AULAS ANTERIORES 28/05/2021

Produto Escalar:

RESULTADO: NÚMERO $\in \mathbb{R}$

Base ortonormal: $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$; $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad , \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

produto escalar

Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Ortogonalidade entre Dois Vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Produto Vetorial:

RESULTADO: VETOR $\in \mathbb{R}^3$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

produto vetorial

$\vec{w}$ ... simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Paralelismo entre Dois Vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.

Interpretação do Módulo:

Área do Paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}|$ $\longrightarrow$ definido pelos dois vetores LI

Produto Misto:

RESULTADO: NÚMERO $\in \mathbb{R}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

produto misto

Coplanaridade entre Três Vetores:

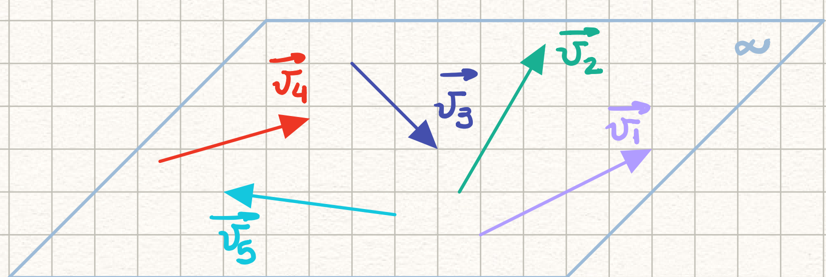
$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Interpretação do Módulo:

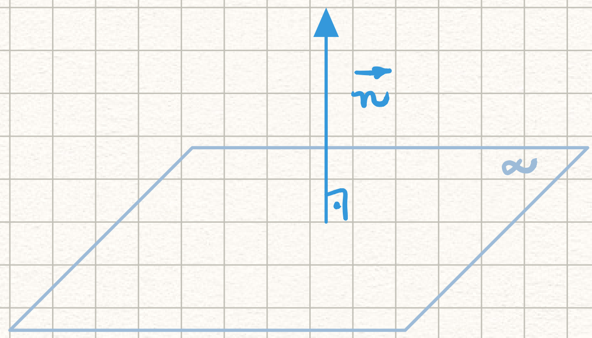
Volume do Paralelepípedo $= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ → definido pelos 3 vetores LI

9. PLANO

Por definição, qualquer vetor $\in$ plano é considerado // ao plano. Desta forma, um vetor // plano não é um bom elemento para ser usado em sua definição, pois há infinitas direções paralelas ao plano:

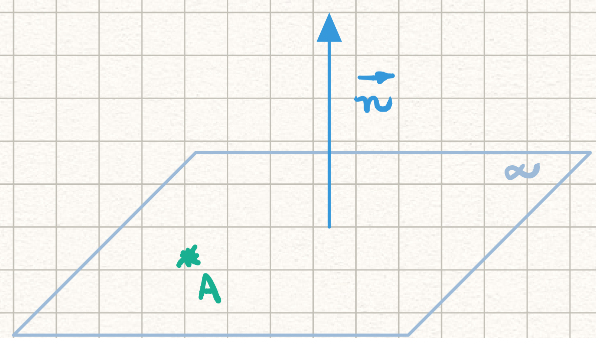


Então, qual direção é única em relação ao plano?

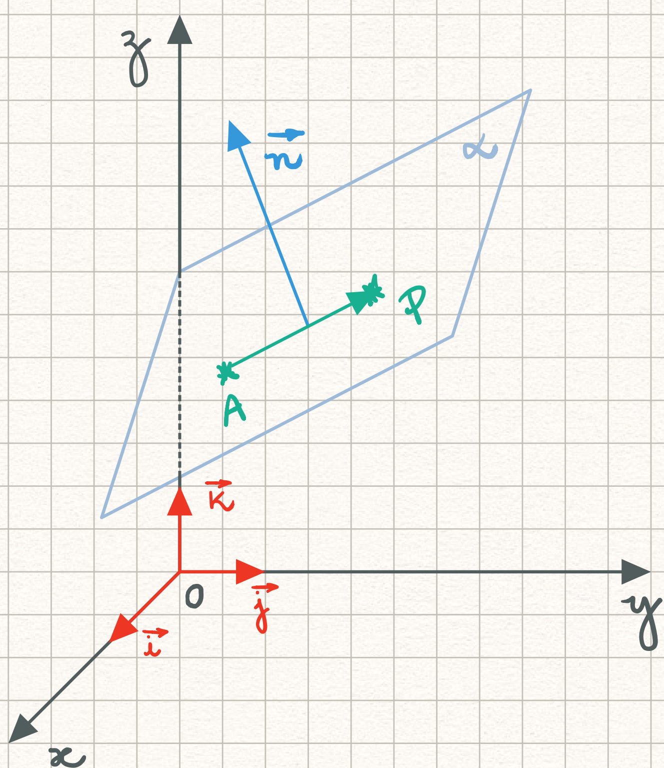


A direção normal ao plano!

Analogamente ao estudo de retas, se forem conhecidos um vetor normal ao plano e um ponto $A \in \alpha$, então o plano existe e é único.



Agora, quando um ponto $P(x, y, z)$ qualquer do espaço $\in \alpha$?



$\Sigma(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}) \dots \mathbb{R}^3$

$A(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$

$\vec{n} = (a, b, c) \perp \alpha$

$P \in \alpha \iff \vec{AP} \perp \vec{n} \quad \therefore \quad \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{AP} = P - A = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

Logo:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz \overbrace{-(ax_0 + by_0 + cz_0)}^{=d} = 0$$

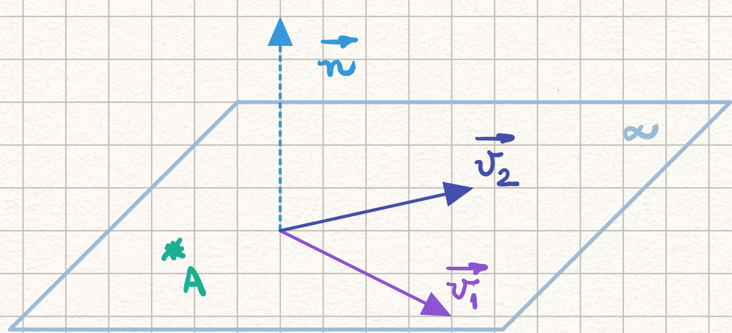
$\therefore \quad \alpha : ax + by + cz + d = 0$

