UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

9. Plano

LOB 1036 - Geometria Analítica

Profa. Paula C P M Pardal

REVISÃO

- Produtos de Vetores.
  - Produto Escalar → módulo; ortogonalidade entre dois vetores.
  - Produto Vetorial → paralelismo entre dois vetores; vetor simultaneamente ortogonal a dois vetores.
  - Produto Misto → coplanaridade entre vetores.
- A Reta.
  - Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados.
  - Ângulo de duas retas.
  - Paralelismo, Ortogonalidade, Coplanaridade entre duas retas.
  - Posição relativa de duas retas → Intersecção de duas retas.
  - Reta ortogonal a duas retas.

1. Considerações Iniciais

- Considere um plano α no $\mathbb{R}^3$e:

i. $\sum\left(O, \{\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\}\right)$: sistema de coordenadas cartesiano (do $\mathbb{R}^3$);

ii. $A(x_0, y_0, z_0)$: ponto conhecido de α $(A \in \alpha)$;

iii. $\vec{n} = a\vec{\mathrm{i}} + b\vec{\mathrm{j}} + c\vec{\mathrm{k}}$: vetor normal ao plano α $(\vec{n} \perp \alpha)$, não nulo.

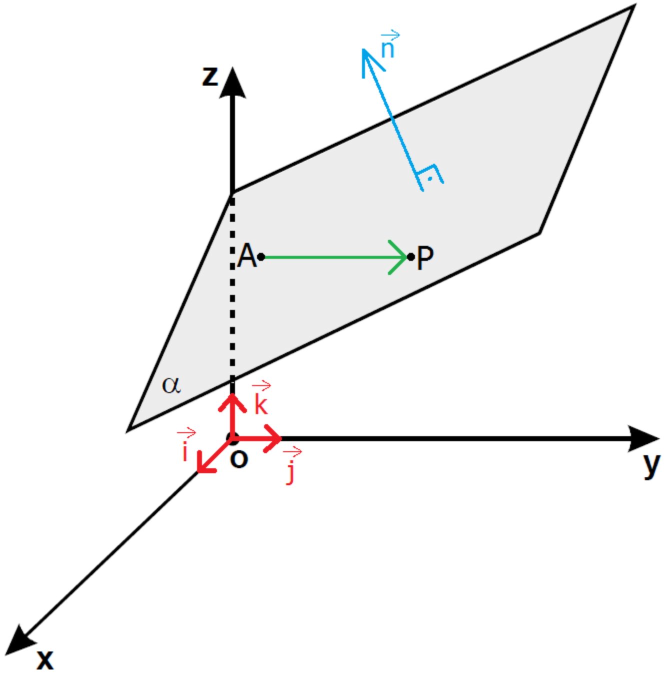
2. Equação Geral do Plano

- O plano α pode ser definido como o ***lugar geométrico*** de todos os pontos do ***espaço cartesiano*** $P(x, y, z)$ tais que: $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$.

- Desta forma, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, isto é:

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

  - ***Equação geral ou cartesiana*** do plano α.
  - $\vec{n}$: vetor normal ao plano.



3. Determinação de um Plano

- Até o momento, foi visto que um plano qualquer é determinado se forem conhecidos um ponto que pertence a ele e um vetor normal a ele ➔ existem diversas formas de se determinar um plano, em que estes dois elementos ficam evidentes.

EXISTE APENAS UM PLANO QUE:

i. Passa por um ponto A e é ∥ a dois vetores LI $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$;

ii. Passa por dois pontos A e B e é ∥ a $\vec{v}$, LI com o vetor $\overrightarrow{AB}$;

iii. Passa por três pontos A, B, C não colineares;

iv. Contém duas retas concorrentes r_1 e r_2;

v. Contém duas retas paralelas não coincidentes r_1 e r_2;

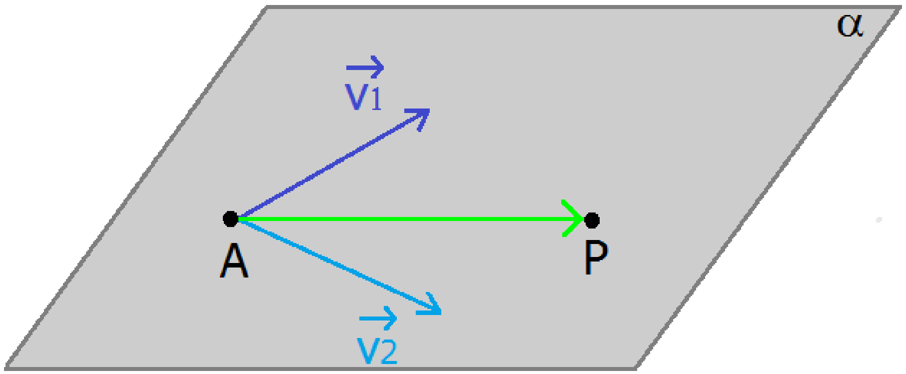
vi. Contém uma reta r e um ponto $B \notin r$.

Observação

- Existe o caso em que um *plano* pode ser *determinado a partir de três vetores nele contidos*.

