MÁXIMOS E MÍNIMOS

1º Semestre de 2021

Cuidado: Não totalmente revisado (28/05/2021)

1 Pontos de máximo, de mínimo, de sela

Em muitas situações, é importante descobrir quais são os pontos críticos de uma função e descobrir se um certo ponto crítico é um ponto de máximo, de mínimo ou de sela (i.é, nem máximo nem mínimo).

Definição 1 Seja $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1.

Dizemos que $\overline{x} \in \Omega$ é um *ponto crítico* de f se $\nabla f(\overline{x}) = \vec{O}$ (ou seja, se $Df(\overline{x})$ é a transformação linear nula).

Definição 2 Seja $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, onde $n \geq m$, de classe C^1.

Dizemos que $\overline{x} \in \Omega$ é um *ponto regular* de f se $Jf(\overline{x})$ tem posto máximo (ou seja, se $Df(\overline{x})$ é uma transformação linear sobrejetora). Caso contrário, dizemos que $\overline{x}$ é um *ponto crítico* de f.

Observação 1 Note que a definição 1 é compatível com a definição 2.

Definição 3 Seja $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Seja $\overline{x} \in \Omega$.

(a) Dizemos que $\overline{x}$ é um ponto de *mínimo* [respect. *máximo*] de f se $f(x) \geq f(\overline{x}), \forall x \in \Omega$ [respect. $f(x) \leq f(\overline{x}), \forall x \in \Omega$].

(b) Dizemos que $\overline{x}$ é um ponto de *mínimo local* [respect. *máximo local*] de f se existe uma vizinhança $U \subset \Omega$ de $\overline{x}$ tal que $f(x) \geq f(\overline{x}), \forall x \in U$ [respect. $f(x) \leq f(\overline{x}), \forall x \in U$].

(c) Dizemos que $\overline{x}$ é um ponto de *mínimo estrito* [respect. *máximo estrito*] de f se $f(x) > f(\overline{x}), \forall x \in \Omega \setminus \{\overline{x}\}$ [respect. $f(x) < f(\overline{x}), \forall x \in \Omega \setminus \{\overline{x}\}$].

(d) Dizemos que $\overline{x}$ é um ponto de *mínimo local estrito* [respect. *máximo local estrito*] de f se existe uma vizinhança $U \subset \Omega$ de $\overline{x}$ tal que $f(x) > f(\overline{x}), \forall x \in U \setminus \{\overline{x}\}$ [respect. $f(x) < f(\overline{x}), \forall x \in U \setminus \{\overline{x}\}$].

Proposição 1 *Seja $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1.*

Se $\overline{x} \in \Omega$ é um ponto de máximo local ou de mínimo local de f, então $\overline{x}$ é um ponto crítico de f.

Exercício 1 Prove a proposição anterior.

Definição 4 Seja $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1.

Dizemos que um ponto crítico $\overline{x} \in \Omega$ de f é um ponto de *sela* se ele não for nem ponto de máximo local nem ponto de mínimo local de f.

1.1 Formas Quadráticas e pontos críticos

Seja $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1.

Para tentar descobrir se um determinado ponto crítico de f é ponto de máximo, de mínimo ou de sela podemos usar algumas ferramentas envolvendo o estudo de um caso particular, a saber, o estudo do ponto crítico O de formas quadráticas.

Seja A uma matriz real $n \times n$, simétrica.

A função $Q = Q_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$Q(y) = Q_A(y) := \langle\ Ay \mid y\ \rangle = y^t A y,$$

é dita uma uma *forma quadrática*.

Ela satisfaz: $Q(ty) = t^2 Q(y),\ \forall t \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}^n$.

Proposição 2 *Dada uma uma forma quadrática $Q = Q_A$, a origem $\overline{y} = O$ é sempre um ponto crítico de Q.*

Exercício 2 Prove a proposição anterior.

Definição 5 Considere uma forma quadrática $Q = Q_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

i. Se $Q(y) \geq 0,\ \forall y \in \mathbf{R}^n$, Q é dita uma *forma quadrática semidefinida positiva* (neste caso, Q tem mínimo **global** em $\overline{y} = O$).

ii. Se $Q(y) \leq 0,\ \forall y \in \mathbf{R}^n$, Q é dita uma *forma quadrática semidefinida negativa* (neste caso, Q tem máximo **global** em O).

iii. Se $Q(y) > 0,\ \forall y \in \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$, Q é dita uma *forma quadrática definida positiva* (neste caso, Q tem mínimo estrito **global** em $\overline{y} = O$).

iv. Se $Q(y) < 0,\ \forall y \in \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$, Q é dita uma *forma quadrática definida negativa* (neste caso, Q tem máximo estrito **global** em O).

v. Se existem y_+ e y_- tais que $Q(y_+) > 0$ e $Q(y_-) < 0$, Q é dita uma *forma quadrática indefinida* (neste caso, Q tem sela em O).