Eq. Geral ou Cartesiana do Plano

carrega as informações sobre o ponto A

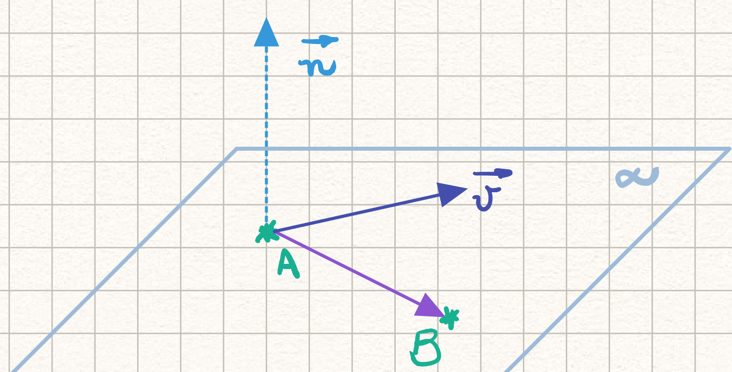
Slide 05

i) Passa por A e é // a dois vetores LI:



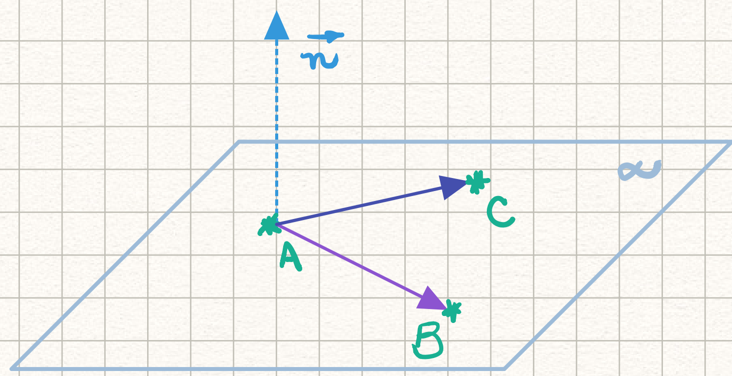
$\vec{n} \parallel \vec{v_1} \times \vec{v_2}$

ii) Passa por dois pontos A e B e é // $\vec{v}$, LI com $\vec{AB}$:



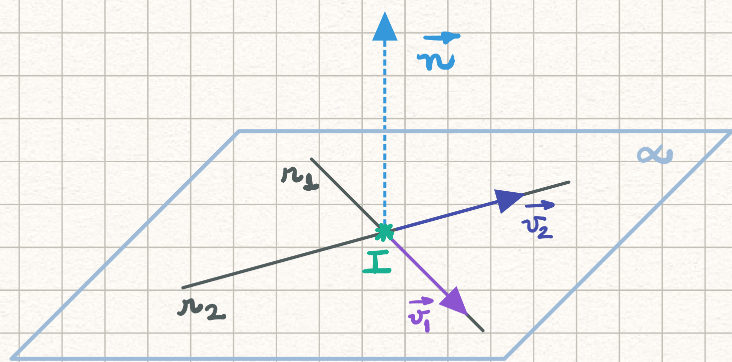
$\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{v}$

iii) Passa por três pontos não colineares:



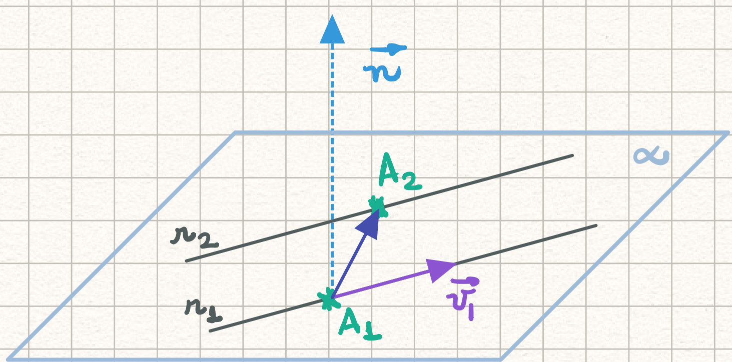
$\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{AC}$

iv) Contém duas retas concorrentes:



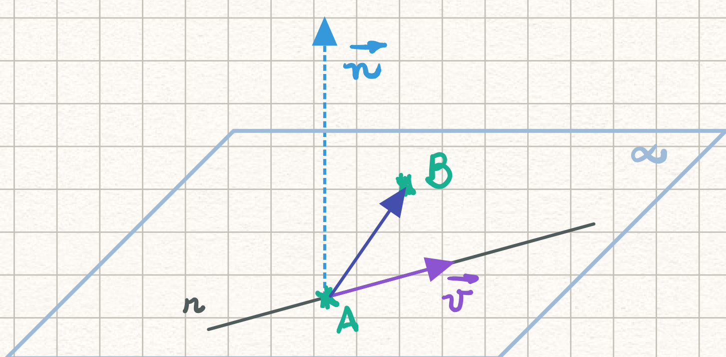
$\vec{n} \parallel \vec{v_1} \times \vec{v_2}$

v) Contém duas retas paralelas não coincidentes:



$\vec{n} \parallel \vec{v_1} \times \vec{A_1 A_2}$

vi) Contém uma reta e um ponto $\notin r$



$\vec{n} \parallel \vec{v} \times \vec{AB}$

Slide 06

$$[\vec{AP}, \vec{v_1}, \vec{v_2}] = 0 \quad \neq \quad \vec{AP}\cdot\vec{n} = 0 \ ?$$

RESULTADO: $\vec{v} \perp \begin{cases}\vec{v_1}\\ \vec{v_2}\end{cases}$ e $\perp$ ao plano que contém $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ $\therefore$ $\vec{v_1}\times\vec{v_2} \parallel \vec{n}$

