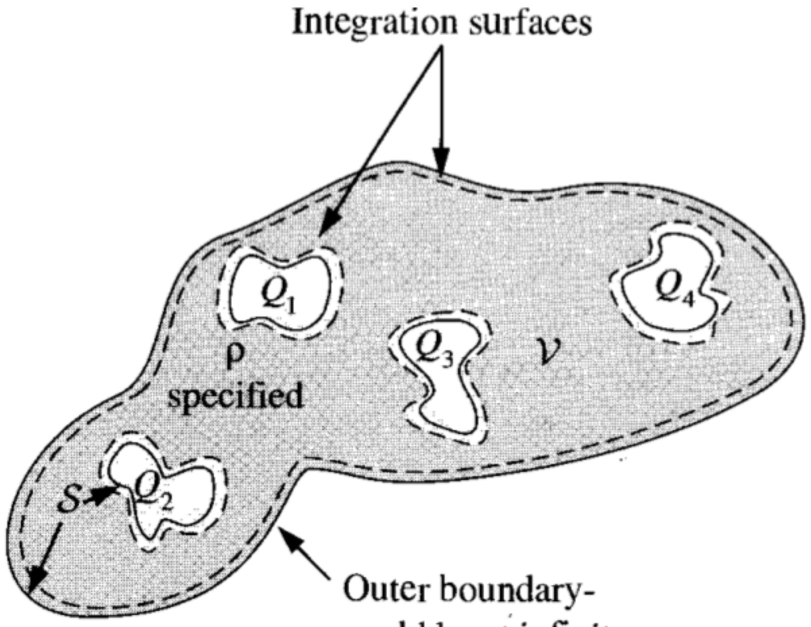


Figure 3.6

Propriedades

1. $\displaystyle\int_A V(\vec{r})\ \mathrm{d}A = 4\pi R^2 V(0)$

2. Condição de contorno: V na superfície

3. Condição de contorno para condutores:
Q em cada condutor

SUFICIENTE PARA DETERMINAR SOLUÇÃO ENTRE OS CONDUTORES

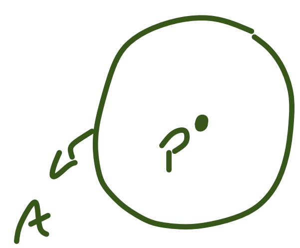
Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

1. $\int_A V(\vec{r})\, \mathrm{d}A = 4\pi R^2 V(0)$

Não tem máximo ou mínimo

SE TIVESSE MÁXIMO, POR EXEMPLO, DESENHARÍAMOS SUPERFÍCIE ESFÉRICA AO REDOR



$V(P) > V_{\text{SUPERFÍCIE}}$

$\Rightarrow \int_A V(P)\, dA > \int_A V_{\text{superfície}}\, dA$

$V(P)\, 4\pi R^2 > \int_A V_{\text{superfície}}\, dA$

CONSTANTE

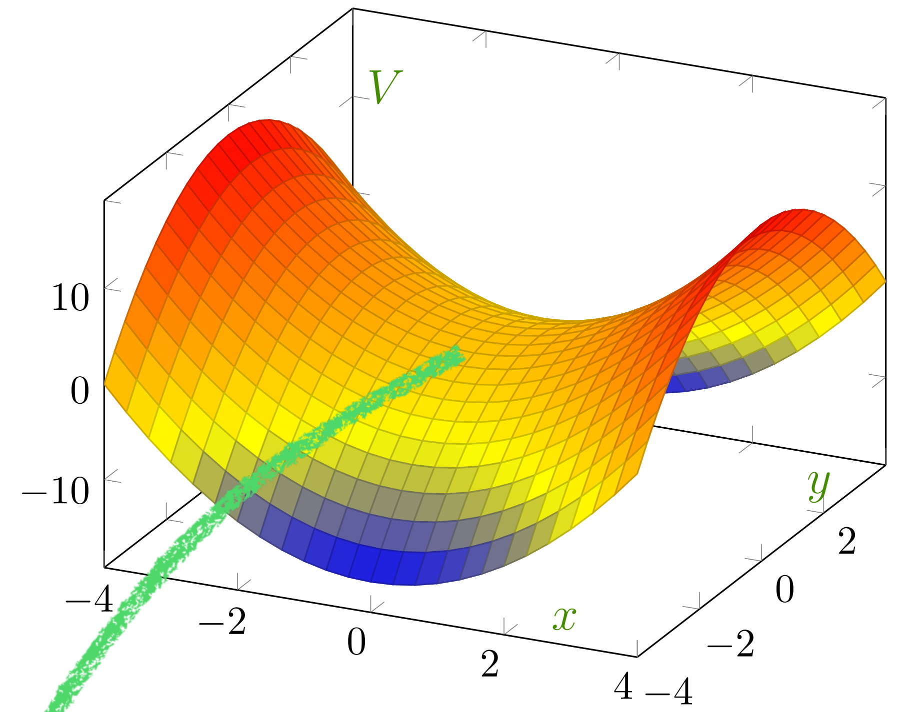
CONTRADIÇÃO

Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

1. $\int_A V(\vec{r})\,\mathrm{d}A = 4\pi R^2 V(0)$

Não tem máximo ou mínimo



PONTO DE SELA (MÁXIMO EM y MÍNIMO EM x)