Observação 2 Note que se A é uma matriz real $n \times n$, simétrica, a transformação linear $T = T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definida por $T(x) = T_A(x) := Ax$ é uma transformação linear simétrica em $\mathbf{R}^n$, portanto vimos em "Álgebra Linear" que ela é diagonalizável. Mais que isso, vimos que existe uma base ortonormal formada por autovetores de $T = T_A$. Note também que $Q_A(x) = \langle\, T_A(x) \mid x \,\rangle$.

Exercício 3 Enuncie e demonstre um resultado sobre classificação para formas quadráticas Q_A em termos dos autovalores de T_A (ou de A), caracterizando quando ela definida positiva, definida negativa e indefinida.

Exercício 4 Em cada item, usando argumentos sobre os autovalores de A, determine se Q_A é ou não definida positiva, definida negativa, indefinida.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. (e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Proposição 3 (Critério de Sylvester) *Seja A uma matriz real $n \times n$, simétrica, e considere as submatrizes*

$$A_1 = [a_{11}], A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ldots, A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \ldots, A_n = A.$$

(a) Se $\det A_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$, *então Q_A é definida positiva.*

(b) Se $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \ldots, sgn \det A_k = (-1)^k, \ldots,$ *então Q_A é definida negativa.*

(c) Se $\det A_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, s$ e $\det A_{s+1} < 0$, *então Q_A é indefinida.*

(d) Se $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \ldots, sgn \det A_s = (-1)^s$, *e* $sgn \det A_{s+1} = (-1)^s$, *então Q_A é indefinida.*

Exercício 5 Decida se podemos usar o Critério de Sylvester para descobrir se Q_A é definida positiva, definida negativa, ou indefinida, e em caso afirmativo diga de que tipo é Q_A. Em cada caso, sem calcular os autovalores de A, o quê você pode dizer sobre o sinal de cada autovalor de A? Justifique sua resposta.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. (e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2 Pontos críticos de funções de classe C^2 a valores reais

Proposição 4 *Seja $S : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^2, onde Ω é uma vizinhança da origem, satisfazendo*

$$\lim_{y \to O} \frac{S(y)}{\|y\|^2} = 0.$$

Sejam $Q = Q_A$ uma forma quadrática em $\mathbf{R}^n$ e $G : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por $G = Q + S$.

Então:

(a) Se Q é uma forma quadrática definida positiva, existe $\delta > 0$ com $B_\delta(O) \subset \Omega$ tal que a função G satisfaz $G(y) > 0$, $\forall y \in B_\delta(O) \setminus \{O\}$ (isto é, O é ponto de mínimo estrito de $G|_{B_\delta(O)}$, e portanto um ponto de mínimo local estrito de G).

(b) Se Q é uma forma quadrática definida negativa, existe $\delta > 0$ com $B_\delta(O) \subset \Omega$ tal que a função G satisfaz $G(y) < 0$, $\forall y \in B_\delta(O) \setminus \{O\}$ (isto é, O é ponto de máximo estrito de $G|_{B_\delta(O)}$, e portanto um ponto de máximo local estrito de G).

(c) Se Q é uma forma quadrática indefinida, então para cada $\delta > 0$ existem $y_{\delta+}, y_{\delta-} \in B_\delta(O) \cap \Omega$ tais que a função G satisfaz $G(y_{\delta+}) > 0$ e $G(y_{\delta-}) < 0$ (isto é, O é ponto de sela de G).

Se $F : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ é de classe C^2 e tem um ponto crítico $\overline{y}$ (isto é, $\nabla F(\overline{y}) = O$, ou seja, $JF(\overline{y}) = [0\ 0\ \cdots\ 0]$), então podemos desenvolver F ao redor de $\overline{y}$ usando seu polinômio de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem, obtendo

$$\begin{aligned} F(y) &= F(\overline{y}) + JF(\overline{y})(y-\overline{y}) + \frac{1}{2!}(y-\overline{y})^t Hess\ F(\overline{y})(y-\overline{y}) + R(y) \\ &= F(\overline{y}) + \frac{1}{2!}(y-\overline{y})^t Hess\ F(\overline{y})(y-\overline{y}) + R(y) \end{aligned}$$

onde $Hess\ F(\overline{y})$ é a matriz Hessiana de F no ponto $\overline{y}$, e tem-se

$$\lim_{y \to \overline{y}} \frac{R(y)}{\|y-\overline{y}\|^2} = 0.$$

Corolário 1 *Nas condições acima:*

(a) Se $Hess\ F(\overline{y})$ é definida positiva então $\overline{y}$ é um ponto de mínimo local estrito de F, isto é, existe $\delta > 0$ com $B_\delta(\overline{y}) \subset \Omega$ tal que
$$F(y) > F(\overline{y}),\ \forall y \in B_\delta(\overline{y}) \setminus \{\overline{y}\}.$$