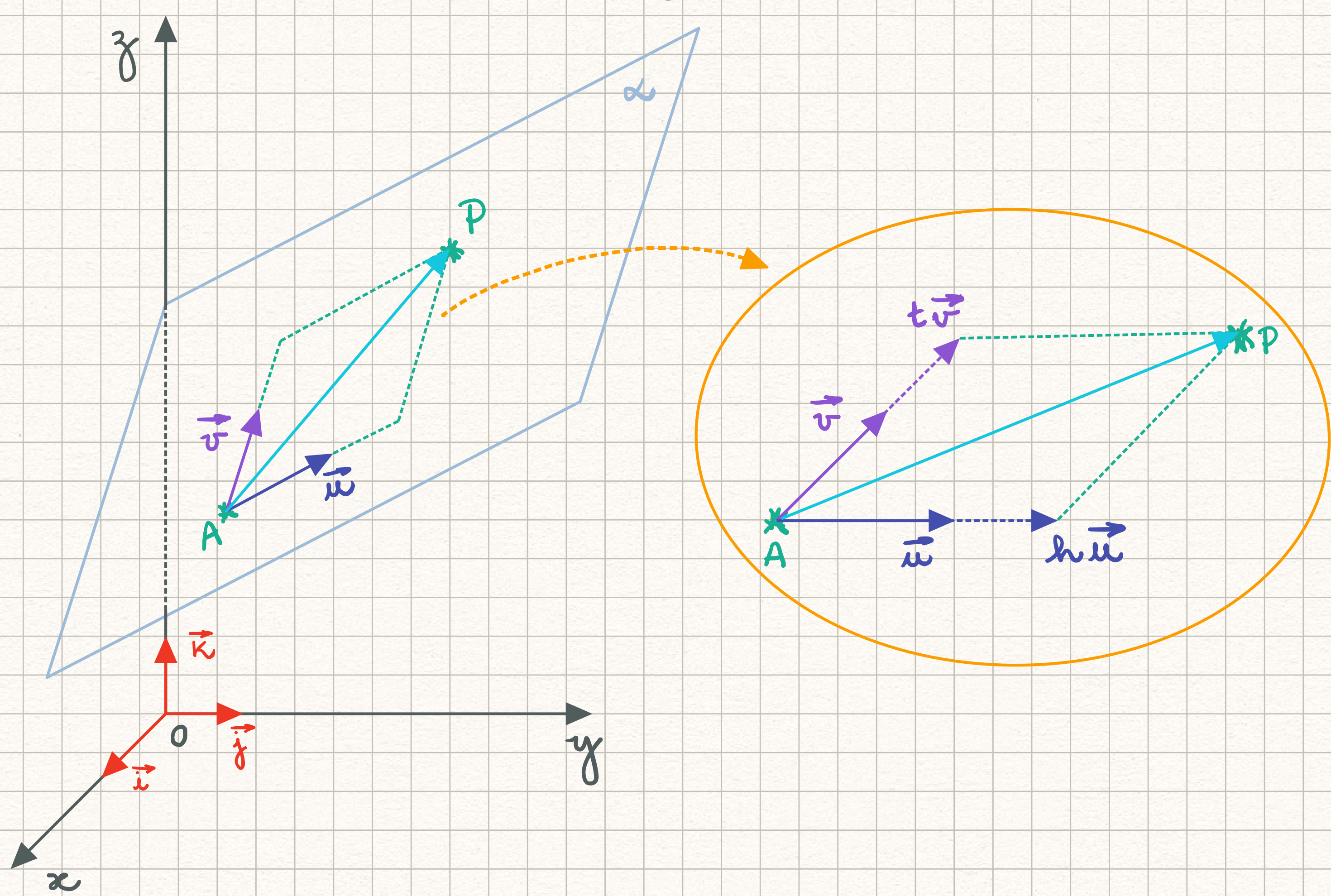
$$\vec{AP}\cdot\boxed{(\vec{v_1}\times\vec{v_2})} = 0$$

$\therefore$ $\vec{AP}\cdot\vec{n} = 0$ EXATAMENTE A DEF. ORIGINAL, ESCRITA DE FORMA DIFERENTE!

Slide 07: Eqs. Paramétricas

Existe uma outra forma de obter a lei de formação dos pontos $P(x,y,z)$ do $\mathbb{R}^3$ que $\in \alpha$, que envolve 2 vetores LI paralelos a α e um ponto $A(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$.

Se forem conhecidos 2 vetores LI e um ponto A em um plano, quando o ponto genérico $P \in \alpha$?



$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$

$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$$\vec{AP} \in \alpha \iff \{\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}\} \text{ LD}$$

$$\therefore \quad \vec{AP} = h\vec{u} + t\vec{v} \quad , \quad h, t \in \mathbb{R}$$

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

$$(x, y, z) = (x_0 + ha_1 + ta_2, y_0 + hb_1 + tb_2, z_0 + hc_1 + tc_2)$$

Portanto:

$$\alpha: \begin{cases} x = \underbrace{x_0}_{} + h\,a_1 + t\,a_2 \\ y = y_0 + h\,b_1 + t\,b_2 \\ z = \underbrace{z_0}_{A} + h\,\underbrace{c_1}_{\vec{u}} + t\,\underbrace{c_2}_{\vec{v}} \end{cases} \quad , \quad h, t \in \mathbb{R}$$

EQS. PARAMÉTRICAS DO PLANO

** As eqs. paramétricas dissociam a relação entre x, y e z, da eq. geral do plano. Agora, cada uma das variáveis pode ser obtida de maneira independente, como função dos 2 parâmetros:

$$\begin{aligned} x &= f(t, h) \\ y &= g(t, h) \quad , \quad t, h \in \mathbb{R} \\ z &= l(t, h) \end{aligned}$$

** O número de parâmetros está associado com o grau de liberdade da equação (aqui, ela representa um plano, que se define por 2 dimensões).