2 DIMENSÕES COMO EXEMPLO

Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

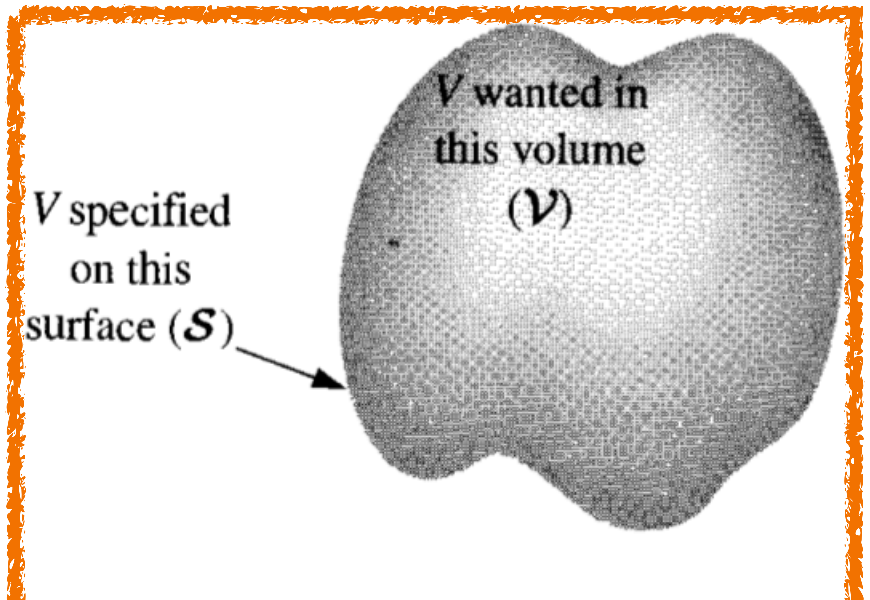


Figure 3.5

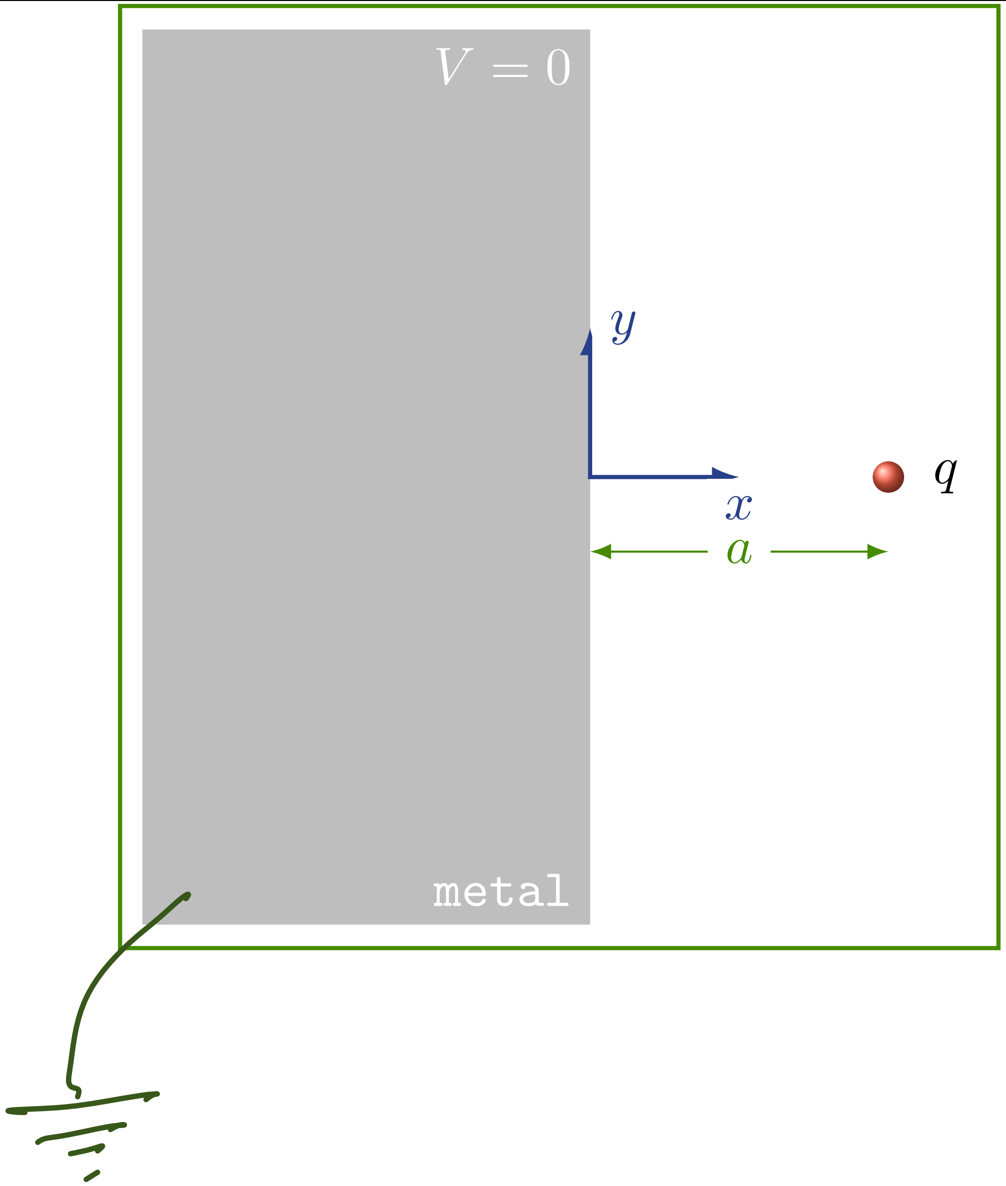
Propriedades

2. Condição de contorno: V na superfície

EXEMPLO NA PRÓXIMA TELA

Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

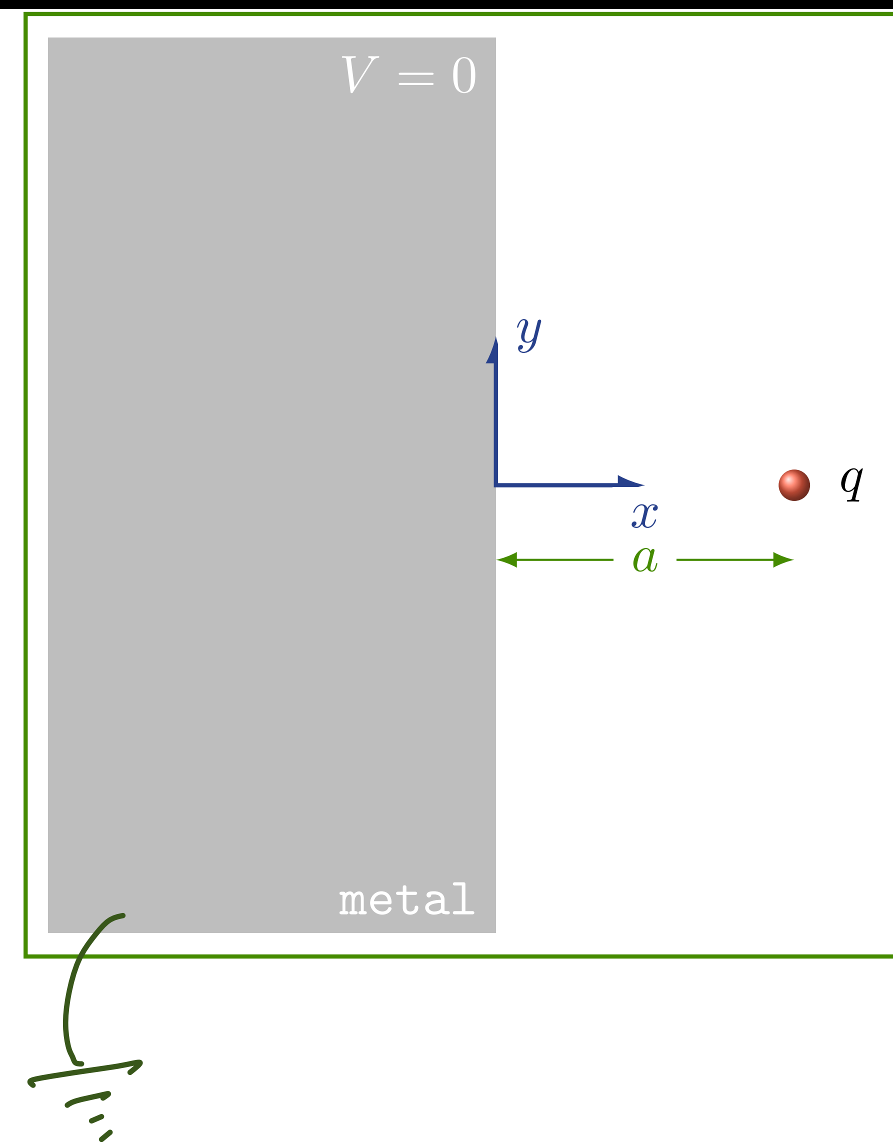


Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

Condição de contorno

$$V(0, y, z) = 0$$



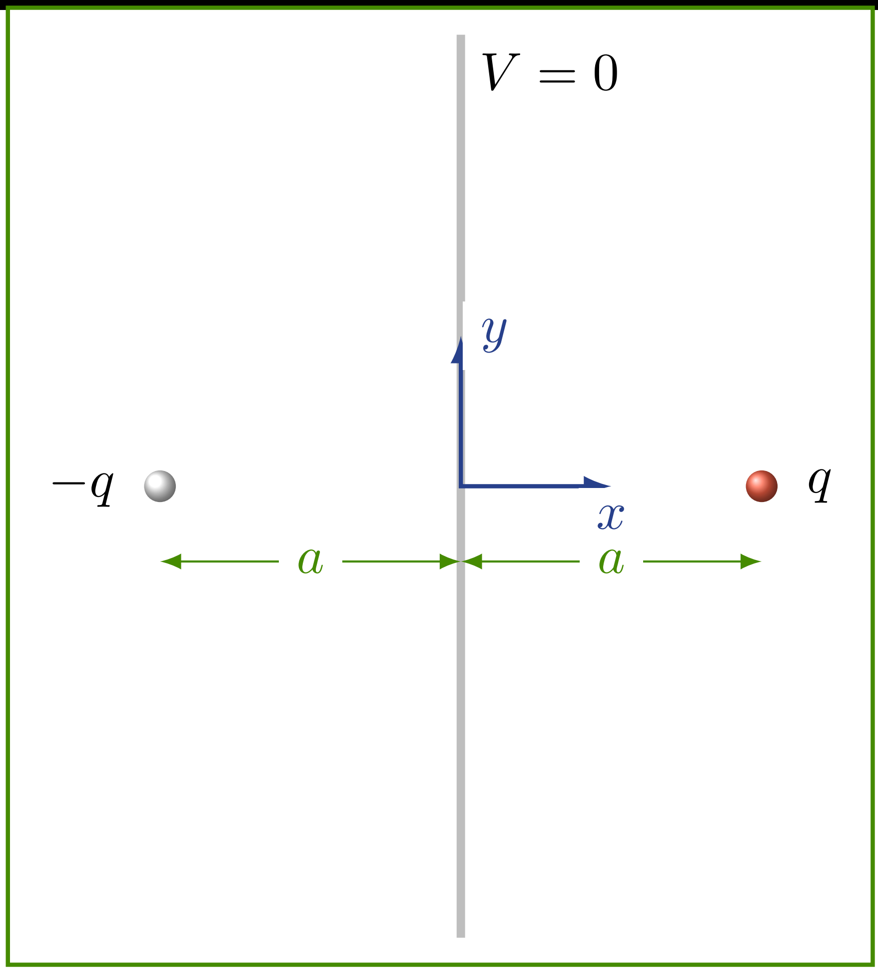
Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

Satisfaz condição de contorno

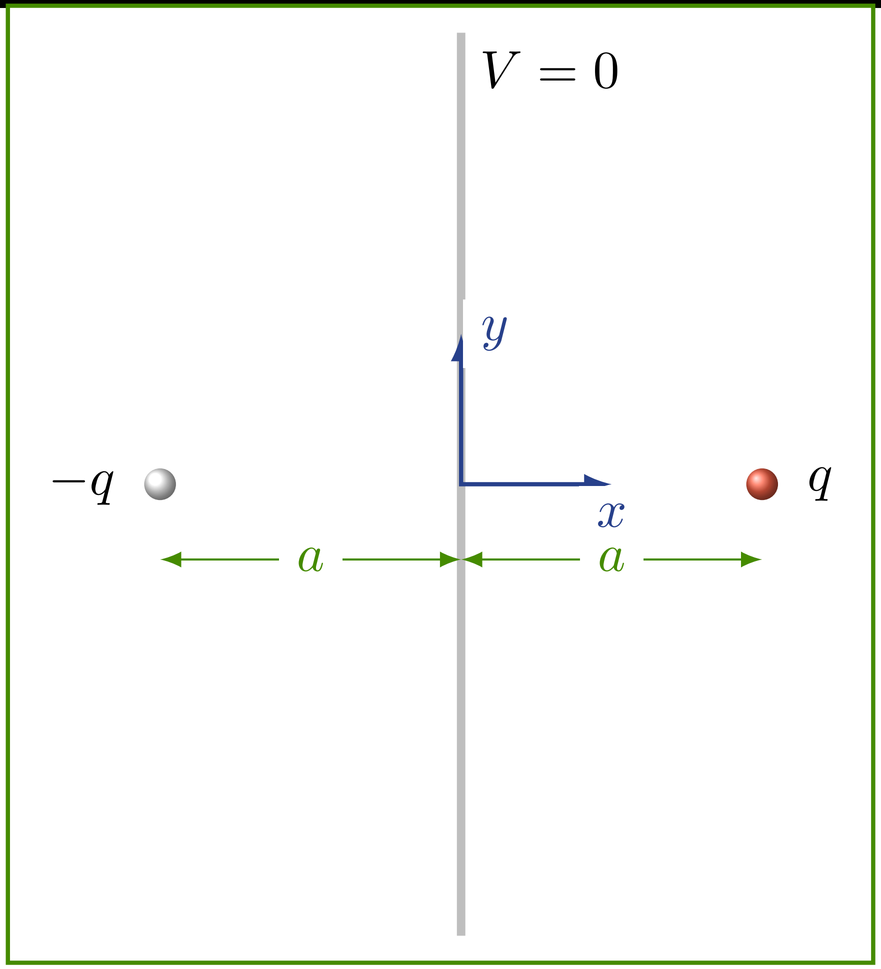
$$V(0, y, z) = 0$$

POTENCIAL
DA CARGA q
CANCELA
O DA CARGA $-q$



Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$



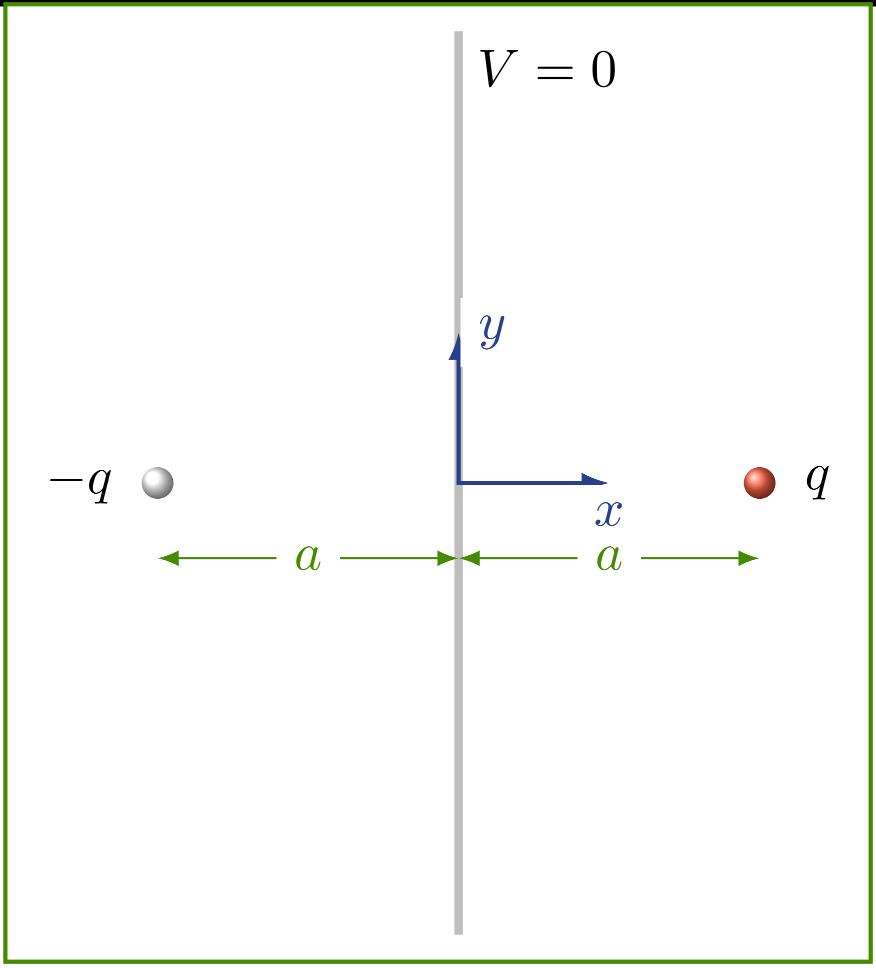
Satisfaz condição de contorno

$$V(0, y, z) = 0$$

$$V(x, y, z) = V_q(x, y, z) + V_{-q}(x, y, z) \qquad (x > 0)$$

Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$



Satisfaz condição de contorno

$$V(0, y, z) = 0$$

$$V(x, y, z) = V_q(x, y, z) + V_{-q}(x, y, z) \qquad (x > 0)$$

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}\right) \qquad (x > 0)$$

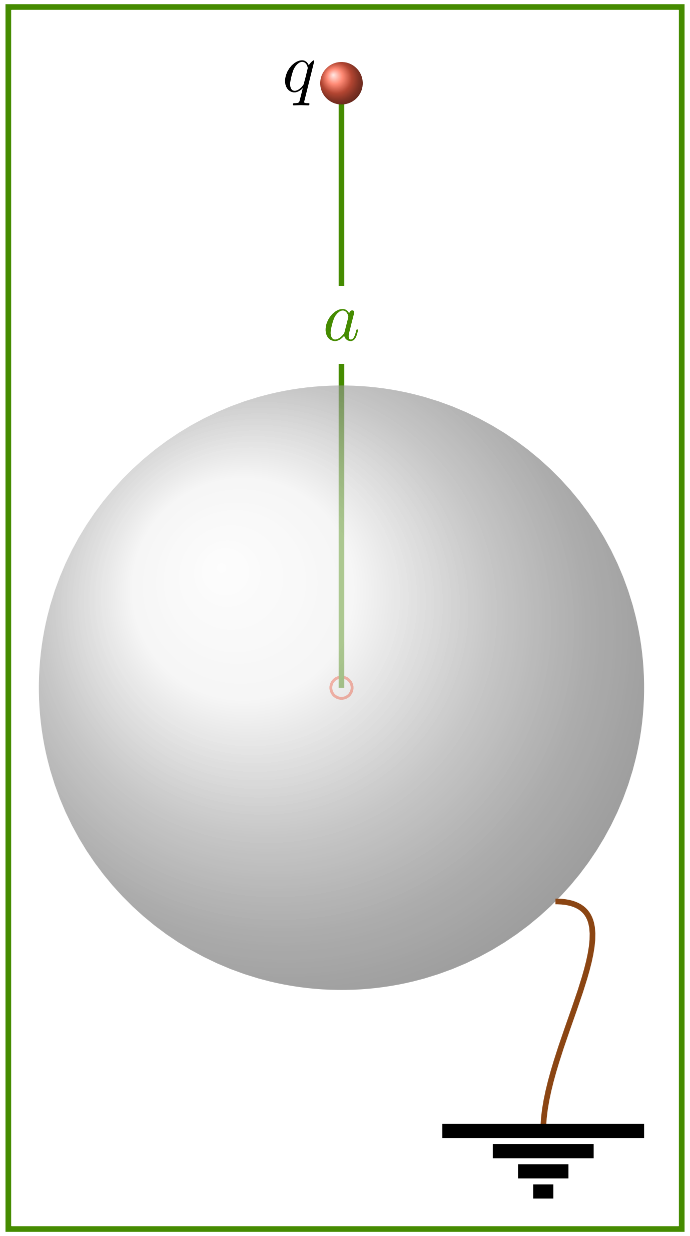
DETERMINA $\vec{E}$, CARGA SUPERFICIAL ETC..

