Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais – Aplicações de Derivadas

Disciplina: Cálculo I LOB1003
Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL/USP

Sabemos que se *y* = *f* (*x*), então a derivada *dy*/*dx* pode ser interpretada como a taxa de variação de *y* em relação a *x*. Nesta tópico analisaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.6, que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se *x* variar de *x*1 a *x*2, então a variação em *x* será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em *y* será,

$$\Delta y = (f x_2) - (f x_1)$$

O quociente da diferença,

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{(f x_2) - (f x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a **taxa média de variação de *y* em relação a *x*** sobre o intervalo [x_1, x_2] e pode ser interpretada como a inclinação da reta secante *PQ* na Figura 1.

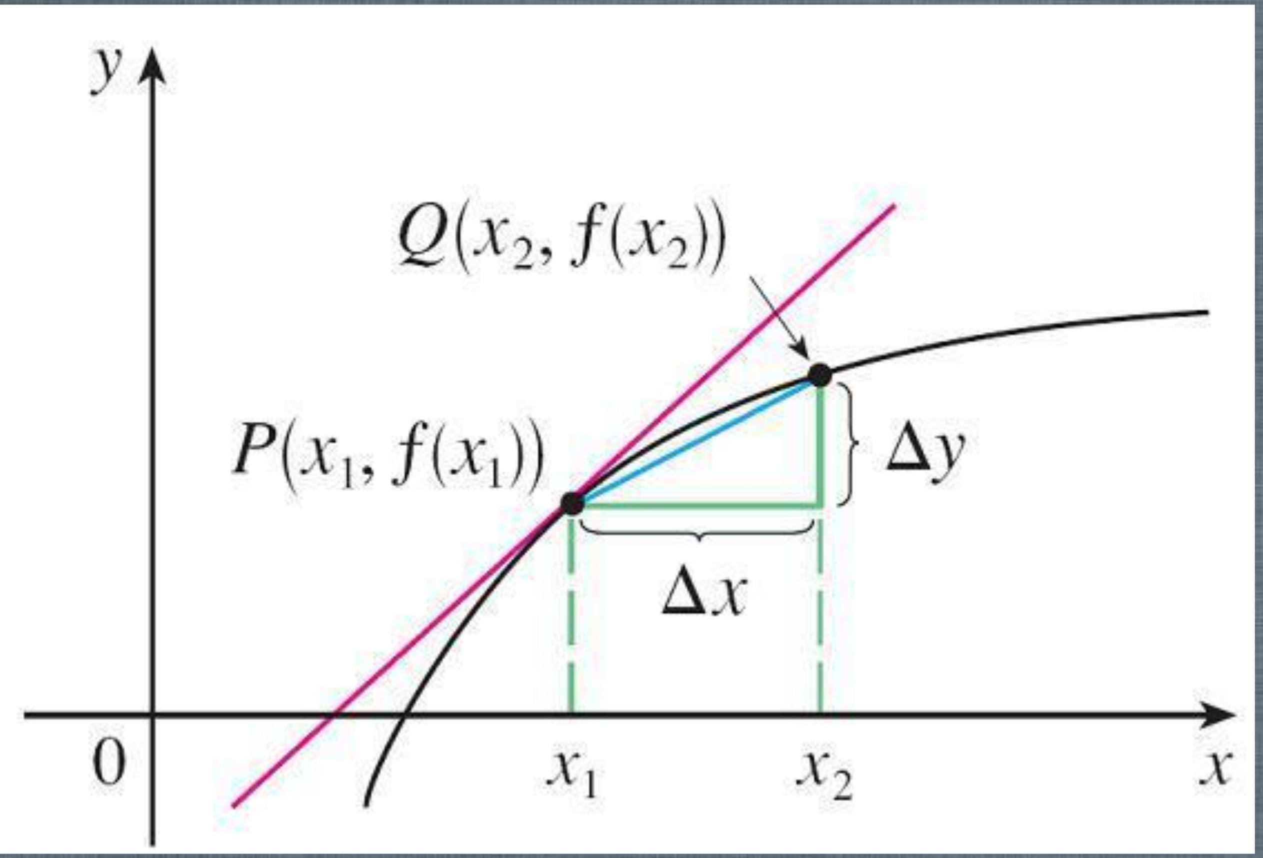


Figura 1 - m_{PQ} = a taxa de variação média $m = f(x_1)$ = taxa instantânea de variação