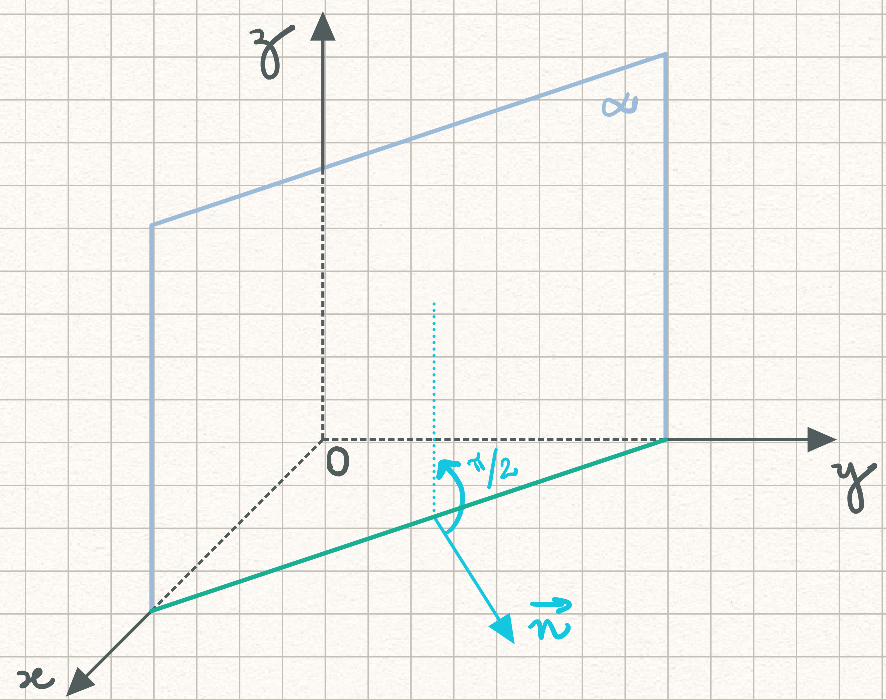
PLANOS PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS
(Ox, Oy, Oz)

II) Uma das coordenadas de $\vec{n}$ é nula

$\boxed{c = 0}$ $\longrightarrow$ $\vec{n} = (a, b, 0) = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\vec{n}$ é CL de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\therefore$ $\vec{n}$ é coplanar com $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\therefore$ $\vec{n} \parallel Oxy$ e $\boxed{\vec{n} \perp Oz \longrightarrow \alpha \parallel Oz}$

$\vec{n} \perp \alpha$



EQ. GERAL:

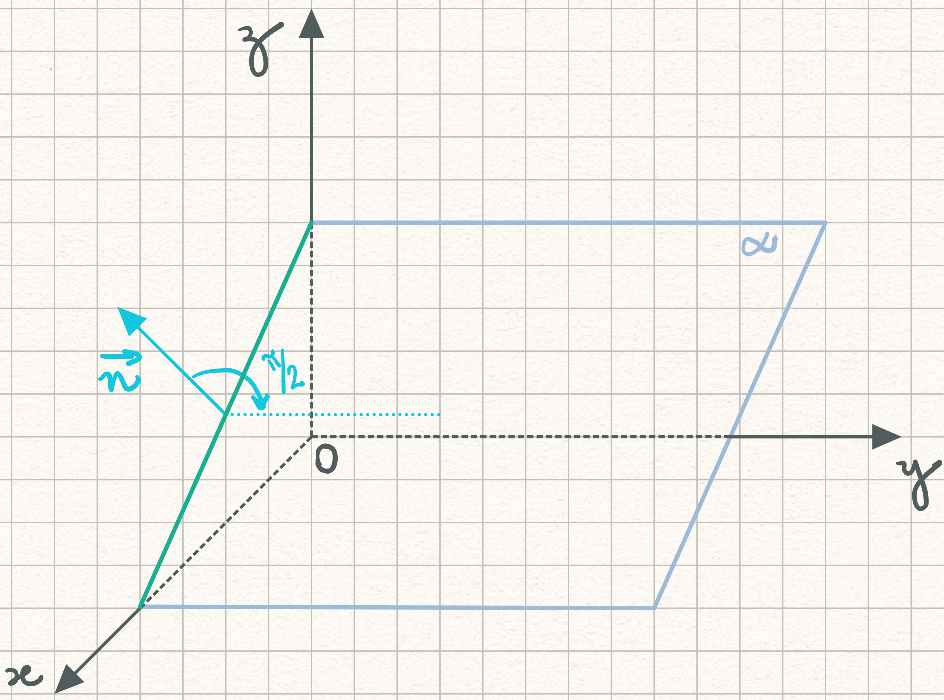
$\alpha : ax + by + d = 0$

eq. da reta $\subset Oxy$

$\boxed{b = 0}$ $\longrightarrow$ $\vec{n} = (a, 0, c) = a\vec{i} + c\vec{k}$

$\vec{n}$ é CL de $\vec{i}$ e $\vec{k}$ $\therefore$ $\vec{n}$ é coplanar com $\vec{i}$ e $\vec{k}$ $\therefore$ $\vec{n} \parallel Oxz$ e $\boxed{\vec{n} \perp Oy \longrightarrow \alpha \parallel Oy}$

$\vec{n} \perp \alpha$



EQ. GERAL:

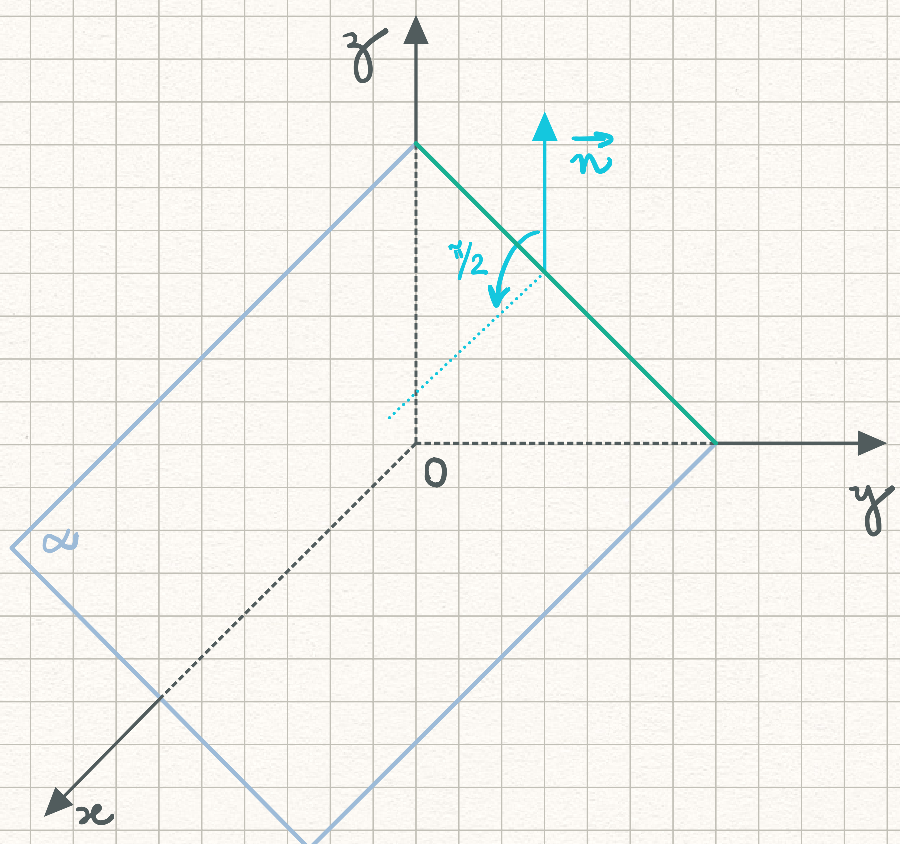
$\alpha : ax + cz + d = 0$

eq. da reta $\subset Oxz$

$a = 0 \longrightarrow \vec{n} = (0, b, c) = b\vec{j} + c\vec{k}$

$\vec{n}$ é CL de $\vec{j}$ e $\vec{k}$ $\therefore$ $\vec{n}$ é coplanar com $\vec{j}$ e $\vec{k}$ $\therefore$ $\vec{n} \,//\, Oyz$ e $\vec{n} \perp Ox \longrightarrow \alpha \,//\, Ox$

$\vec{n} \perp \alpha$



EQ. GERAL:

$\alpha : by + cz + d = 0$

eq. da reta $\subset Oyz$

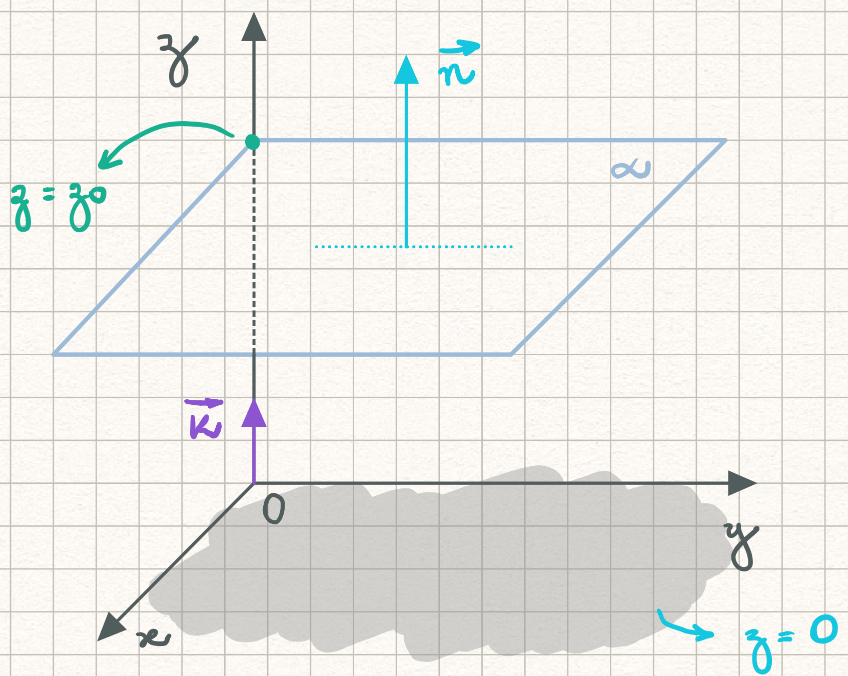
PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS
(Oxy, Oxz, Oyz)

II) Duas das coordenadas de $\vec{n}$ são nulas

$a = b = 0 \longrightarrow \vec{n} = (0,0,c) = c\vec{k}$

$\vec{n} \,//\, Oz$ e $\vec{n} \perp Oxy \longrightarrow \alpha \,//\, Oxy$

$\vec{n} \perp \alpha$



EQ. GERAL:

$\alpha : cz + d = 0$

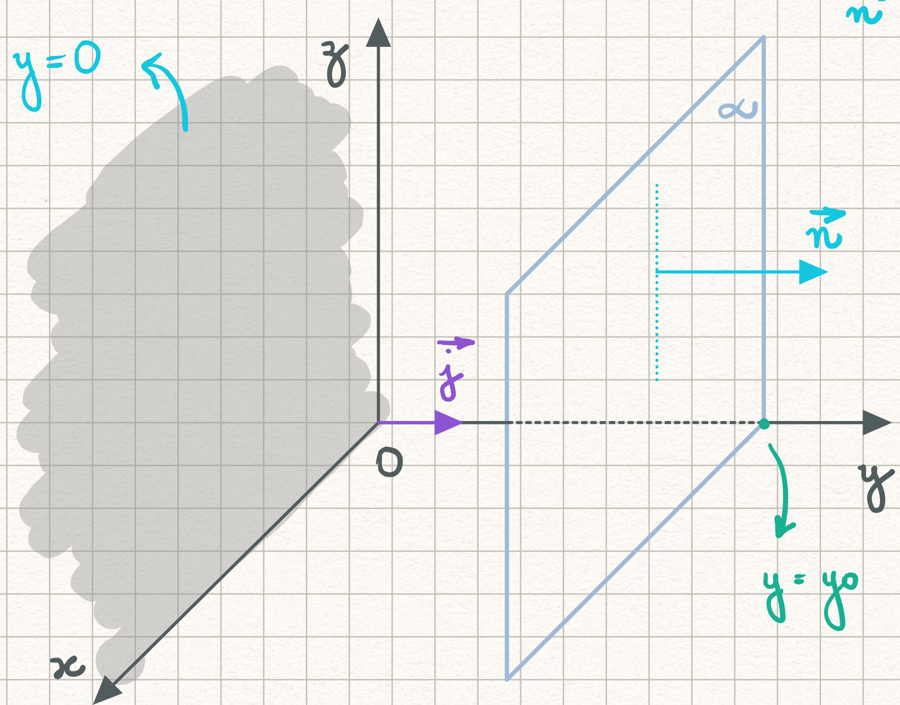
ou

$z = \dfrac{-d}{c} = z_0$

$a = c = 0 \longrightarrow \vec{n} = (0,b,0) = b\vec{j}$

$\vec{n} \,//\, Oy$ e $\vec{n} \perp Oxz \longrightarrow \alpha \,//\, Oxz$

$\vec{n} \perp \alpha$



EQ. GERAL:

$\alpha : by + d = 0$

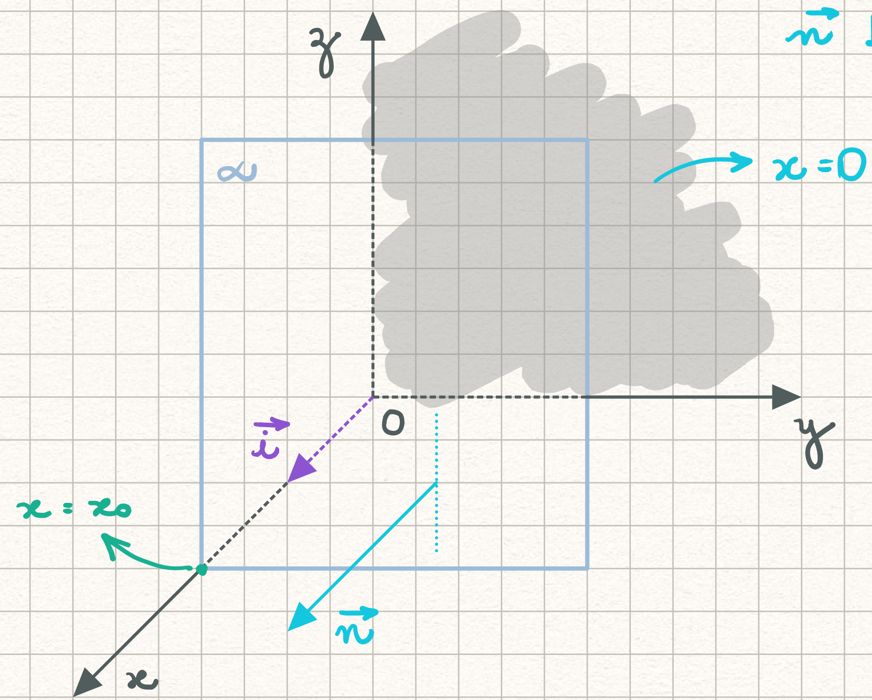
ou

$y = \dfrac{-d}{b} = y_0$

$b = c = 0 \longrightarrow \vec{n} = (a, 0, 0) = a\vec{i}$

$\vec{n} \parallel Ox$ e $\vec{n} \perp Oyz \longrightarrow \alpha \parallel Oyz$

$\vec{n} \perp \alpha$



EQ. GERAL:

$\alpha: ax + d = 0$

ou

$x = \dfrac{-d}{a} = x_0$

EXERCÍCIOS - Slide 15

1 a) $\alpha: 3x + y - z = 4$

$K = ?$ tal que $P(K, 2, K-1) \in \alpha$

$P \in \alpha \iff$ P satisfizer a eq. de α.

$P \longrightarrow \alpha: \quad 3K + 2 - (K - 1) = 4$

$3K - K + 1 = 2$

$2K = 1 \quad \therefore \quad K = 1/2$

b) $P(x, y, z)$ tal que: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \quad \therefore \quad P(2, 2z, z)$

$P \in \alpha \iff$ P satisfizer a eq. de α.

$P \longrightarrow \alpha: \quad 3(2) + 2z - z = 4$

$\alpha: \quad 6 + z = 4 \longrightarrow z = -2$ Então: $P(2, -4, -2)$

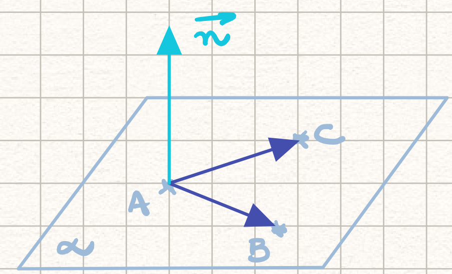
2 a) Passa pelos pontos $A(-1,2,0)$, $B(2,-1,1)$, $C(1,1,-1)$.

Verificando se os pontos são colineares:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (3,-3,1) \\ \vec{AC} = (2,-1,-1) \end{array}\right\} \quad \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AB} = k\vec{AC} \ ?$$

Não. Logo, pontos não são colineares

e $\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{AC}$:



$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} = (4,5,3)$$

$$\vec{n} \parallel (\vec{AB} \times \vec{AC}) \ : \quad \vec{n} = k(\vec{AB} \times \vec{AC}) \xrightarrow{k=1} \vec{n} = (4,5,3)$$

Para obter a equação do plano α, escolher um dos pontos conhecidos (A, B ou C). Assim:

$$P(x,y,z) \in \alpha \iff \vec{AP} \perp \vec{n} \ \therefore \ \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{AP} = P - A = (x+1,\, y-2,\, z)$$