Pratique o que aprendeu

$\nabla^2 V = 0$

Satisfaz condição de contorno

$V(R, \theta, \phi) = 0$

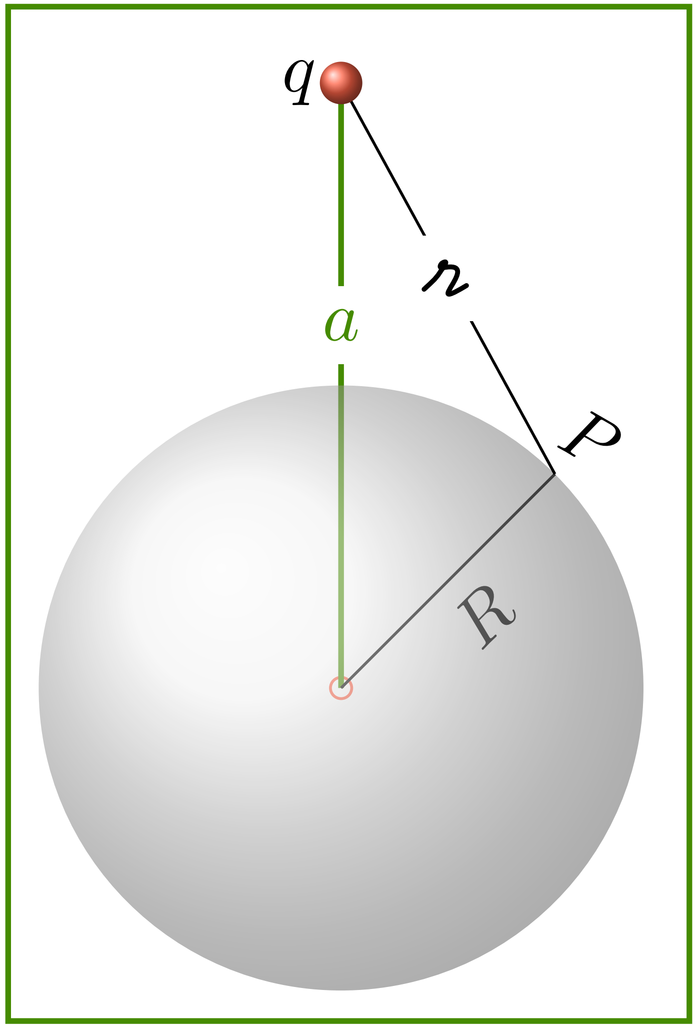


Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

Satisfaz condição de contorno

$$V(R, \theta, \phi) = 0$$

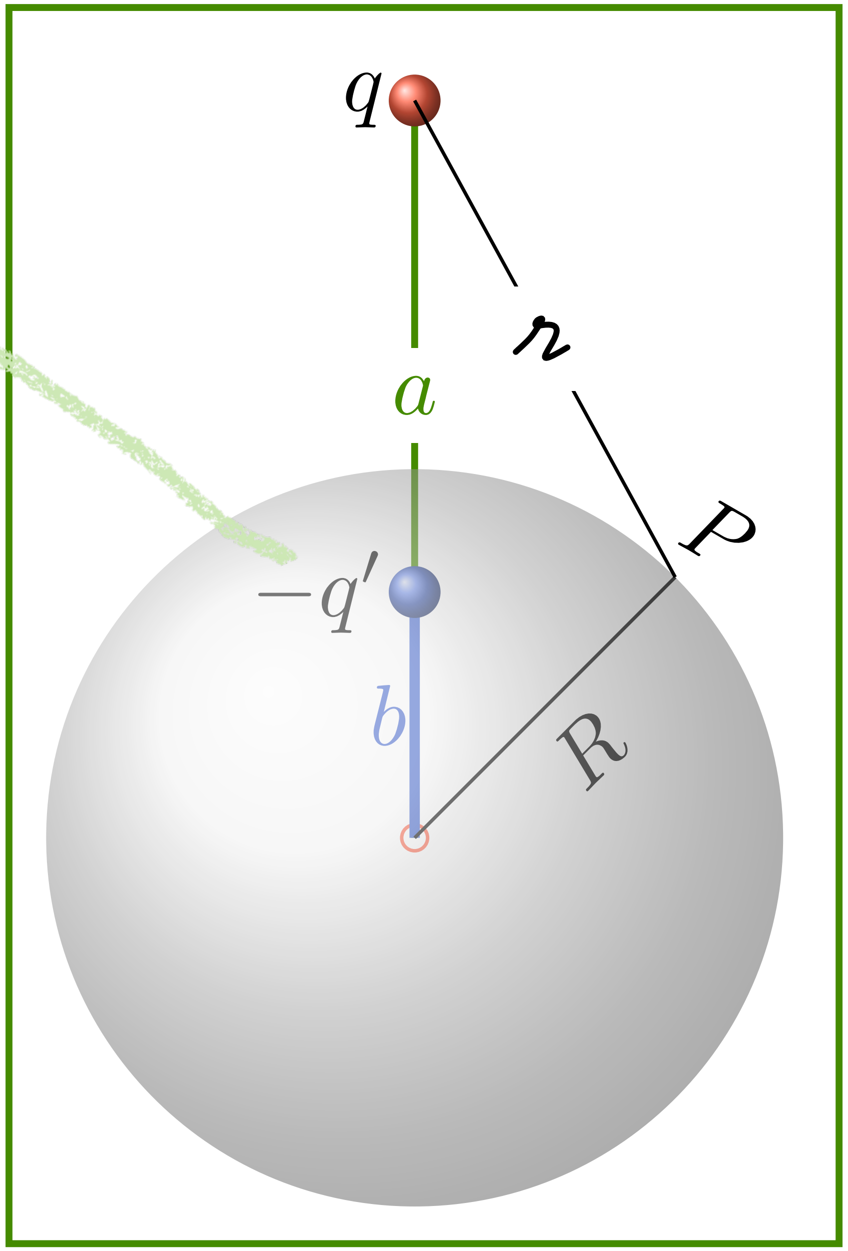


Pratique o que aprendeu

$\nabla^2 V = 0$

Satisfaz condição de contorno

$V(R, \theta, \phi) = 0$



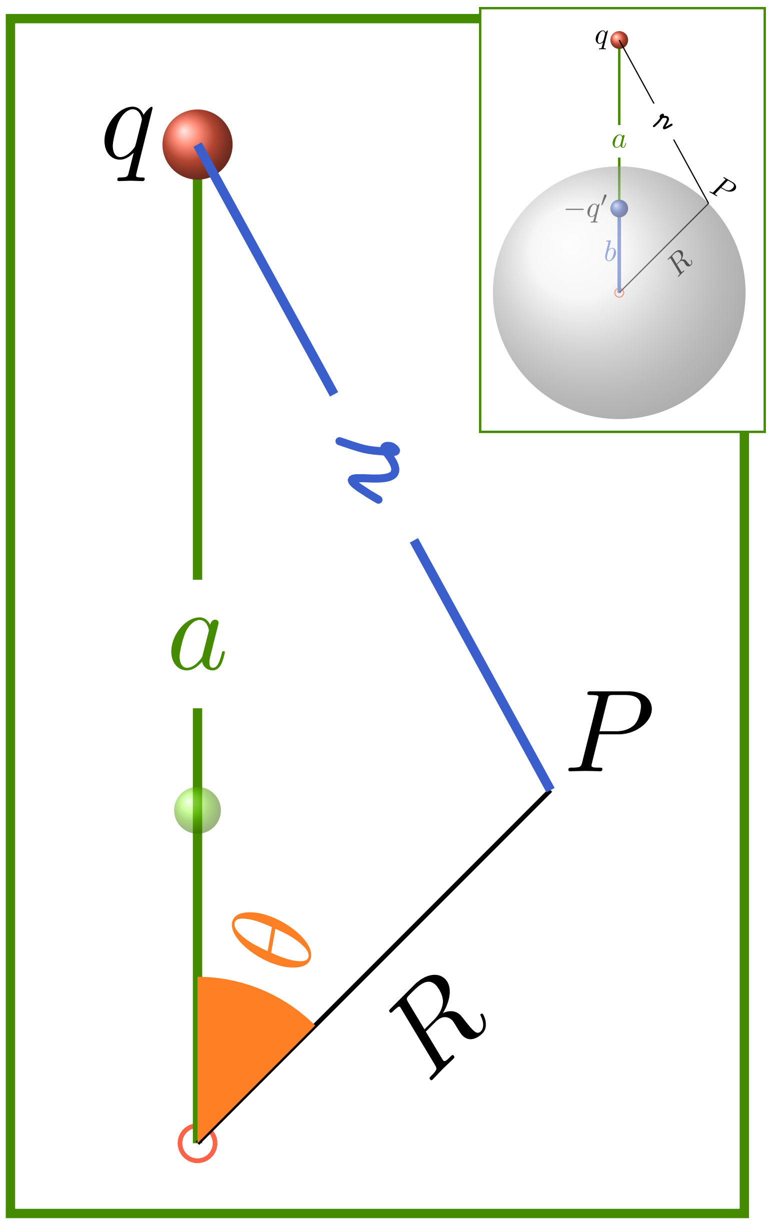
Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