(b) se $Hess\ F(\overline{y})$ é definida negativa então $\overline{y}$ é um ponto de máximo local estrito de F, isto é, existe $\delta > 0$ com $B_\delta(\overline{y}) \subset \Omega$ tal que
$$F(y) < F(\overline{y}),\ \forall y \in B_\delta(\overline{y}) \setminus \{\overline{y}\}.$$

(c) se $Hess\ F(\overline{y})$ é indefinida então $\overline{y}$ é um ponto de sela de F, isto é, existem sequências y_k e z_k tendendo a $\overline{y}$ tais que
$$F(y_k) < F(\overline{y}) < F(z_k),\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

Exercício 6 Prove pelo menos um dos ítens do corolário anterior.

Exercício 7 Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 2b\sin xy - \cos xy.$$
Mostre que $(0,0)$ é um ponto crítico de f e para cada $b \in \{-3, -1/2, 1/2, 3\}$, decida se $(0,0)$ é ponto de mínimo local, ou ponto de máximo local, ou ponto de sela de f.

Exercício 8 Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + \sin(2z^2 + 6xy + 10xz) + 12yz + x^3 + y^4 + \cos(xz^3 + y^2z^5)$$
Mostre que $(0,0,0)$ é um ponto crítico de f e decida se $(0,0,0)$ é ponto de mínimo local, ou ponto de máximo local, ou ponto de sela de f.

Exercício 9 Em cada item, dê exemplo de função de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ da forma apresentada com ponto crítico na origem do tipo pedido, e **justifique**.

(a) $G(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 - \sin(x^4 + y^4)$ com mínimo local estrito na origem.

(b) $H(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 - \sin(x^2 + y^2)$ com mínimo local estrito na origem.

(c) $F(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \sin(x^2 + y^2)$ com sela na origem.

Exercício 10 Em cada item, dê condições sobre os parâmetros a, b, c, d e e de forma que a função de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ apresentada tenha ponto crítico na origem do tipo pedido, e **justifique**.

(a) $G(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 - \sin(x^4 + y^4)$ com mínimo local estrito na origem.

(b) $H(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 - \sin(x^2 + y^2)$ com mínimo local estrito na origem.

(c) $F(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \sin(x^2 + y^2)$ com sela na origem.

2 Máximos e Mínimos Condicionados

Sejam $n > m$ e $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m) : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ de classe C^1.

Seja $c \in Im\, g$ um valor regular de g, isto é, o conjunto não vazio

$$\mathcal{A} = \{y \in \Omega \mid g(y) = c\}$$

só tem pontos regulares de g.

Pelo Teorema das Funções Implícitas, $\mathcal{A}$ é uma superfície regular de dimensão $n - m$, seu espaço tangente num ponto $a \in \mathcal{A}$ tem dimensão $n - m$ e coincide com $\ker Dg(a)$, e o espaço normal a $\mathcal{A}$ em a tem dimensão m e é gerado por $\nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \ldots, \nabla g_m(a)$.

Se $f : \Omega \to \mathbf{R}$ é uma função de classe C^1, a direção de maior crescimento de f em y é dada por $\nabla f(y)$.

Em vista disto, é intuitivo o seguinte resultado:

Proposição 5 *Sejam $\mathcal{A}$ e f nas condições anteriores.*

Se $\overline{a} \in \mathcal{A}$ é um ponto de máximo ou de mínimo de f restrita a $\mathcal{A}$, então $\nabla f(\overline{a})$ é vetor normal a $\mathcal{A}$ em $\overline{a}$.

Disto resulta um critério para calcular pontos de máximo e pontos de mínimo de f restrita a $\mathcal{A}$ (máximos e mínimos condicionados).

Corolário 2 *Sejam $\mathcal{A}$ e f nas condições anteriores.*

Se a é ponto de máximo ou de mínimo de f restrita a $\mathcal{A}$ então existem m números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (chamados **multiplicadores de Lagrange***) tais que*

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \lambda_2 \nabla g_2(a) + \ldots, \lambda_m \nabla g_m(a).$$

Exercício 11 Considere $f(x, y) = 3x^4 + 8x^2y^3 + 32y^4$. Use a técnica dos multiplicadores de Lagrange para achar o valor máximo de f sobre a elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$.

3 Aplicação de Máximos e Mínimos ao estudo da Estabilidade de Liapunov em EDO's

Esta seção, originariamente presente no texto, no momento foi retirada do arquivo disponibilizado porquê se refere a Equações Diferenciais Ordinária não Lineares.