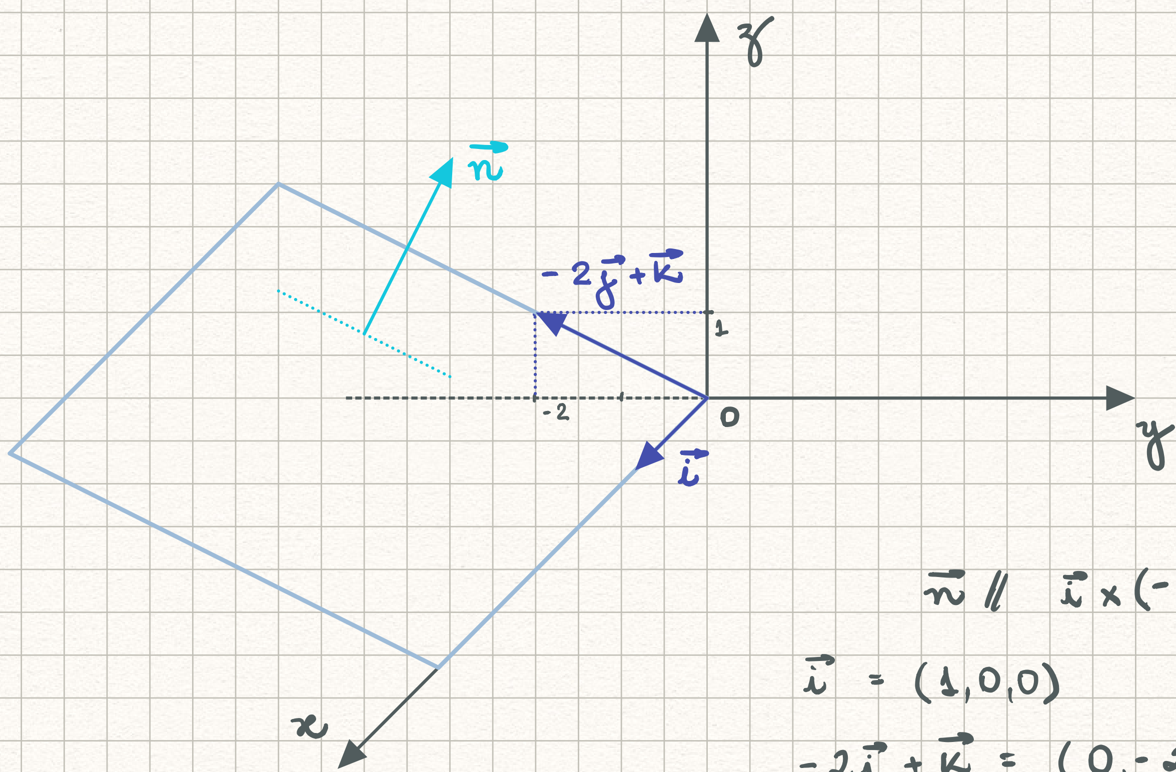
Substituindo as coord. de $\vec{AP}$ e de $\vec{n}$ em (1):

$$(x+1,\, y-2,\, z) \cdot (4,5,3) = 0$$

$$4(x+1) + 5(y-2) + 3z = 0$$

$$\alpha: 4x + 5y + 3z - 6 = 0$$

b) Passa por $A(6,0,-2)$ e $\parallel$ a $\vec{i}$ e a $-2\vec{j}+\vec{k}$:



$\vec{n} \parallel \vec{i} \times (-2\vec{j}+\vec{k})$

$\vec{i} = (1,0,0)$

$-2\vec{j}+\vec{k} = (0,-2,1)$

$$\vec{i} \times (-2\vec{j}+\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} - 2\vec{k} = (0,-1,-2)$$

$$\vec{n} \parallel \vec{i} \times (-2\vec{j}+\vec{k}) \therefore \vec{n} = m(0,-1,2) \xrightarrow{m=-1} \vec{n} = (0,1,2)$$

$$P(x,y,z) \in \alpha \iff \vec{AP} \perp \vec{n} \therefore \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \quad (1)$$

$\vec{AP} = P - A = (x-6, y, z+2)$

Substituindo as coord. de $\vec{AP}$ e de $\vec{n}$ em (1):

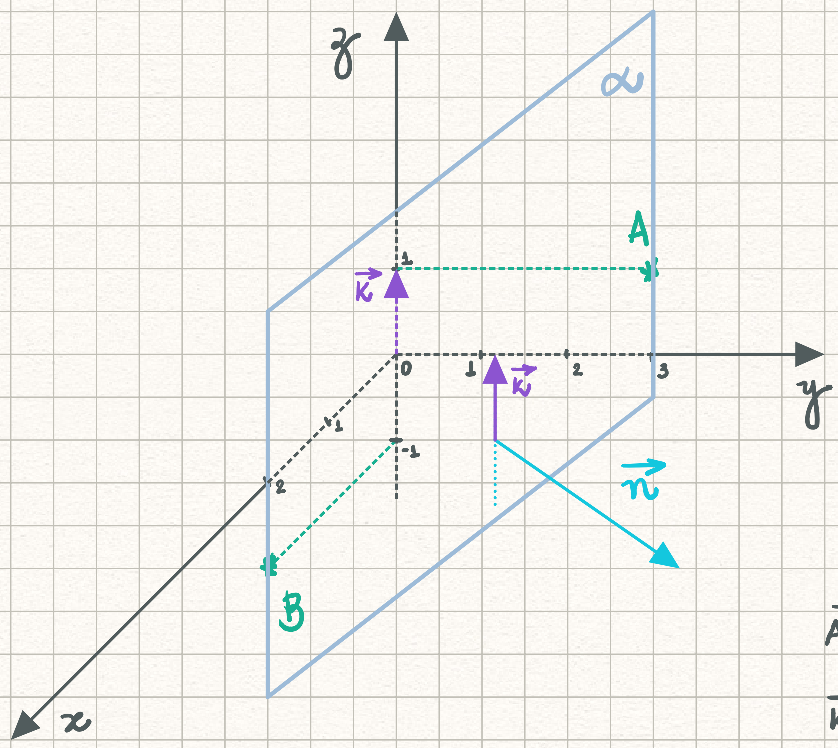
$$(x-6, y, z+2) \cdot (0,1,2) = 0$$

$$y + 2(z+2) = 0$$

$\alpha : y + 2z + 4 = 0$

Equação de um plano // Ox !

3) Eq. geral do plano $//Oz$ e que contém $A(0,3,1)$ e $B(2,0,-1)$.