Satisfaz condição de contorno

$$V(R, \theta, \phi) = 0$$

$$V_q(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}}$$



Pratique o que aprendeu

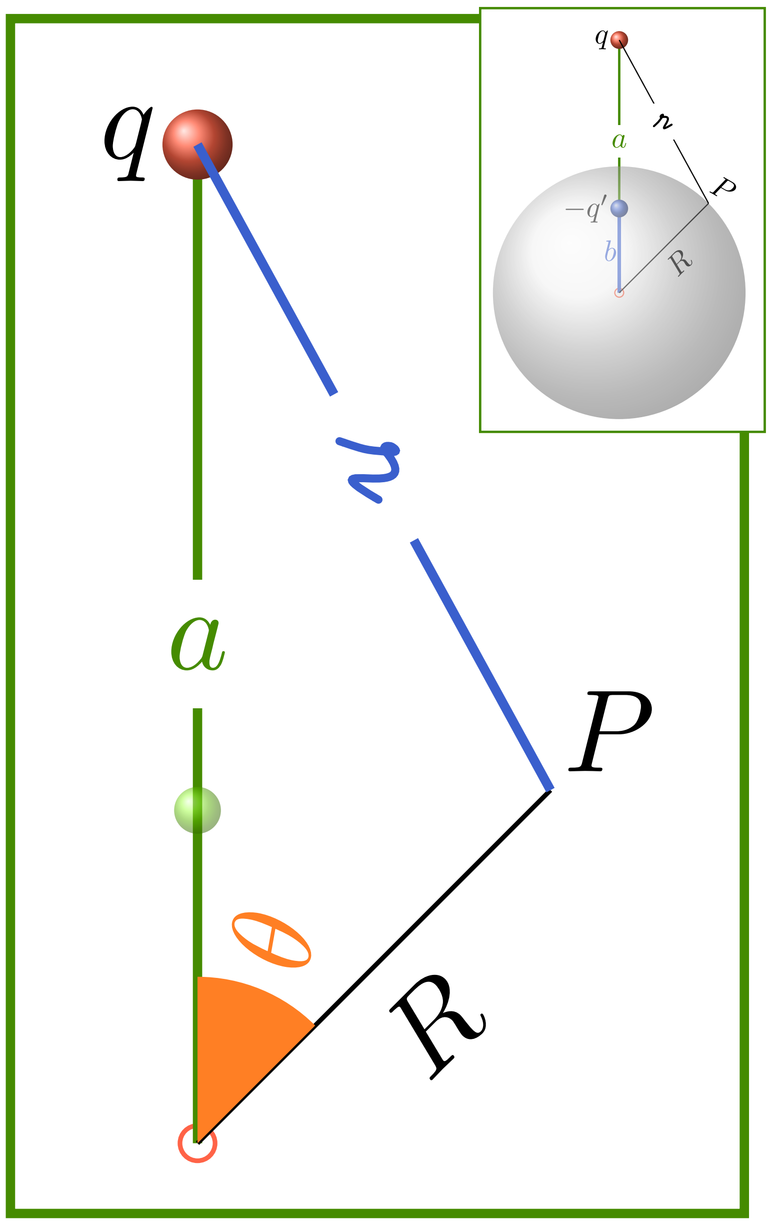
$\nabla^2 V = 0$

Satisfaz condição de contorno

$V(R, \theta, \phi) = 0$

$$V_q(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$$ → LEI DOS COSSENOS



Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

Satisfaz condição de contorno

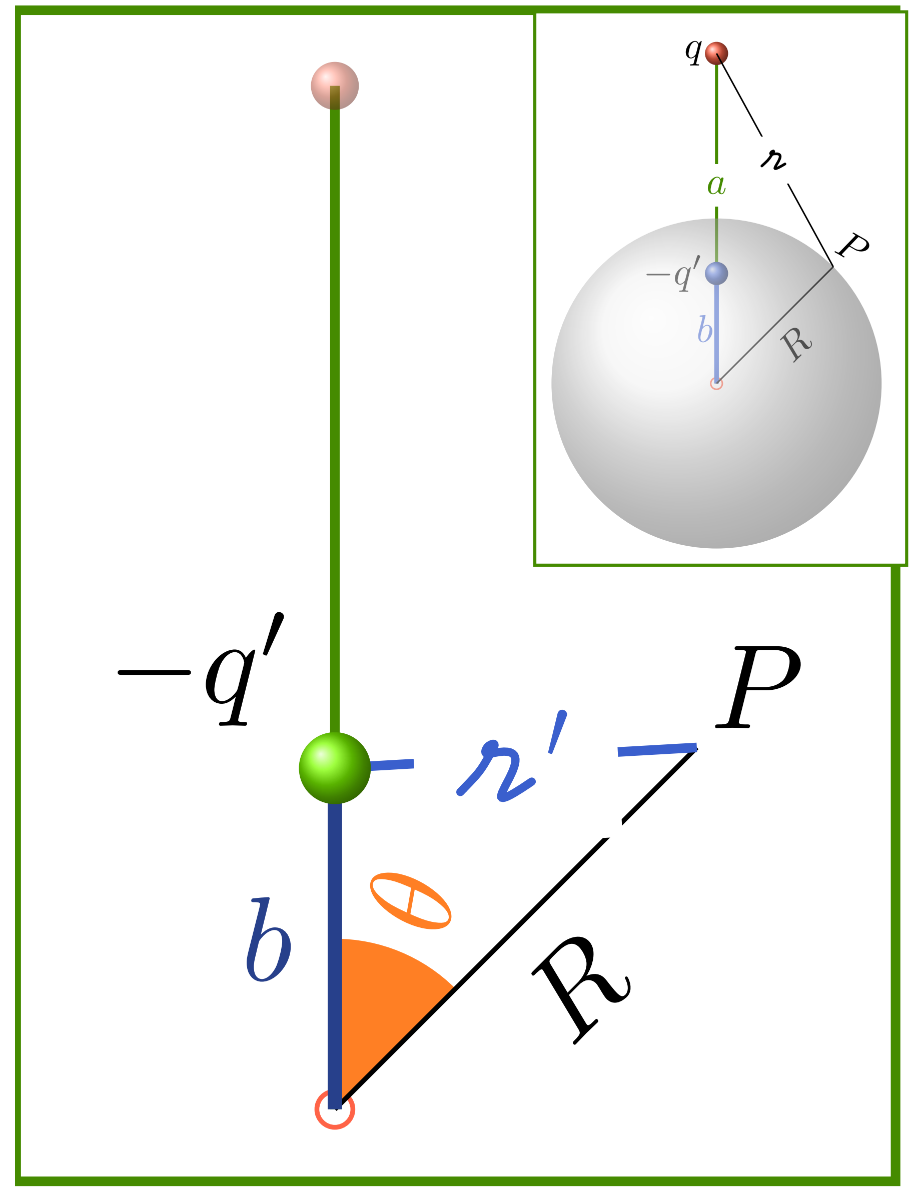
$$V(R, \theta, \phi) = 0$$

$$V_q(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$$

$$V_{-q'}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q'}{\mathscr{r}'}$$

$$\mathscr{r}' = \sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}$$



Pratique o que aprendeu

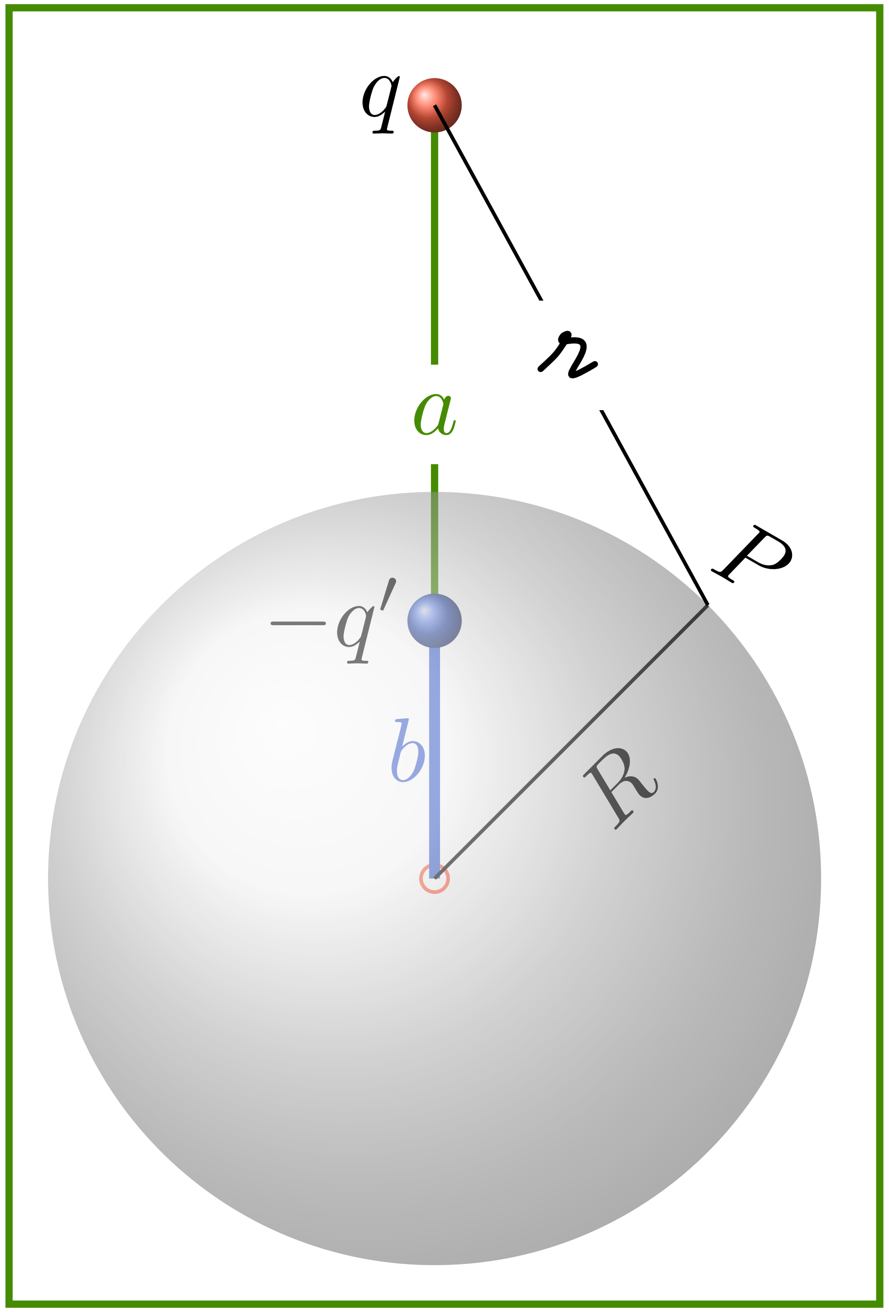
$$\nabla^2 V = 0$$

Satisfaz condição de contorno

$$V(R, \theta, \phi) = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r'} = 0$$

Soma dos potenciais



Pratique o que aprendeu

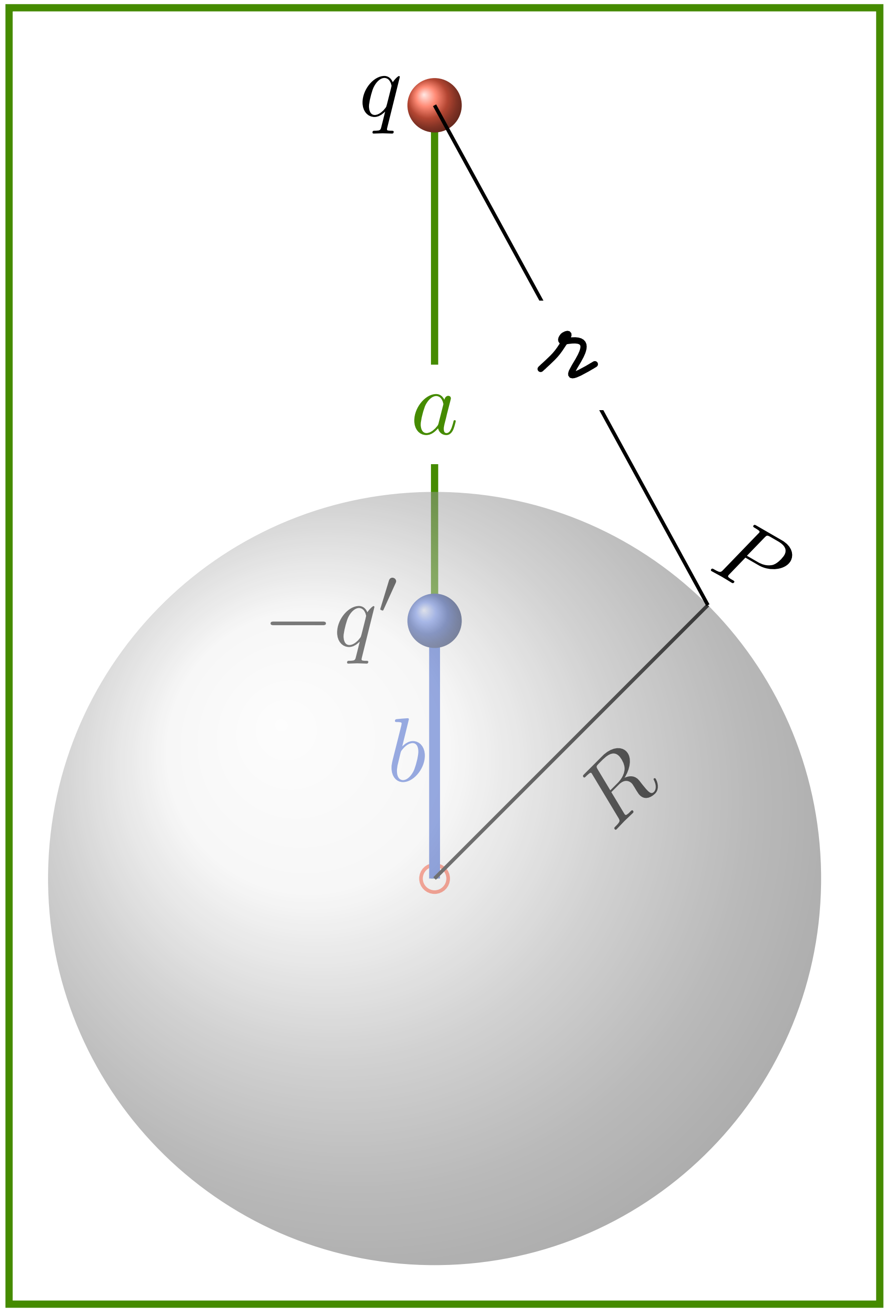
$$\nabla^2 V = 0$$

Satisfaz condição de contorno

$$V(R, \theta, \phi) = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{\mathscr{r}'} = 0$$