Seja o plano α que passa pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores LI $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Um ponto qualquer do espaço cartesiano $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ forem LD. Portanto:

$$\alpha: [\,\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\,] = 0$$

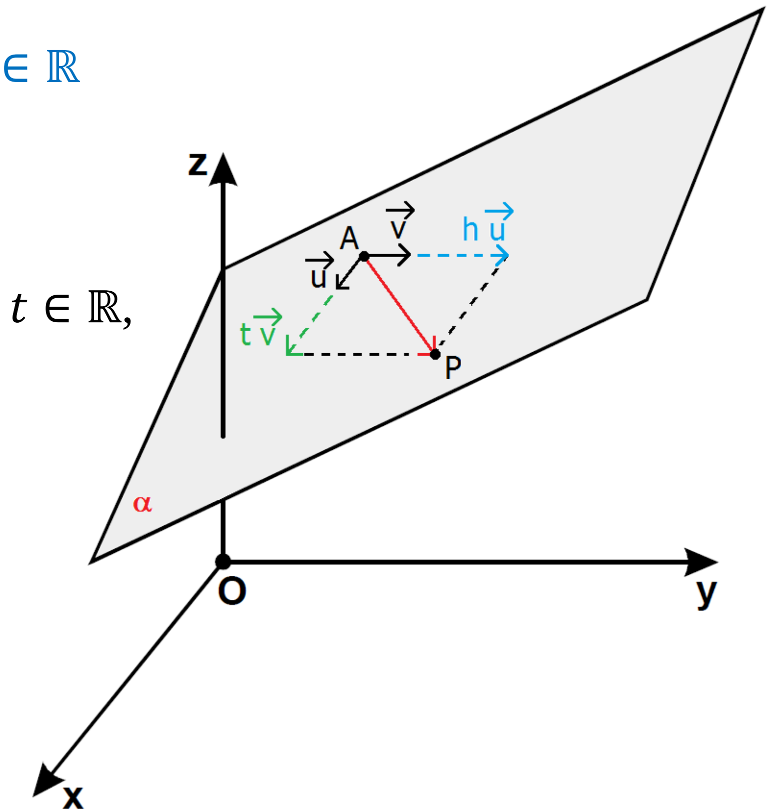


- Sejam um ponto $A(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores LI $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, paralelos ao plano. Um ponto $P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow$ existirem números reais h e t tais que:

$$\overrightarrow{AP} = h\,\vec{u} + t\,\vec{v},\ \ h, t \in \mathbb{R}$$

- Substituindo as coordenadas dos vetores:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2),\ h, t \in \mathbb{R},$$



tem-se que: $\alpha: \begin{cases} x = x_0 + h\,a_1 + t\,a_2 \\ y = y_0 + h\,b_1 + t\,b_2, h, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + h\,c_1 + t\,c_2 \end{cases}$

- ***Equações paramétricas*** do plano α.

I. PLANO QUE PASSA PELA ORIGEM

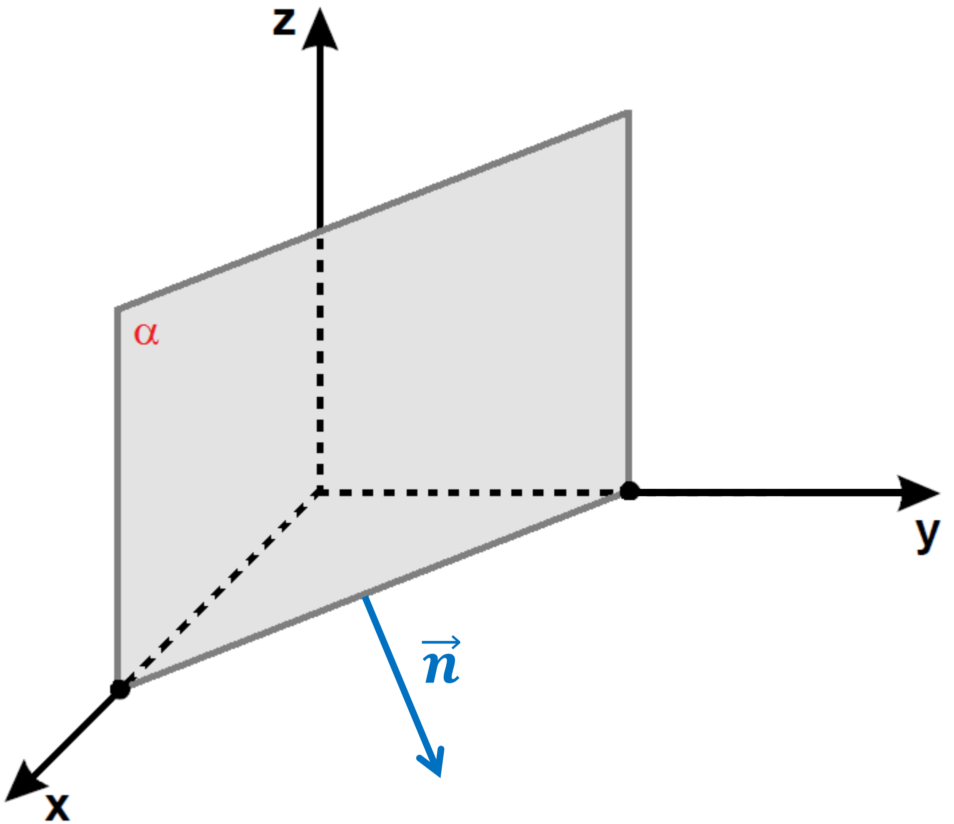
- Se o plano $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ passa pela origem $\Rightarrow$ passa pelo ponto $O(0, 0, 0)$.

$$\therefore \text{O ponto de coordenadas } x_0 = y_0 = z_0 = 0 \in \alpha$$

- E a eq. $\alpha: ax + by + cz = 0$ representa o plano que passa pela origem.