$\overrightarrow{AB} \; // \; \alpha$

$\vec{k} \; // \; \alpha$

$\exists$ representante de $\vec{k} \subset \alpha$

$\therefore \quad \vec{n} \; // \; (\overrightarrow{AB} \times \vec{k})$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-3,-2)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} = (-3,-2,0)$$

$$\vec{n} \; // \; (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \; : \; \vec{n} = K(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \xrightarrow{K=-1} \vec{n} = (3,2,0)$$

Para obter a equação do plano α, escolher um dos pontos conhecidos (A ou B). Assim:

$$P(x,y,z) \in \alpha \iff \overrightarrow{BP} \perp \vec{n} \quad \therefore \quad \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x-2, y, z+1)$$

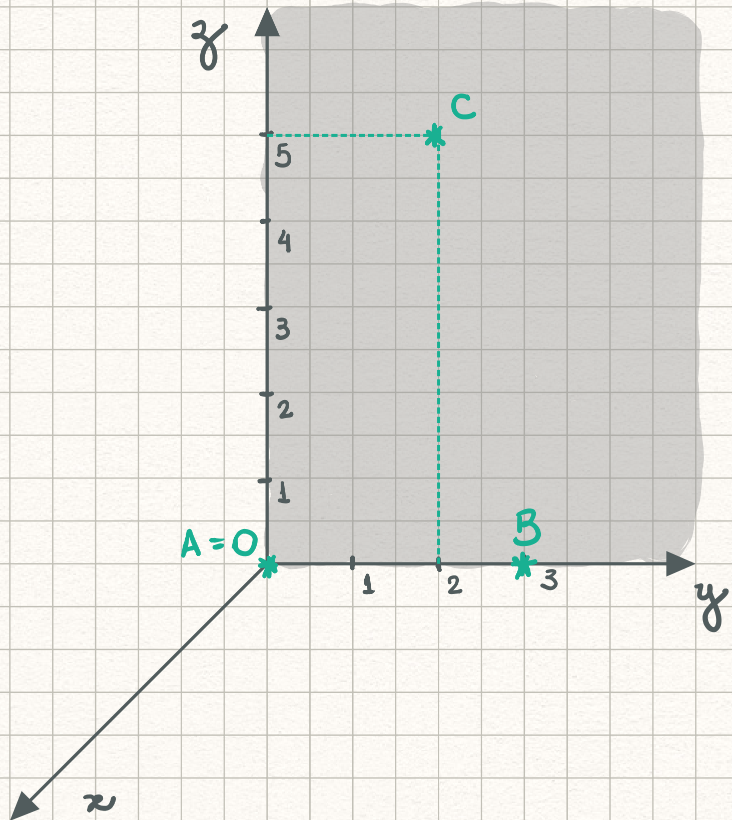
Substituindo as coord. de $\overrightarrow{BP}$ e de $\vec{n}$ em (1):

$$(x-2, y, z+1) \cdot (3,2,0) = 0$$

$$3(x-2) + 2y = 0$$

$$\therefore \quad \alpha : 3x + 2y - 6 = 0$$

4 Passa pelos pontos $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,2,5)$.



GRAFICAMENTE

* Os 3 pontos não são colineares
* Os 3 pontos $\subset$ no plano Oyz

Nesse plano, todo $x = 0$

$\therefore \; \alpha : x = 0$ ou $\underline{Oyz}$

ALGEBRICAMENTE

Verificando se os pontos são colineares:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (0,3,0) \\ \vec{AC} = (0,2,5) \end{array}\right\}$$

Como $\nexists \; k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AB} = k\,\vec{AC}$, os pontos não são colineares.

$$\vec{n} \,/\!/\, \vec{AB} \times \vec{AC} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = m(15\vec{i}\,)$$

$m = 1$, $\quad \vec{n} = 15\vec{i} = (15,0,0)$

Para obter a equação do plano α, escolher um dos pontos conhecidos (A, B ou C). Assim:

$$P(x,y,z) \in \alpha \iff \vec{CP} \perp \vec{n} \quad \therefore \quad \vec{CP} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{CP} = P - C = (x, y-2, z-5)$$

Substituindo as coord. de $\vec{CP}$ e de $\vec{n}$ em (1):

$$(x, y-2, z-5) \cdot (15, 0, 0) = 0$$
$$15x = 0$$

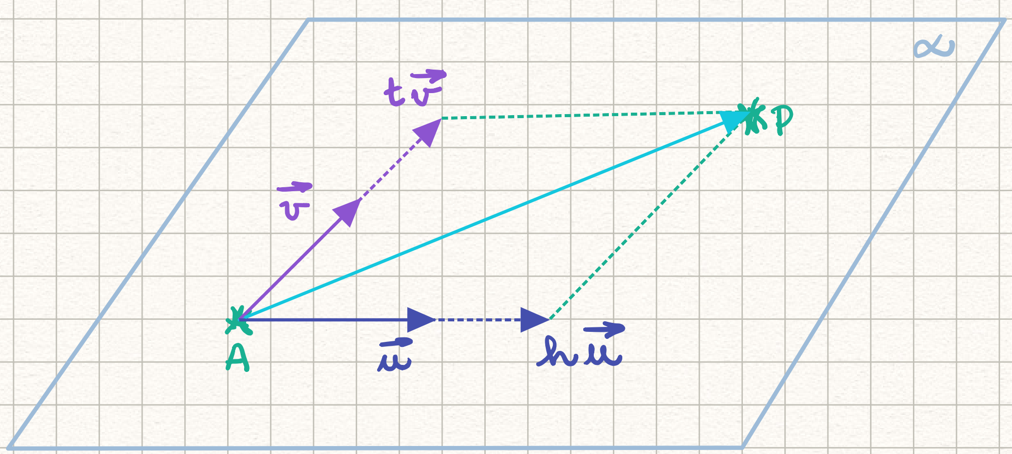
$$\alpha : x = 0 \text{ ou } Oyz$$

5 Eqs. Paramétricas do plano determinado por $A(1,1,0)$, $B(2,1,3)$ e $C(-1,-2,4)$.

Verificando se os pontos são colineares:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{AB} = (1,0,3) \\ \vec{v} = \vec{AC} = (-2,-3,4) \end{array}\right\} \text{ Como } \nexists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AB} = k\vec{AC}, \text{ os pontos não são colineares.}$$

Assim:



$$P(x,y,z) \in \alpha \iff \{\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}\} \text{ for LD.}$$

$$\therefore \vec{AP} \text{ é CL de } \vec{u} \text{ e de } \vec{v}.$$

Então:

$$\vec{AP} = h\vec{u} + t\vec{v} \quad , \quad h,t \in \mathbb{R}$$

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

Substituindo as coord. de P, A, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na eq. acima:

$$(x,y,z) = (1,1,0) + h(1,0,3) + t(-2,-3,4)$$

$$\therefore \ \alpha : \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3h + 4t \end{cases} \quad , \quad h,t \in \mathbb{R}$$