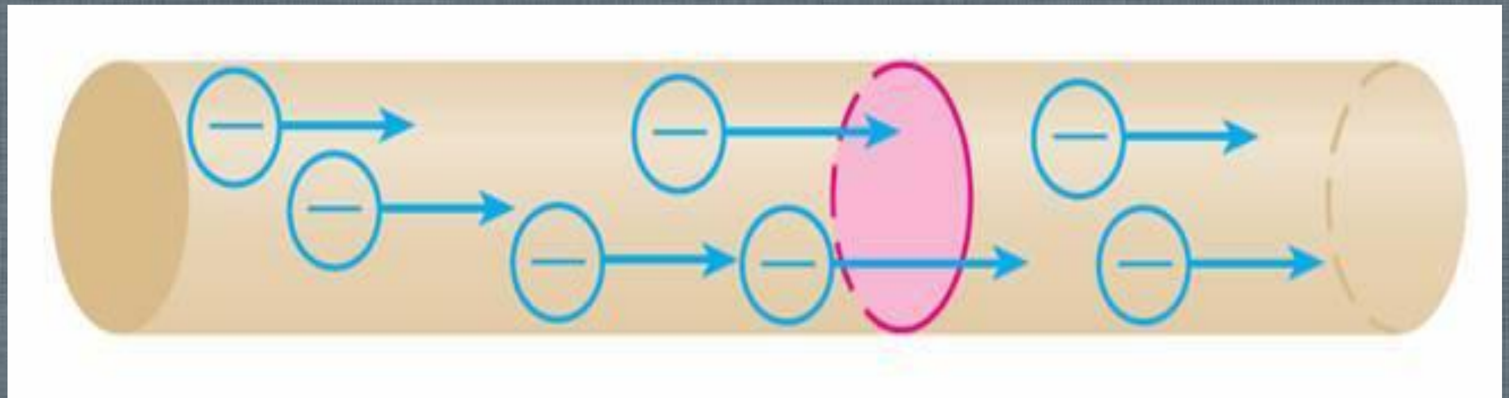
Seu limite quando $x \rightarrow 0$ é a derivada $f'(x1)$, podendo ser interpretada como a **taxa instantânea de variação de *y* em relação a *x*** ou a inclinação da reta tangente em $P(x_1, f(x_1))$. Usando a notação de Leibniz, escrevemos o processo na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais – Aplicações de Derivadas

EXEMPLOS

1- Uma corrente existe sempre que cargas elétricas se movem. A Figura 2 ilustra parte de um fio e elétrons movimentando-se através de uma superfície plana sombreada em vermelho.



Se ΔQ é a quantidade de carga líquida que passa através dessa superfície durante um período de tempo *t*, então a corrente média durante esse intervalo de tempo é definida como

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Se fizermos o limite dessa corrente média sobre intervalos de tempo cada vez menores, obteremos o que denominamos **corrente *I*** em um dado instante t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Assim, a corrente é a taxa na qual a carga flui através de uma superfície. É medida em unidades de carga por unidade de tempo (frequentemente coulombs por segundo, chamados ampéres).

2- Se $n = f(t)$ o número de indivíduos numa população animal ou de plantas num tempo t. A variação no tamanho da população entre os tempos $t = t_1$ e $t = t_2$ é $n = f(t_2) – f(t_1)$, e então a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é

$$\text{taxa média de crescimento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

A **taxa de crescimento instantâneo** é obtida dessa taxa média de crescimento fazendo-se o período de tempo t tender a 0:

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}.$$

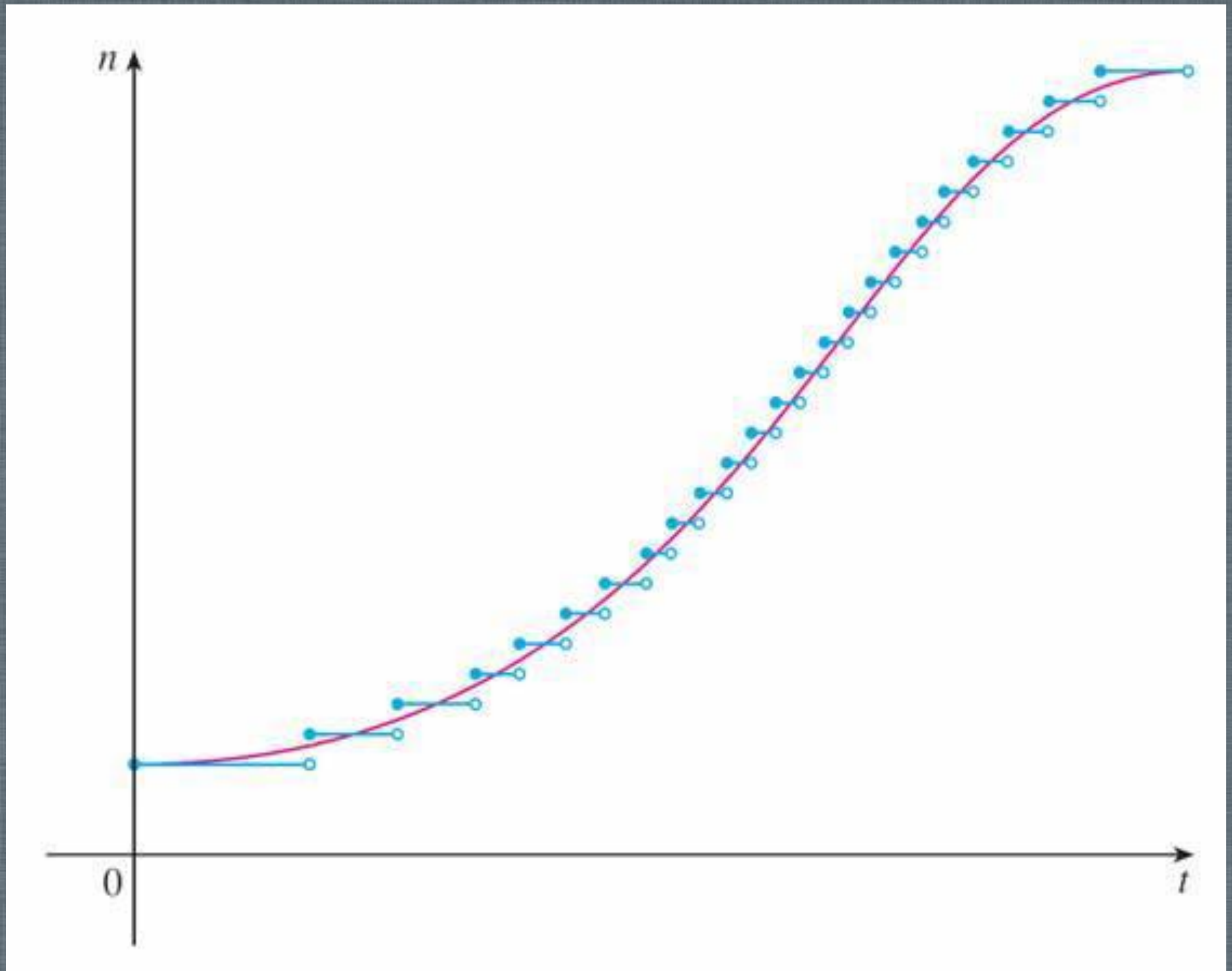


Figura 2 - Uma curva da função crescimento

Para ser mais específico, considere uma população de bactérias em um meio de nutriente homogêneo. Suponha que tomando amostras da população em certos intervalos, determina-se que ela duplica a cada hora. Se a população inicial for n_0 e o tempo for medido em horas, então:

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0,$$
$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0,$$
$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0,$$

$$f(t) = 2^t n_0$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(2^t n_0) = n_0 2^t ln2$$

Suponha que comecemos com uma população inicial de $n_0 = 100$ bactérias. Então, a taxa de crescimento depois de 4 horas é,

$$\frac{dn}{dt} = 100.\,2^4 ln2 = 1600.\,ln2 \approx 1{,}109$$

Depois de 4 horas, a população de bactérias está crescendo a uma taxa de cerca de 1,109 bactérias por hora.

Uma única ideia, muitas interpretações

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física, a taxa de reação e a compressibilidade na química, a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia, o custo e o lucro marginal na economia, a taxa do fluxo do calor na geologia, a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia, a taxa de divulgação de um boato na sociologia – todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, **a derivada**.

Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados em todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais para cada ciência separada.