II. PLANOS ∥ AOS EIXOS COORDENADOS

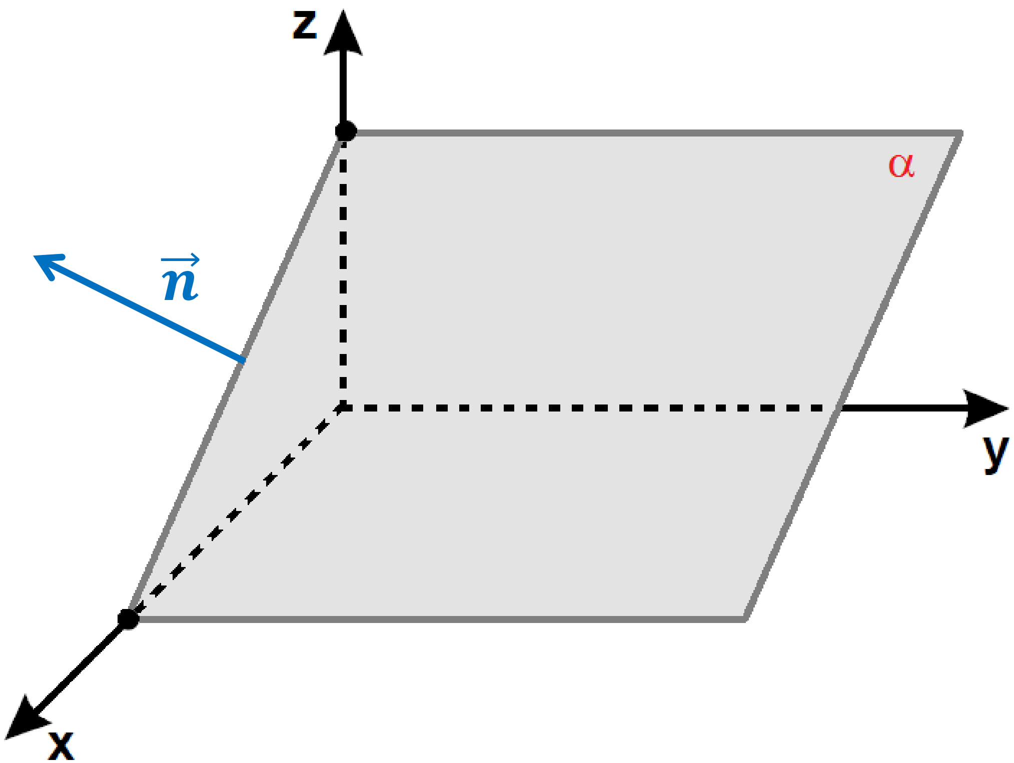
- $c = 0$: $\vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz$ (se $c = 0, \vec{n} \parallel Oxy$ e $\perp Oz$) $\therefore \alpha \parallel Oz$.



Eq. geral dos planos ∥ Oz:

$$\alpha: ax + by + d = 0$$

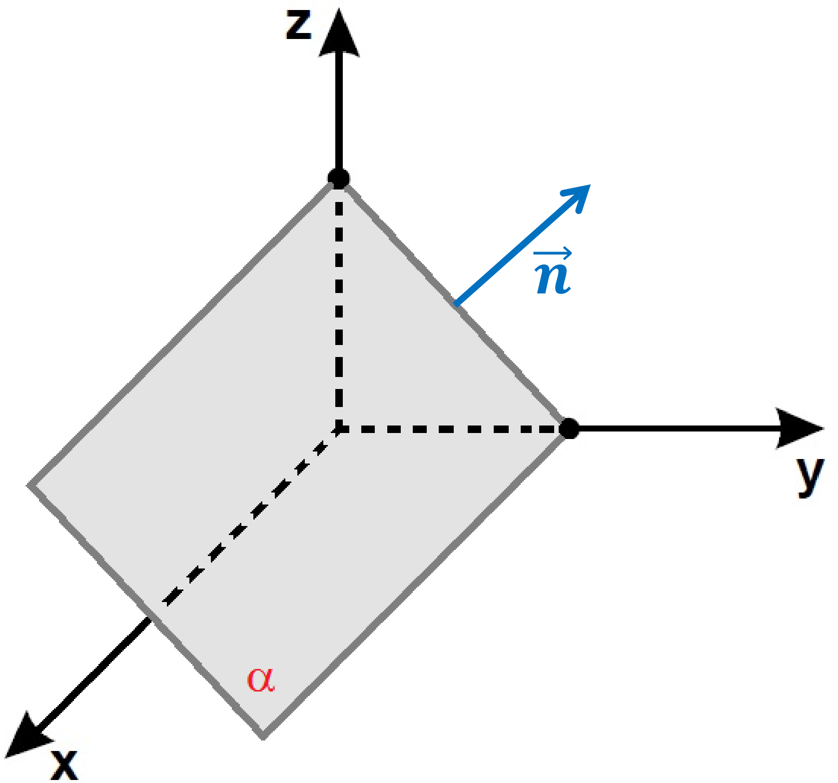
- $b = 0$: $\vec{n} = (a, 0, c) \perp \mathrm{O}y$ (se $b = 0, \vec{n} \parallel \mathrm{O}xz$ e $\perp \mathrm{O}y$) $\therefore \alpha \parallel \mathrm{O}y$.



