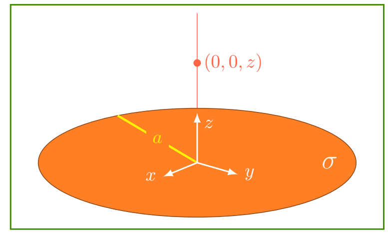
Eletromagnetismo — 7600021

Resolução da segunda prova

31 de maio de 2021

A figura 1 mostra um disco de raio a, carregado com densidade superficial σ. Define-se um sistema de coordenadas cilíndricas com origem no centro do disco.



;

Figura 1: Questão

1. Suponha que, em coordenadas cilíndricas, a densidade superficial seja

$$\sigma(s) = \sigma_0 \exp\left(-s^2/b^2\right),$$

onde σ_0 é uma constante com unidade de densidade de carga e $b \ll a$ é uma distância. Encontre o potencial elétrico no centro do disco, supondo que o potencial seja zero no infinito.

É dada a integral definida

$$\int_0^\infty \exp\left(-u^2\right)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Resposta. O potencial no centro do disco é dado pela expressão

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_A \frac{\sigma(\vec{r})}{r}\,\mathrm{d}A\,.$$

Dado um ponto na posição $\vec{r}$, com coordenadas $(s, \phi, 0)$, a sua distância até o centro será s, e o elemento de área, $\mathrm{d}A = s\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}s$. O potencial, portanto, será

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{e^{-(s/b)^2}}{s} s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi\,.$$

A integral sobre ϕ dá 2π. A integral sobre s pode ser simplificada pela mudança de variáveis $s = bu$, que implica $ds = b\,\mathrm{d}u$ e muda o limite superior para a/b. Resulta que

$$\int_0^a \frac{e^{-(s/b)^2}}{s} s\,\mathrm{d}s = b\int_0^{a/b} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Como b é muito menor do que a, a exponencial será praticamente igual a zero no limite superior. Podemos, por isso, estender o limite superior até ∞, para aproveitar a integral definida dada no enunciado da prova. Tudo junto, resulta que

$$V = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_0 b}{4\epsilon_0}.$$

2. Suponha, agora, que a densidade σ seja uniforme. O potencial no ponto $(0, 0, z)$ é

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + a^2} - z\right).$$

Encontre o campo elétrico no mesmo ponto.

Resposta. O campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial. Como este último somente depende de z, o campo é $\vec{E} = -\partial V/\partial z\,\hat{z}$, ou seja

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{z}.$$

3. Discuta o resultado do item 2 para

   a. $z \ll a$;

   b. $z \gg a$.

Resposta a. Para $z \ll a$, o segundo termo entre parênteses na expressão para o campo elétrico se torna muito menor do que o primeiro e pode ser desconsiderado. Sobra a igualdade

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{z},$$

que é a expressão para o campo elétrico de uma placa infinita uniformemente carregada. É o que se espera, porque, visto de perto do centro, o disco parece ser infinito.

Resposta b. Para $z \gg a$, o segundo termo dentro dos parênteses se torna comparável ao primeiro e precisa ser descrito com alguma precisão. Especificamente, devemos expandir a raiz quadrada no denominador em série de Taylor na variável a/z, que agora é pequena. Para isso, primeiro extraímos z^2 da raiz quadrada:

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{z}{z\sqrt{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}}.$$

Os fatores z no numerador e no denominador da fração à direita se cancelam, e a expansão até ordem mais baixa dá

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2.$$

Substituído esse resultado na expressão para o campo elétrico na questão 2, encontramos que

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0 a^2}{4\epsilon_0 z^2}\hat{z}.$$

Para interpretar, basta notar que a carga q no disco é $\sigma_0\,\pi a^2$. Assim,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\hat{z},$$

que é a expressão de Coulomb para o campo de uma carga q à distância z. De novo, é o que se espera, porque, visto de longe, o disco parece ser uma carga pontual.

4. Encontre a densidade de energia eletrostática perto da origem.

Resposta. A densidade ρ_E de energia é $\epsilon_0 E^2/2$. Como o campo perto da origem é $\sigma_0/(2\epsilon_0)$, encontramos que

$$\rho_E = \frac{\sigma_0^2}{8\epsilon_0}.$$

Considere um ponto $(s, 0, z)$ a uma pequena distância s do eixo z. É correto afirmar que

$$E(s, 0, z) = E(0, 0, z) + \mathcal{O}\left(s^2\right)?$$

Justifique sua afirmação.

Resposta. Como visto na questão 2, ao longo do eixo de simetria do disco o campo somente tem componente na direção $\hat{z}$. Fora do eixo, por simetria, ele não pode ter componente E_ϕ. Uma vez que a componentes E_s se anula no eixo, basta verifica o que acontece com E_z. Este último pode ser expandido em série de Taylor a partir do eixo z, o que significa que, para pequenas distâncias s, o campo é da forma

$$E_z(s, \phi, z) = E_z(0, \phi, z) + \alpha s + \beta s^2,$$

onde

$$\alpha = \left.\frac{\partial E}{\partial z}\right|_{s=0}.$$

A afirmação do enunciado será correta se o coeficiente α for nulo, ou seja, se a derivada $\partial E/\partial z$ se anular em $s = 0$. Vejamos, agora o rotacional do campo elétrico em $s = 0$. O rotacional é zero, o que significa que suas três componentes se anulam. A componente $\hat{\phi}$ é $\partial E_s/\partial z - \partial E_z/\partial s$. Assim,

$$\frac{\partial E_s}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial s}.$$

No eixo z, a componente E_s é nula. Significa que a derivada à esquerda é nula. Assim, $\partial E_z/\partial s = 0$, no eixo z. Isso mostra que o coeficiente α é nulo, e a expansão Taylor do campo elétrico é

$$E_z(s, \phi, z) = E_z(0, \phi, z) + \beta s^2,$$

o que confirma a afirmação no enunciado.