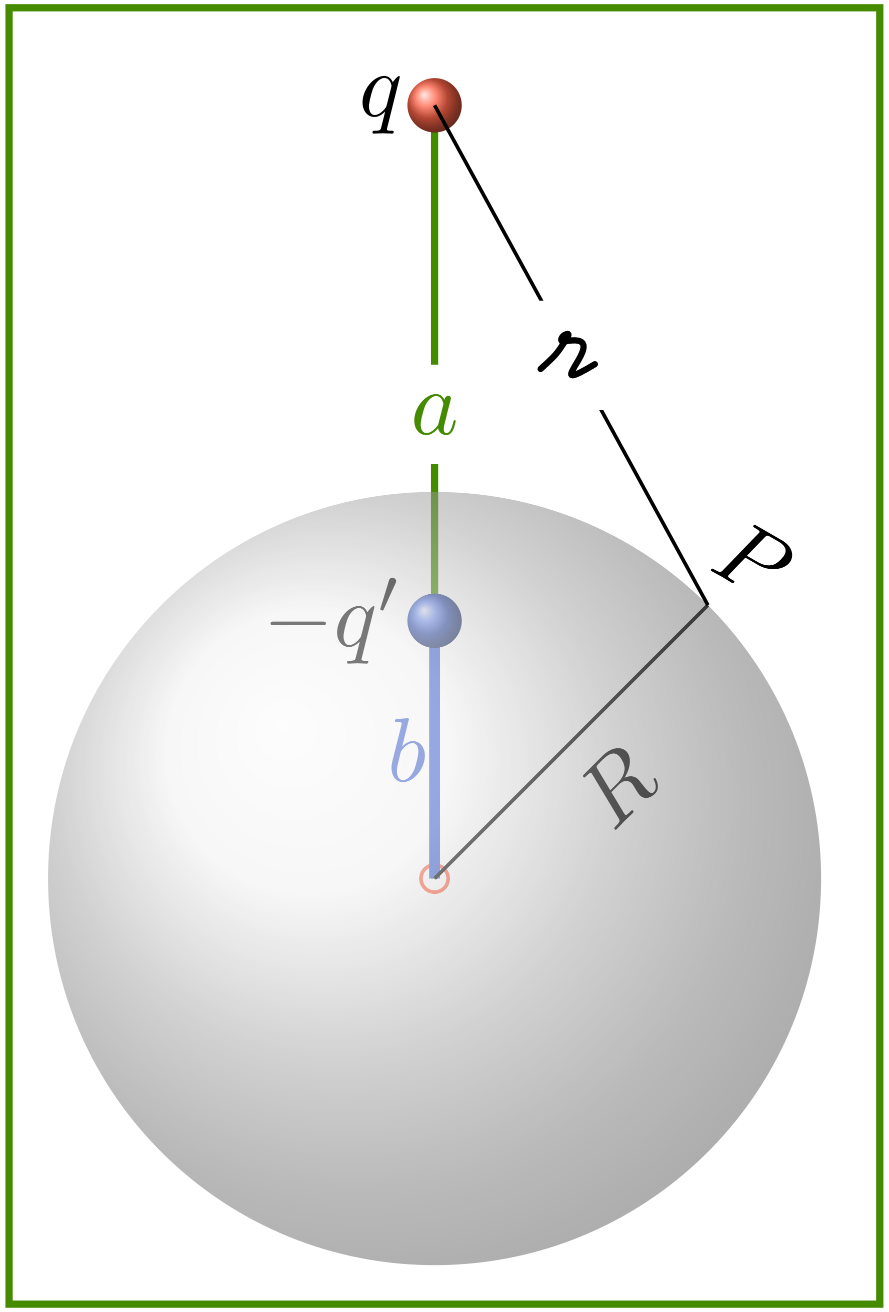
$$\Rightarrow \quad \frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$



Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

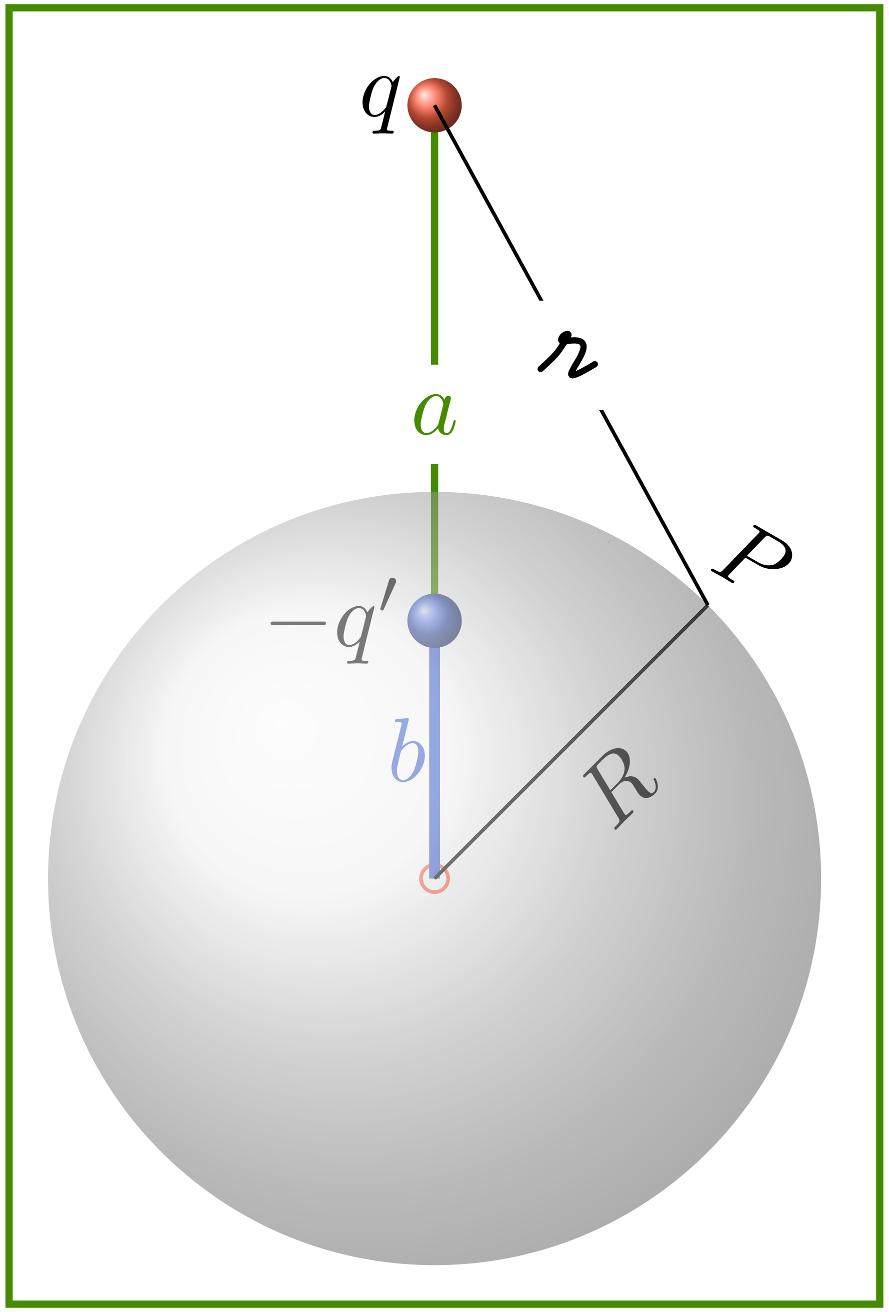


Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{q}{a - R} = \frac{q'}{R - b}$$



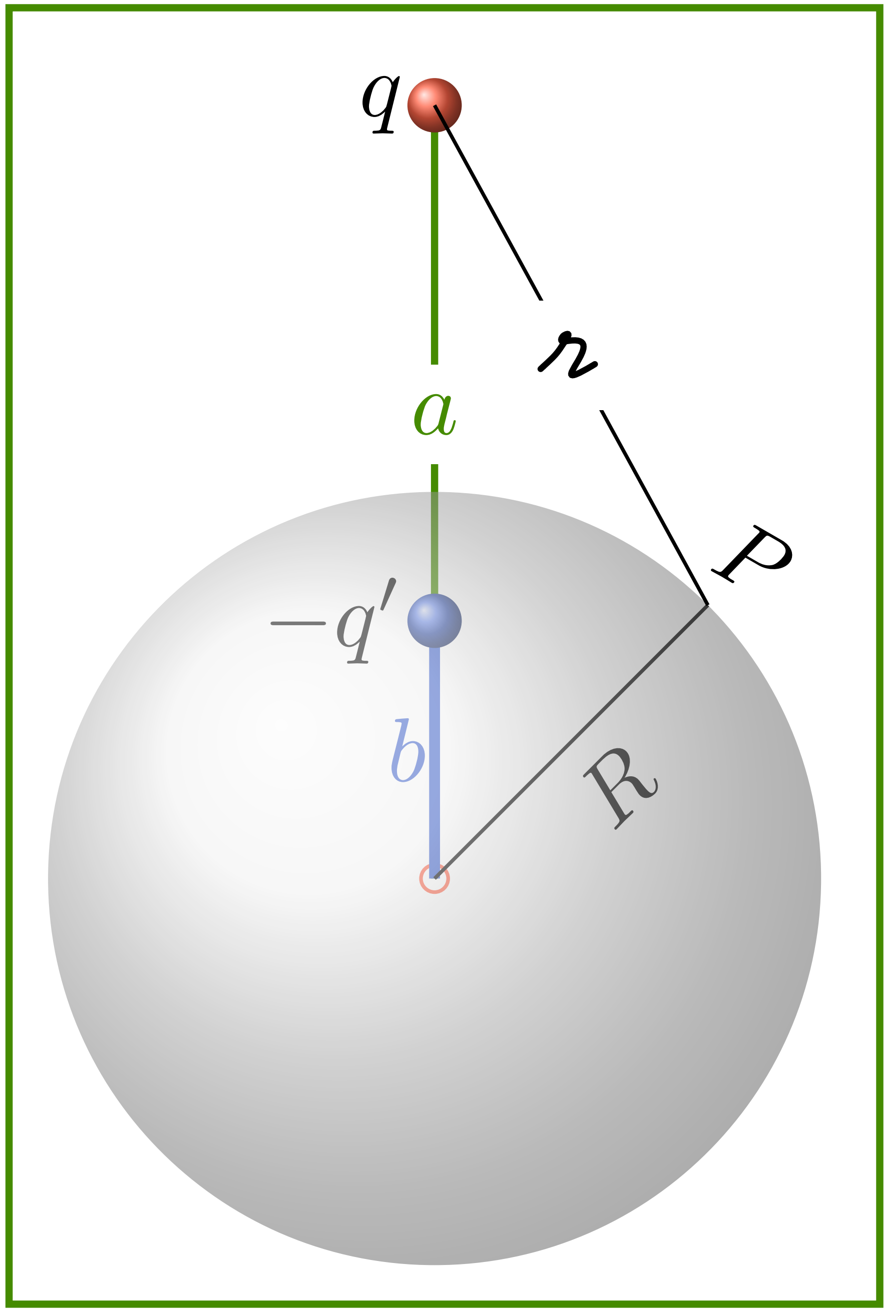
Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{q}{a - R} = \frac{q'}{R - b}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \frac{q}{a + R} = \frac{q'}{R + b}$$



Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

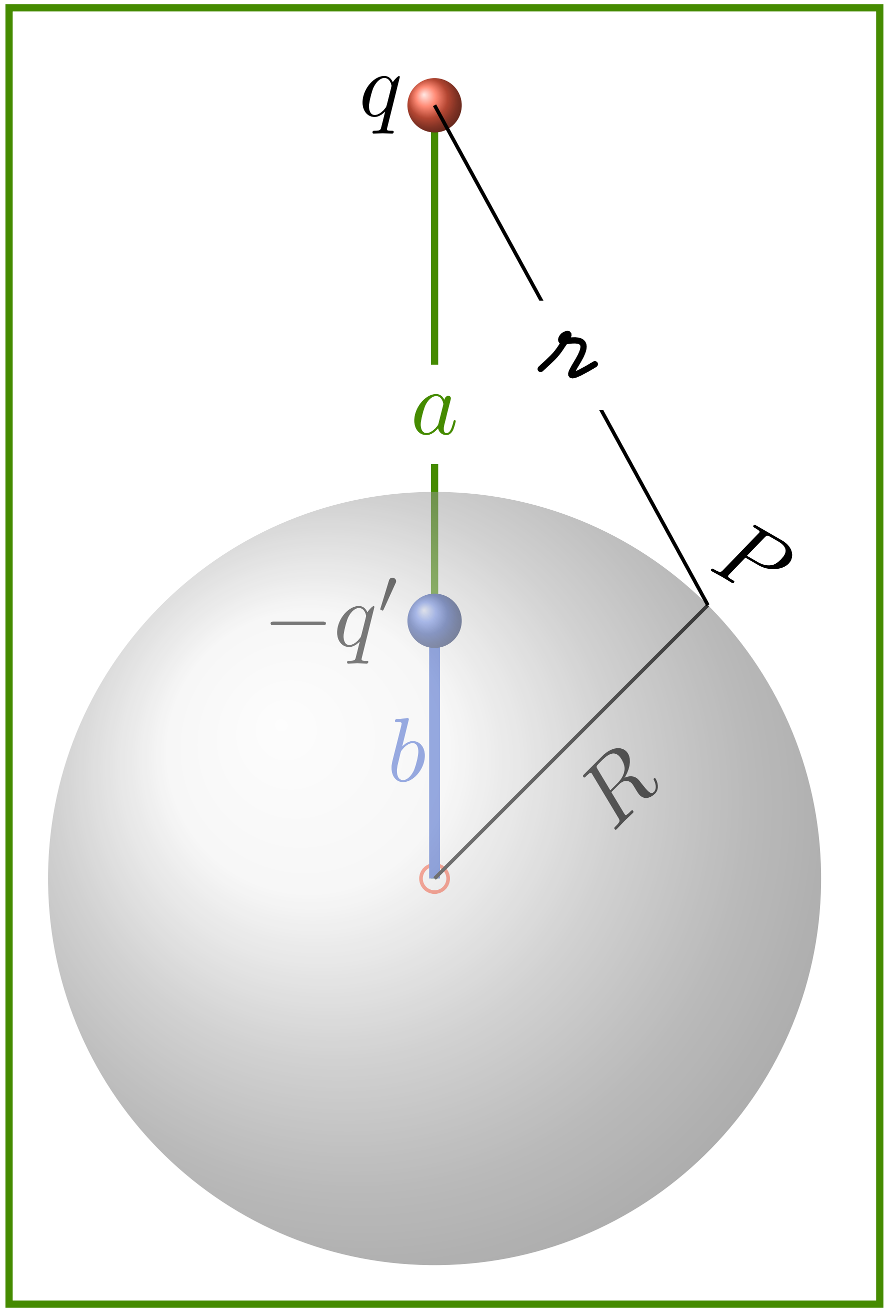
$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{q}{a-R} = \frac{q'}{R-b}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \frac{q}{a+R} = \frac{q'}{R+b}$$