Eq. geral dos planos $\parallel$ Oy:

$$\alpha: ax + cz + d = 0$$

- $a = 0$: $\vec{n} = (0, b, c) \perp \mathrm{O}x$ (se $a = 0, \vec{n} \parallel \mathrm{O}yz$ e $\perp \mathrm{O}x$) $\therefore \alpha \parallel \mathrm{O}x$.

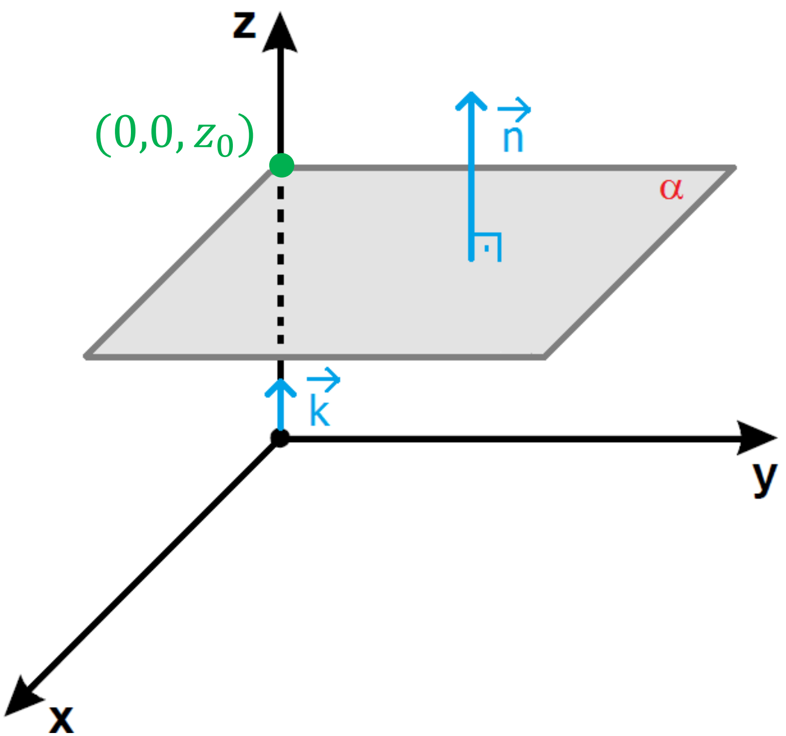


Eq. geral dos planos $\parallel \mathrm{O}x$:

$$\alpha\colon by + cz + d = 0$$

III. PLANOS ∥ AOS PLANOS COORDENADOS

- $a = b = 0$: $\vec{n} = (0, 0, c) = c(0,0,1) = c\vec{k} \therefore \alpha \parallel \mathrm{O}xy$.



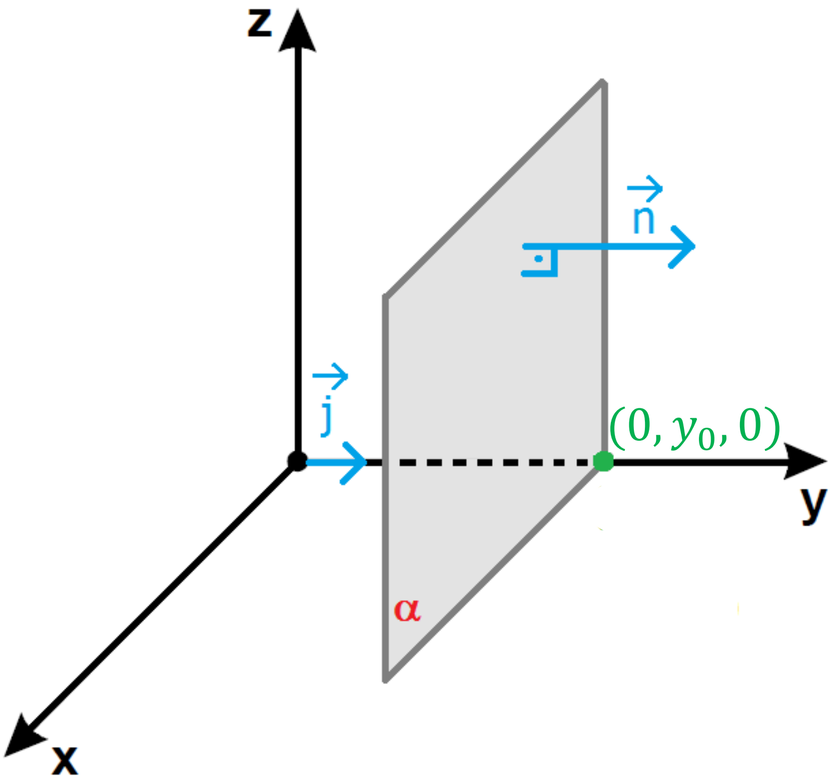
Eq. geral dos planos ∥ $\mathrm{O}xy$:

$$\alpha\colon\ cz + d = 0$$

como $c \neq 0$:

$$\alpha\colon z = -\frac{d}{c} = z_0$$

- $a = c = 0$: $\vec{n} = (0, b, 0) = b(0,1,0) = b\vec{j} \therefore \alpha \parallel Oxz$.



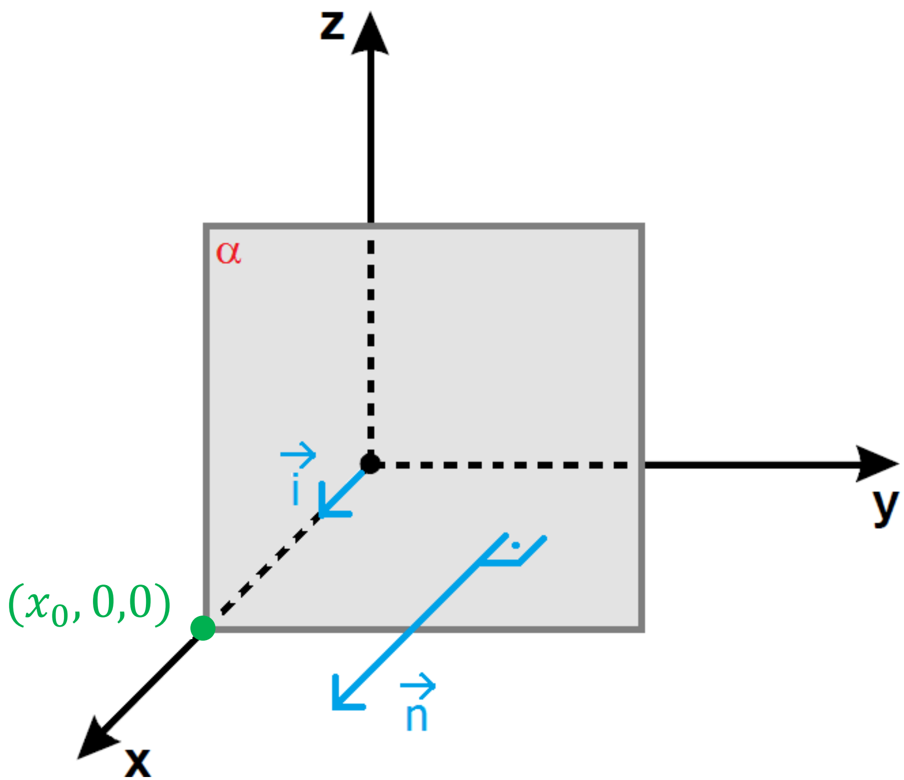
Eq. geral dos planos $\parallel Oxz$:

$$\alpha: by + d = 0$$

como $b \neq 0$:

$$\alpha: y = -\frac{d}{b} = y_0$$

- $b = c = 0$: $\vec{n} = (a, 0, 0) = a(1,0,0) = a\vec{i} \therefore \alpha \parallel Oyz$.



Eq. geral dos planos $\parallel$ Oyz:

$$\alpha: ax + d = 0$$

como $a \neq 0$:

$$\alpha: x = -\frac{d}{a} = x_0$$

EXERCÍCIOS

1. Seja o plano $\alpha: 3x + y - z - 4 = 0$. Calcule:

   a) O valor de k para que o ponto $P(k, 2, k-1) \in \alpha$; $k = {}^{1}/_{2}$

   b) O ponto que pertence ao plano α de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota.

   $P(2, -4, -2)$

2. Escreva a eq. geral do plano α que:

   a) Passa pelos pontos $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -1, 1)$ e $C(1, 1, -1)$; $\alpha: 4x + 5y + 3z - 6 = 0$

   b) Passa pelo ponto $A(6, 0, -2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{i}$ e $-2\vec{j} + \vec{k}$. $\alpha: y + 2z + 4 = 0$

3. Determine a eq. geral do plano paralelo ao eixo Oz e que contém os pontos $A(0,3,1)$ e $B(2,0,-1)$.

$\alpha\colon\ 3x+2y-6=0$

4. Escreva a eq. geral do plano determinado pelos pontos $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$ e $C(0,2,5)$.