DIVIDIR A DE BAIXO PELA DE CIMA

$$\frac{a-R}{a+R} = \frac{R-b}{R+b} \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{R}{b}$$

↳ ISOLAR b



Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

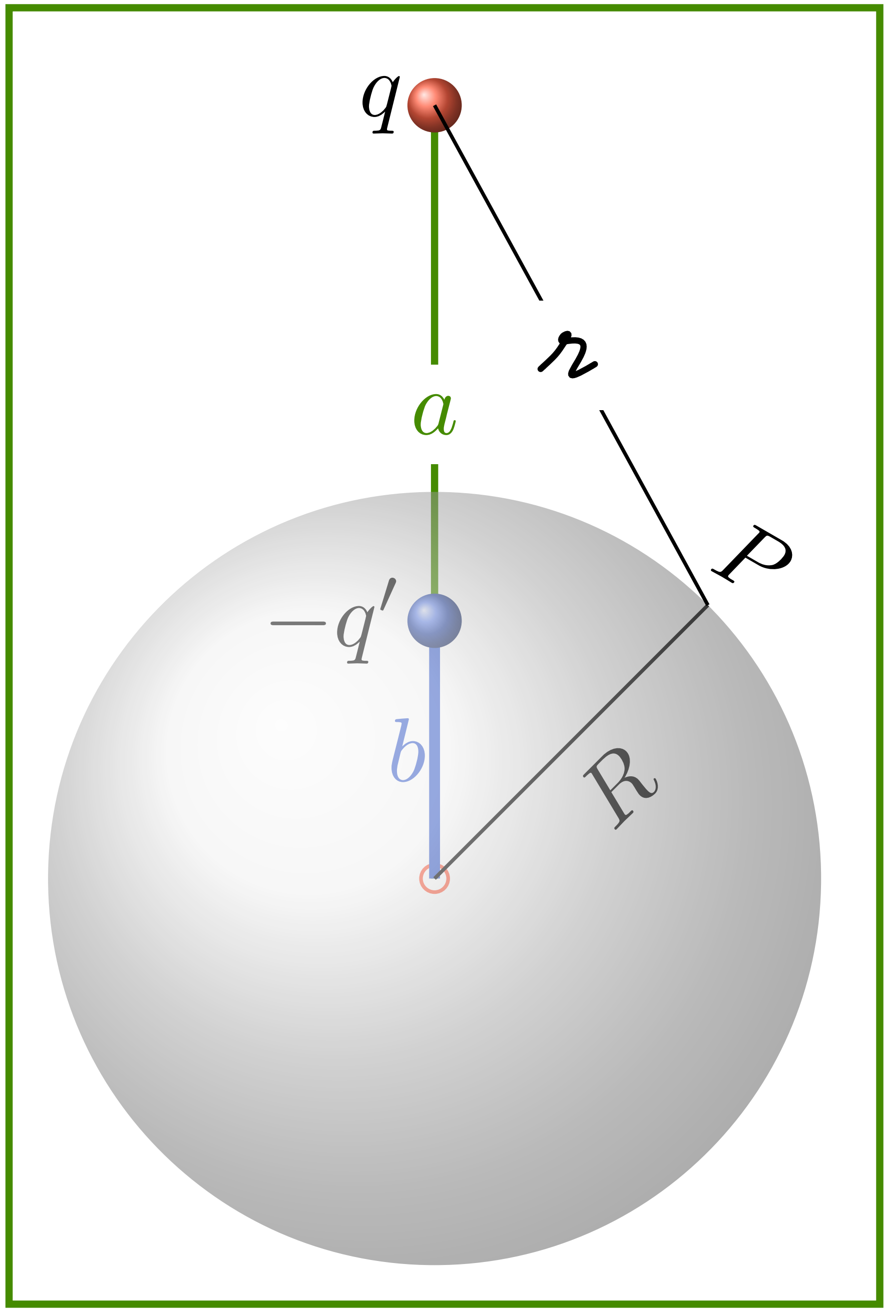
$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{q}{a - R} = \frac{q'}{R - b}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \frac{q}{a + R} = \frac{q'}{R + b}$$

$$\frac{a - R}{a + R} = \frac{R - b}{R + b}$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$



Pratique o que aprendeu

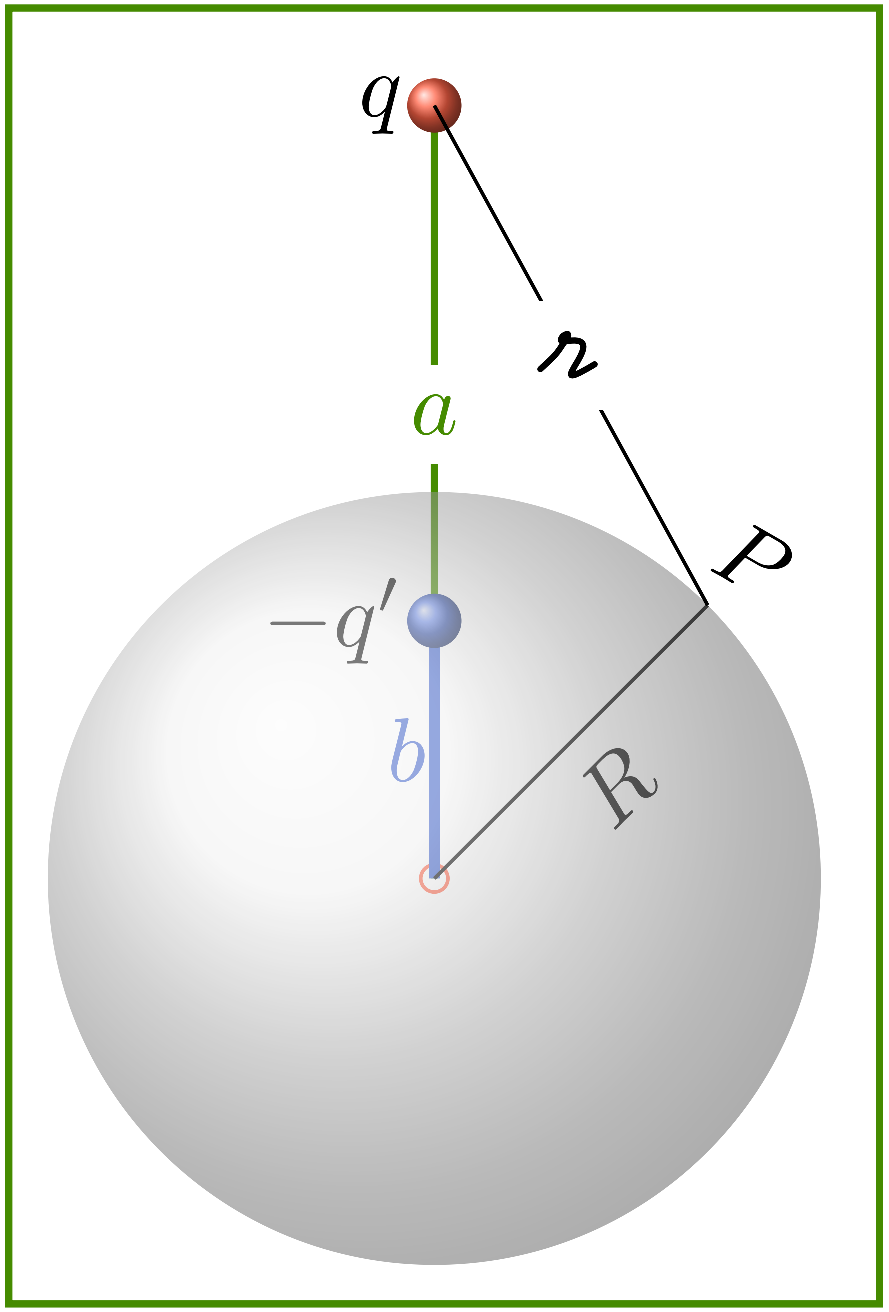
$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{q}{a - R} = \frac{q'}{R - b}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \frac{q}{a + R} = \frac{q'}{R + b}$$

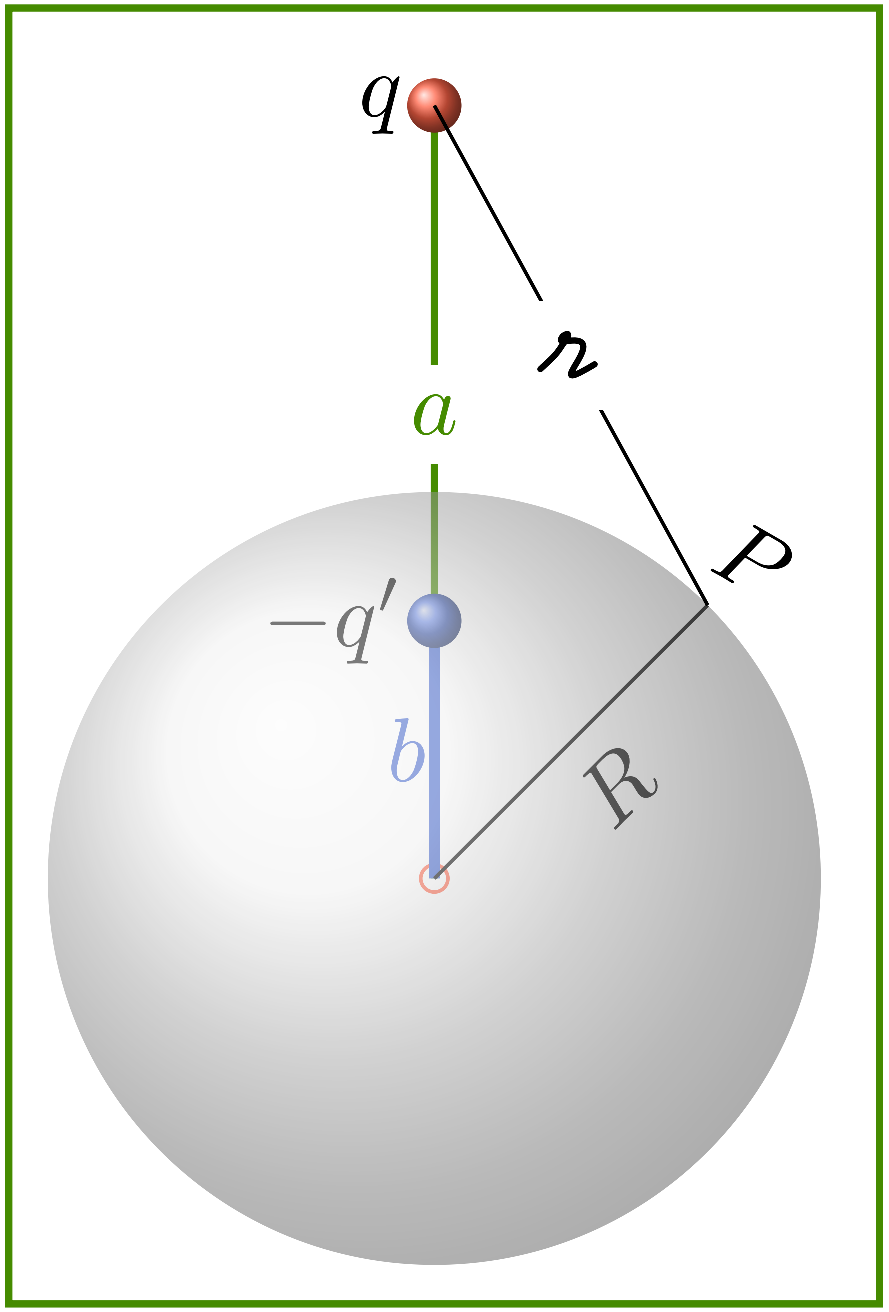
$$\frac{a - R}{a + R} = \frac{R - b}{R + b} \qquad b = \frac{R^2}{a} \qquad q' = \frac{R}{a} q$$



Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$



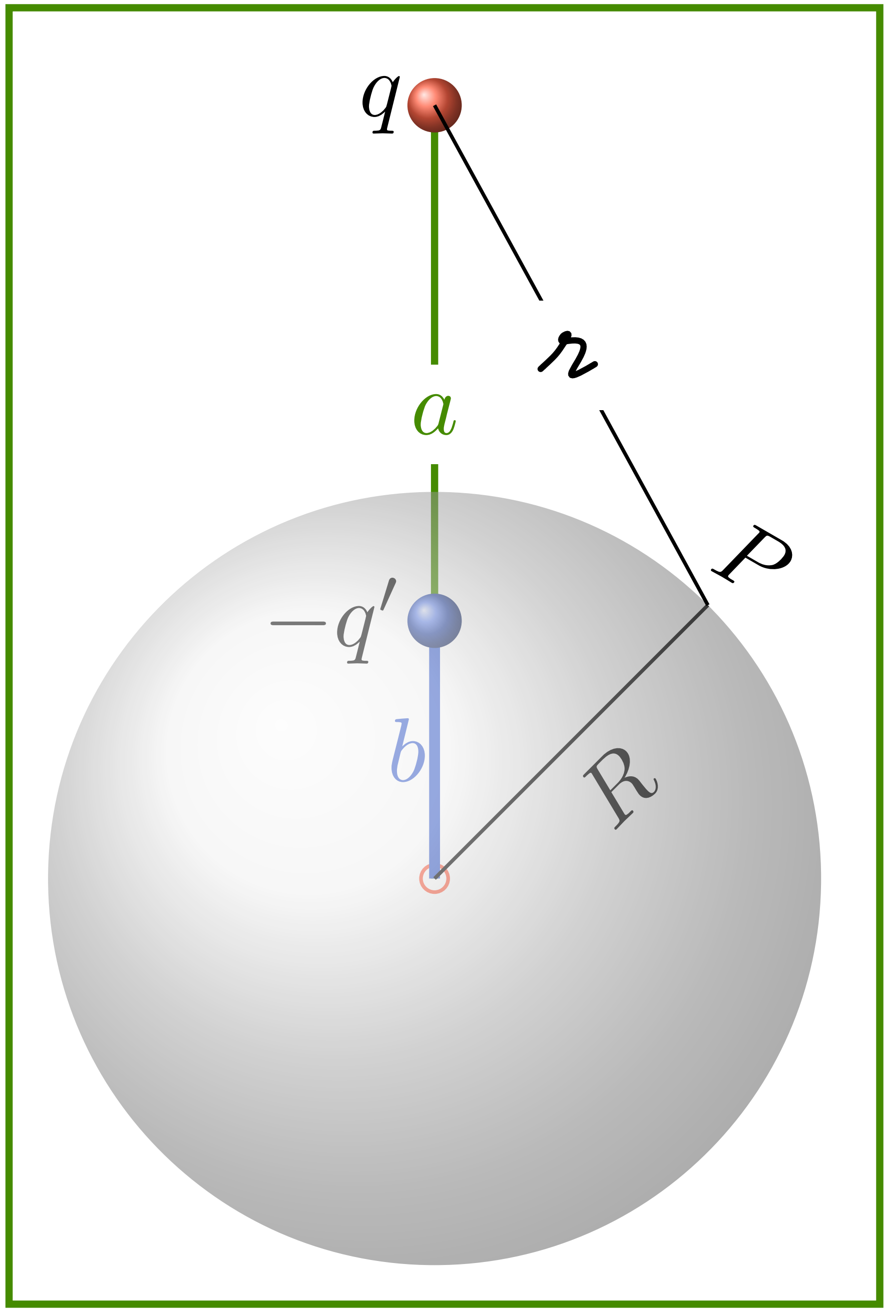
$$b = \frac{R^2}{a} \qquad q' = \frac{R}{a}q$$

Pratique o que aprendeu

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}}$$

$$b = \frac{R^2}{a} \qquad q' = \frac{R}{a}q$$

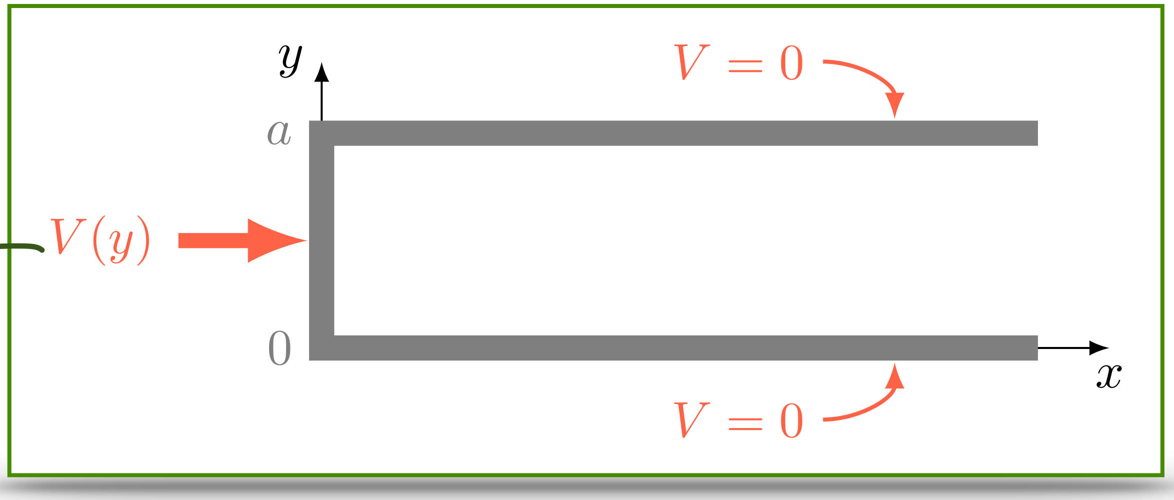


Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

Duas dimensões, por exemplo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



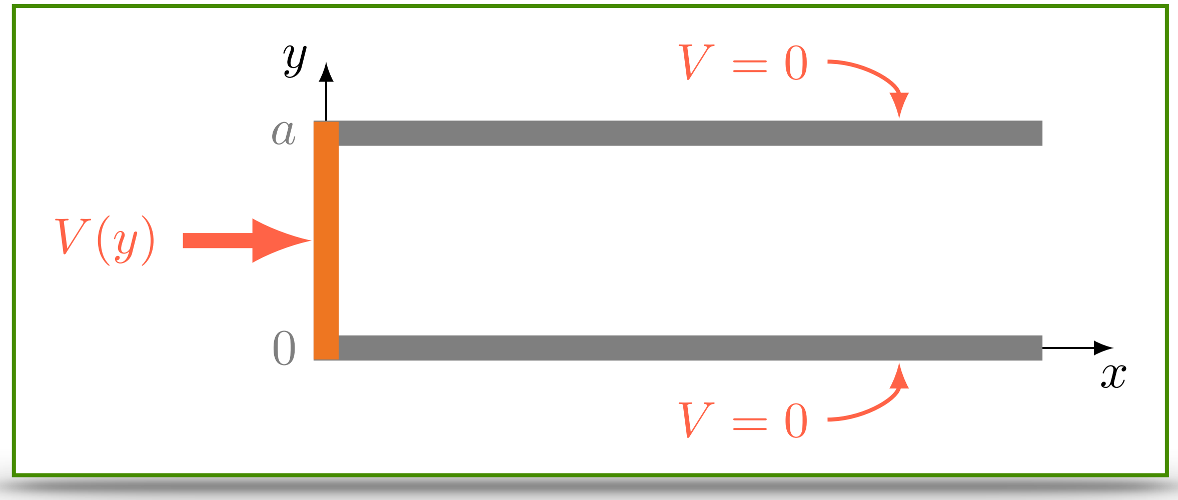
→ FUNÇÃO DADA
(CONDIÇÃO DE CONTORNO)

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

Duas dimensões, por exemplo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



$$V(x,y) = X(x)Y(y)$$

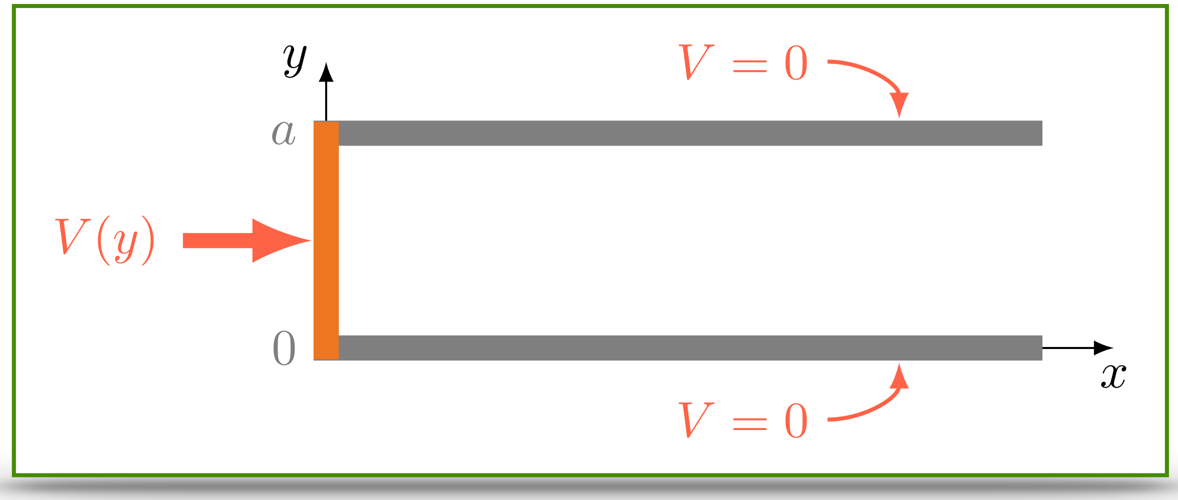
→ PERMITE SATISFAZER CONDIÇÃO DE CONTORNO EM x=0 E x→∞

→ PERMITE SATISFAZER CONDIÇÃO DE CONTORNO EM y=0 e y=a

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

Duas dimensões, por exemplo



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$V(x,y) = X(x)Y(y)$$

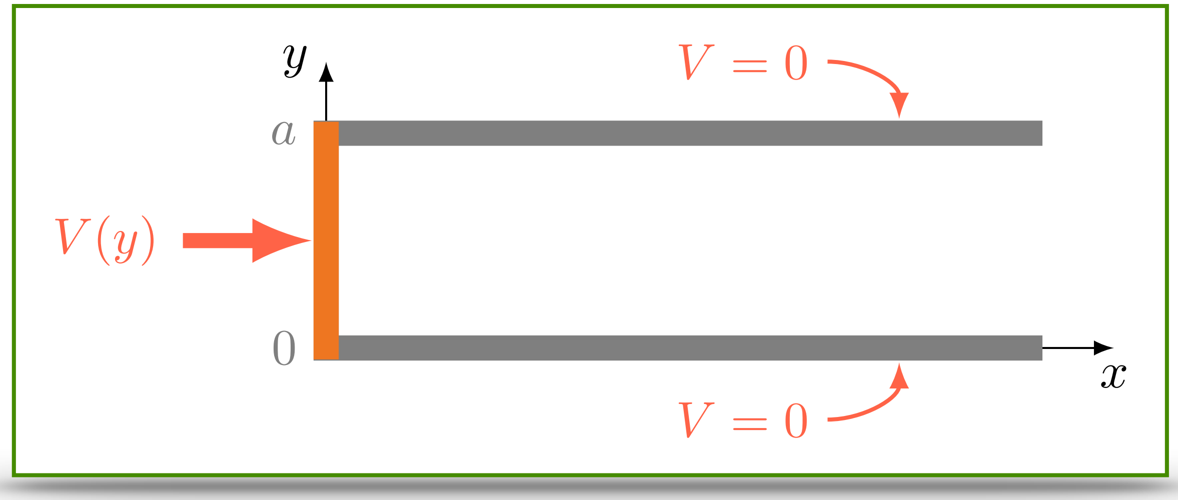
$$Y\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