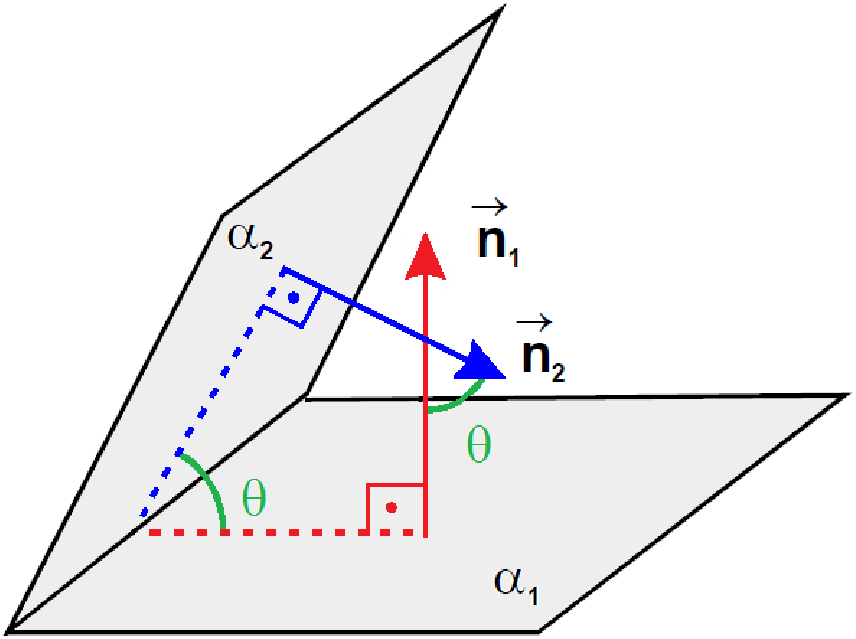
$\alpha\colon\ x=0$ ou $\alpha\colon\ Oyz$

5. Estabeleça as eqs. paramétricas do plano determinado pelos pontos $A(1,1,0)$, $B(2,1,3)$ e $C(-1,-2,4)$.

$$\alpha\colon \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3h + 4t \end{cases}, h, t \in \mathbb{R} \text{ (para } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \ e\ \vec{v} = \overrightarrow{AC})$$

6. Ângulo entre Dois Planos

- Sejam os planos α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e α_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, cujos respectivos vetores normais são $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$.



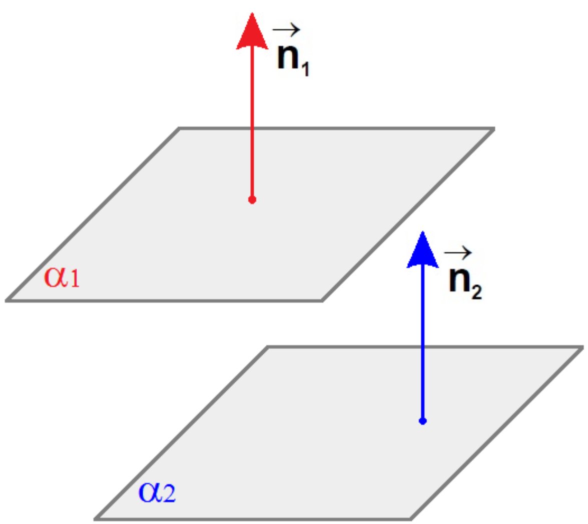
Ângulo entre dois planos é o **menor ângulo** que o vetor normal de α_1 forma com o vetor normal de α_2:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|}\,,\ 0 \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{2}$$

- Sejam os planos α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e α_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ e seus respectivos vetores normais $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$.

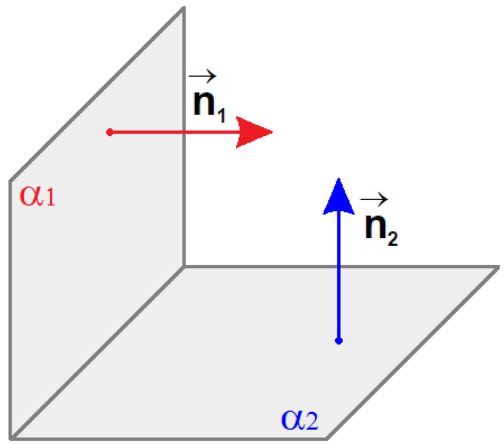
Condição de Paralelismo:

$$\overrightarrow{n_1} = k\,\overrightarrow{n_2}, k \in \mathbb{R}$$



Condição de Ortogonalidade:

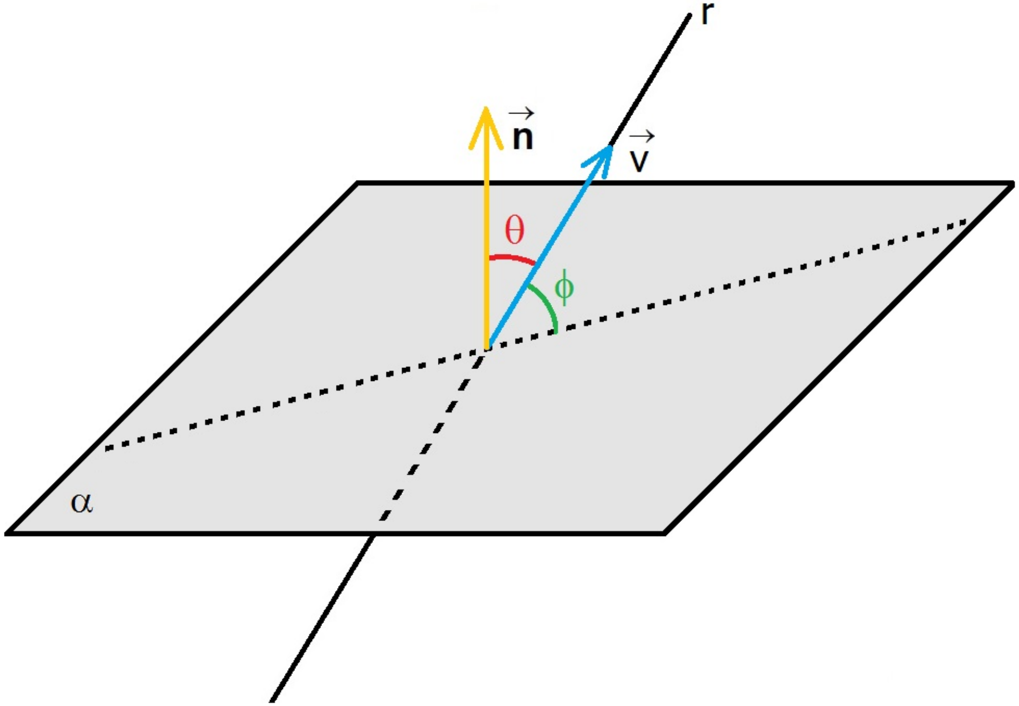
$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$