→ DIVIDIR POR XY

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

Duas dimensões, por exemplo



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$V(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$Y\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

tem de ser constante — tem de ser constante

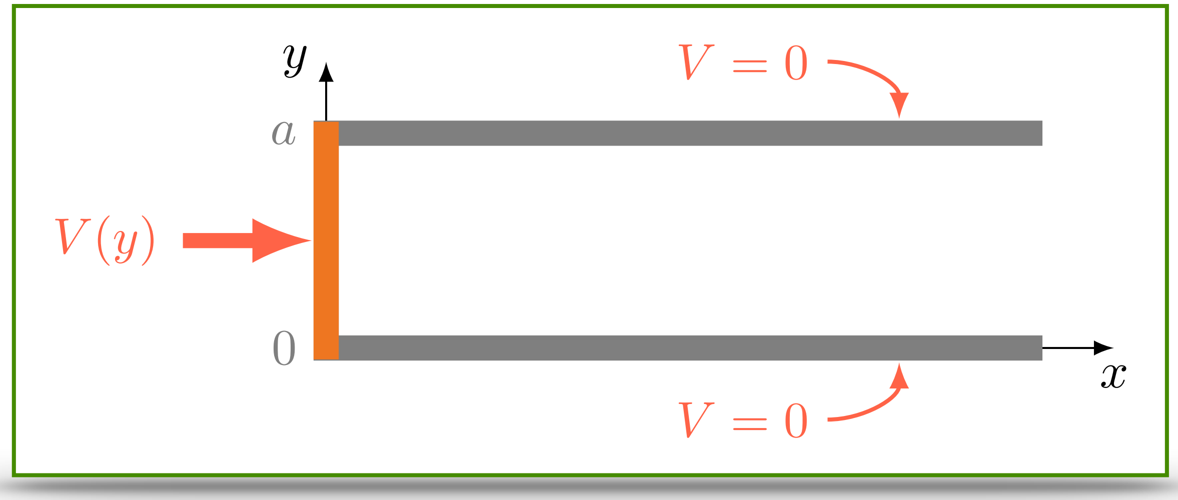
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{X}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \\[2em] \dfrac{1}{Y}\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \end{array} \right.$$

↳ CONVENIENTE, PORQUE É >0 COMO VEREMOS

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

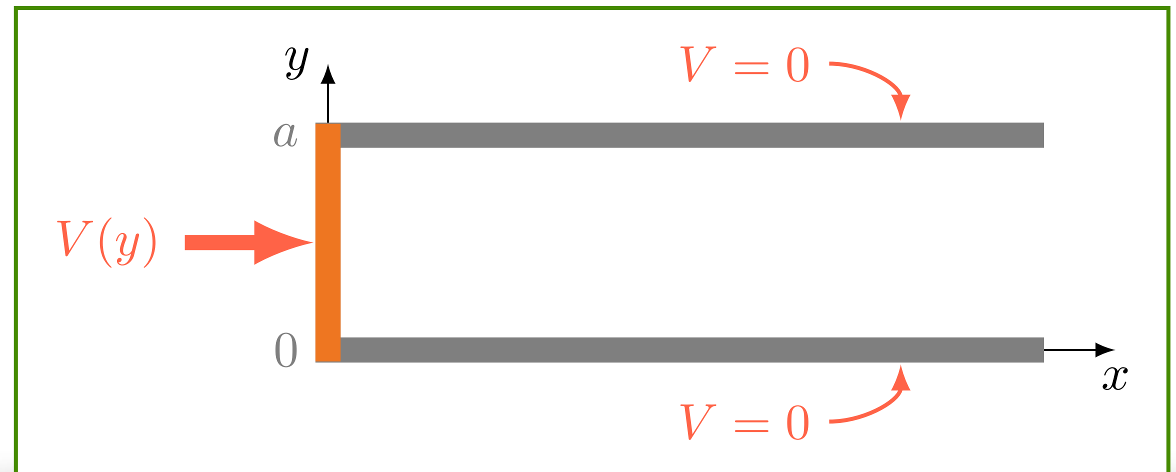
$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \\ \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \end{cases}$$



Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = k^2 \\[2em] \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 \end{cases}$$



$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky)$$

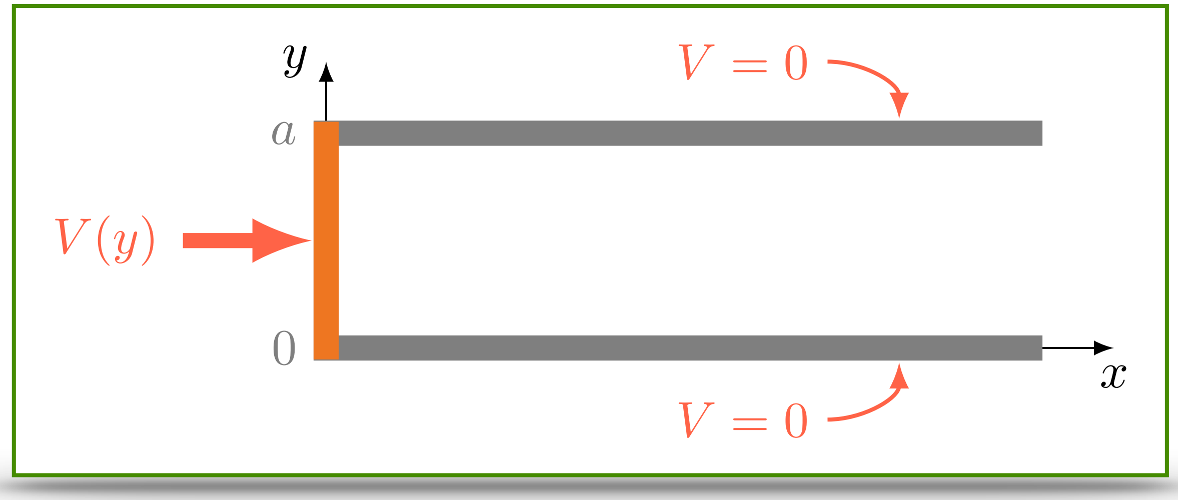
EQ. DO OSCILADOR HARMÔNICO

↳ PODERIA SER $Ce^{iky} + De^{-iky}$, MAS SENO E COSSENO SÃO MAIS CONVENIENTES, PQ CONDIÇÕES DE CONTORNO SÃO REAIS

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \end{cases}$$



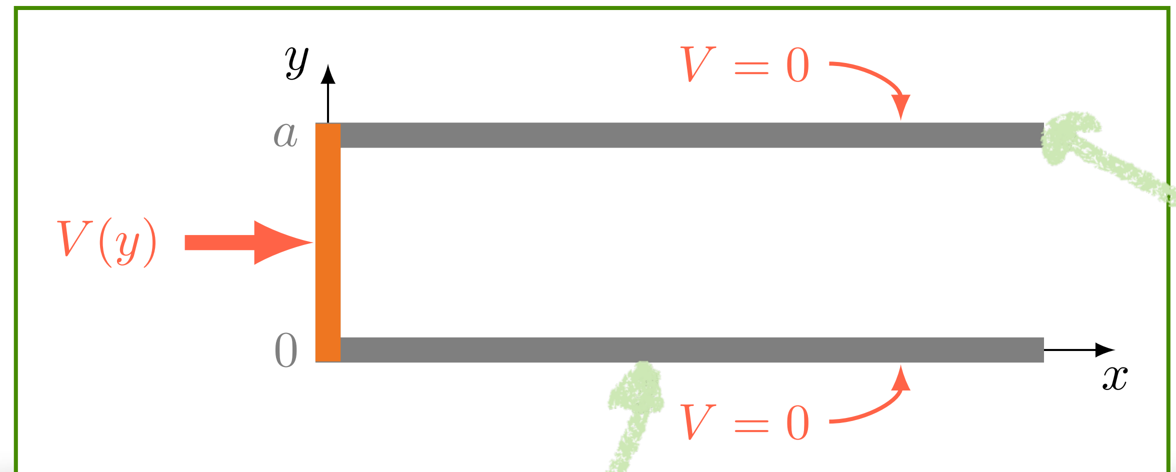
$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + k^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - k^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\exp(kx) + B\exp(-kx)$$

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \end{cases}$$



$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + k^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky)$$

$$D = 0$$

TEM DE SER 0 PARA $y=0$

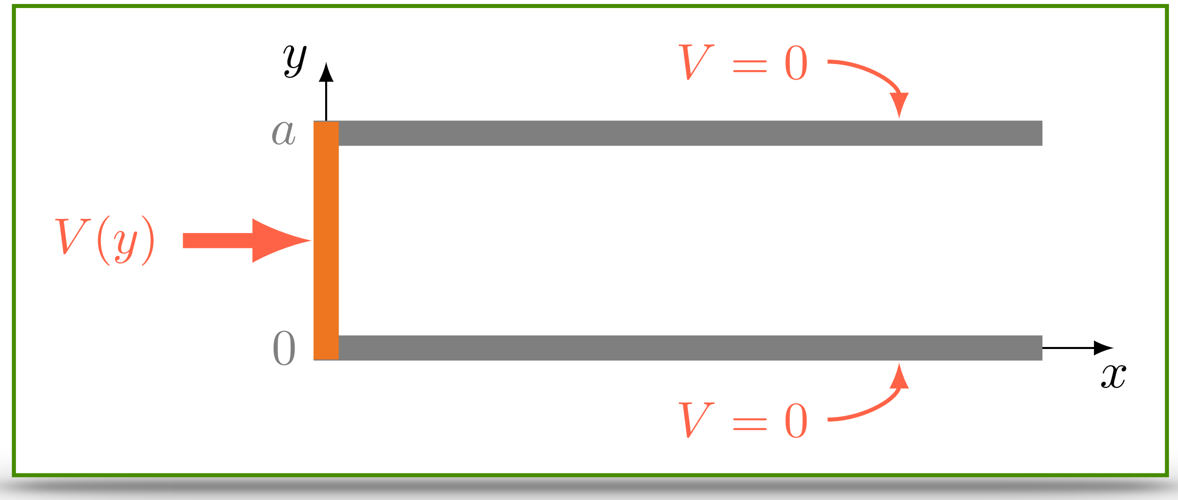
$$ka = n\pi \quad \Rightarrow \quad Y_n(y) = C\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)$$

TEM DE SER 0 PARA $y=a$

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \\[2em] \dfrac{1}{Y}\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \end{cases}$$



$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - k^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\exp(kx) + B\exp(-kx)$$

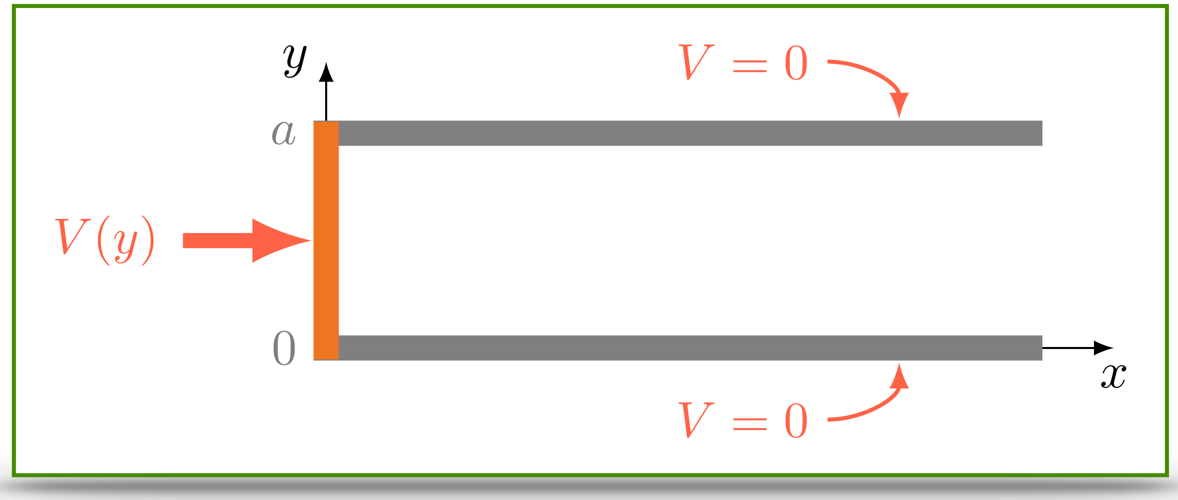
$A = 0$ → TEM DE SER 0 PARA $x \to \infty$

$$X_n(x) = B\exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Equação de Laplace
Separação de variáveis

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \\ \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \end{cases}$$



$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - k^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\exp(kx) + B\exp(-kx)$$

$$A = 0$$

PRODUTO DE B COM C, GERA CONSTANTE DESCONHECIDA

$$X_n(x) = B\exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad V(x,y) = V_n \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$