7. Ângulo entre uma Reta e um Plano

- Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano α com vetor normal $\vec{n}$.

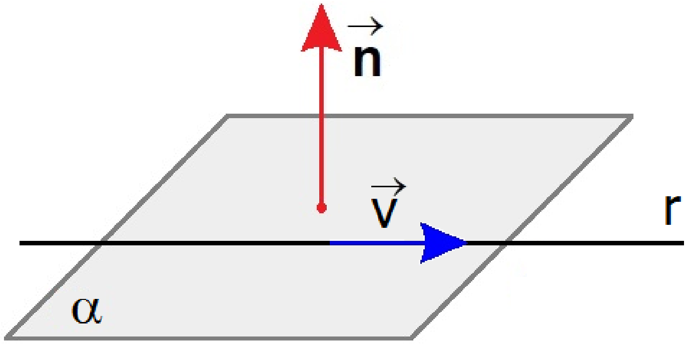
- Sabe-se que: $\theta + \phi = \frac{\pi}{2} \therefore \cos\theta = \text{sen}\phi$.



Assim, a eq. para o cálculo do **menor ângulo** entre dois vetores pode ser reescrita da seguinte forma:

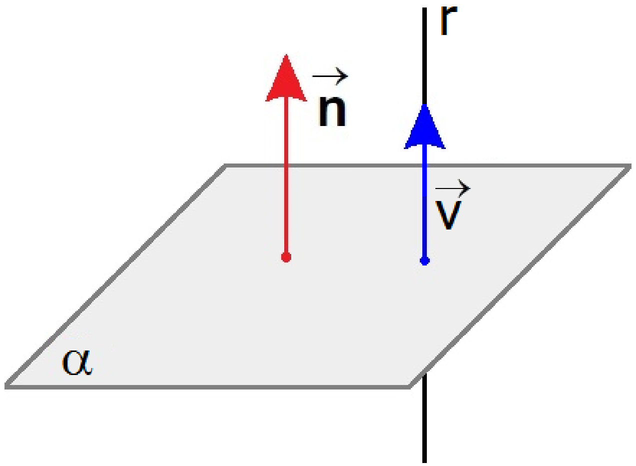
$$\text{sen}\phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

- Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano α com vetor normal $\vec{n}$.



- **Condição de Paralelismo:**
  - O paralelismo de r e α implica a ***ortogonalidade*** entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$, ou seja:

    Se $r \parallel \alpha \;\therefore\; \vec{v} \perp \vec{n} \quad \rightarrow \qquad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$



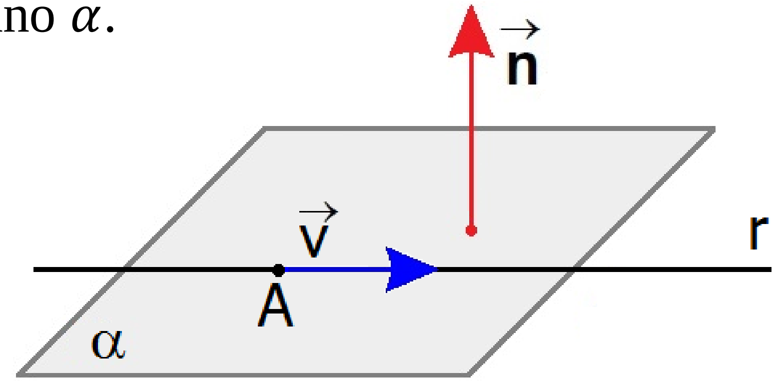
- **Condição de Ortogonalidade:**
  - A ortogonalidade de r e α implica o ***paralelismo*** entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$, ou seja:

    Se $r \perp \alpha \;\therefore\; \vec{v} \parallel \vec{n} \quad \rightarrow \qquad \vec{v} = k\,\vec{n},\;\; k \in \mathbb{R}$

- Uma reta está contida em um plano se satisfizer as ***duas condições*** abaixo:

I. O vetor diretor $\vec{v}$ da reta r é ortogonal ao vetor normal $\vec{n}$ ao plano α; **E**

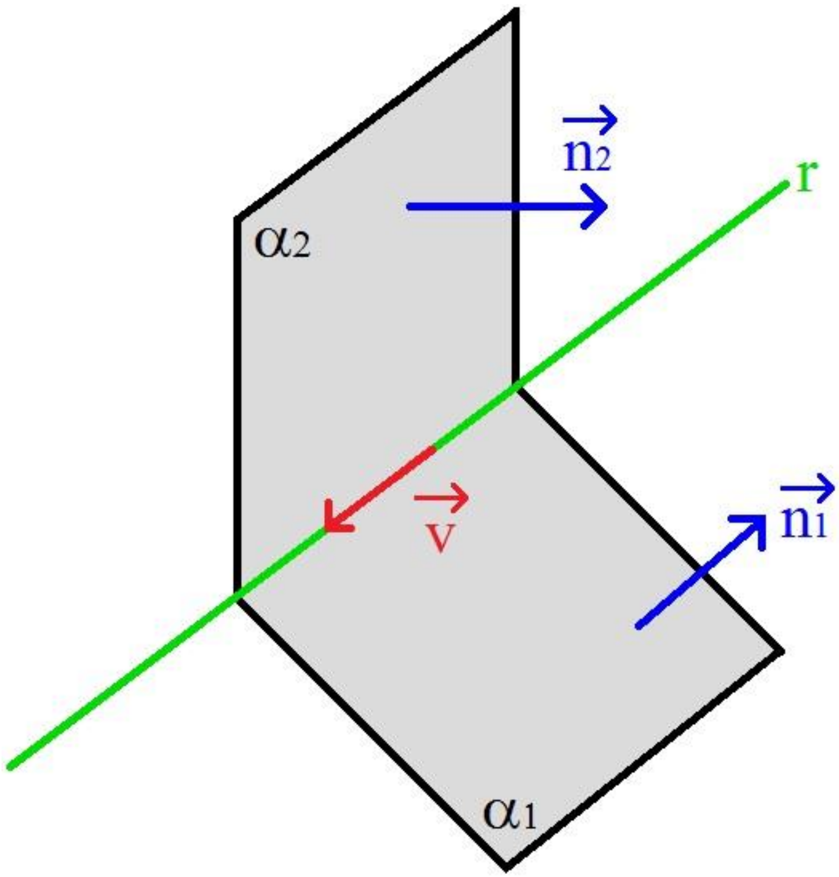
II. Um ponto qualquer A pertence a reta r e ao plano α.



Observação:

- Se dois pontos A e B pertencem à reta r e ao plano α, pode-se afirmar que a reta está contida no plano.

8. Intersecção de Dois Planos



- A intersecção entre dois planos ***não paralelos*** α_1 e α_2 é uma reta r, cujas equações se deseja determinar.

- Um ponto pertence à reta intersecção r se suas coordenadas satisfizerem, ***concomitantemente***, às equações dos planos α_1 e α_2.

Exemplo

- Considere os planos não paralelos:

$$\alpha_1:\ 5x - 2y + z + 7 = 0 \text{ e } \alpha_2:\ 3x - 3y + z + 4 = 0$$

A reta intersecção satisfaz as eqs. de α_1 e de α_2:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 & \text{(I)} \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

- Sistema indeterminado, cuja solução é encontrada fazendo: **para *y*:** (I) – (II) e, **para *z*:** 3(I) – 2(II). A solução do sistema é:

$$\begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases}$$

- Estas são as eqs. reduzidas da reta intersecção entre os planos α_1 e α_2, cujos pontos são da seguinte forma: $(x, y, z) = (x, -2x - 3, -9x - 13)$.

9. Intersecção de Reta com Plano

- A intersecção entre a reta r: $\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$ e o plano α: $ax + by + cz + d = 0$ é um ponto I, cujas coordenadas (x_i, y_i, z_i) devem satisfazer o sistema formado pelas eqs. reduzidas da reta r e pela eq. cartesiana do plano α.

- ***Em outras palavras*****:** o ponto $I(x_i, y_i, z_i)$ será intersecção da reta r com o plano α se for solução do sistema:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

1. Determine o ângulo entre os planos α_1: $3x + 2y - 6 = 0$ e α_2: $0xz$.

$\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) \sim 56°$

2. Sejam os planos $\alpha_1 : 2mx + 2y - z = 0$ e $\alpha_2 : 3x - my + 2z - 1 = 0$. Encontre m de forma que tais planos sejam perpendiculares.

m = ½

3. Determine o ângulo que a reta $r: \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{-y}{4} = \frac{z+1}{5} \right.$ forma com o plano α: $2x - y + 7z - 6 = 0$.

$\phi = \frac{\pi}{3}$

4. Determine as eqs. reduzidas, em termos de x, da reta que passa pelo ponto $A(2, -1, 4)$ e é perpendicular ao plano α: $x - 3y + 2z - 1 = 0$.

$r: \begin{cases} y = -3x + 5 \\ z = 2x \end{cases}$

5. Calcule os valores de m e n para que a reta $r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 4 \end{cases}$ esteja contida no plano α: $nx + my - z - 2 = 0$.

$m = -2$; $n = 3$

6. Determine as eqs. paramétricas da reta r, intersecção entre os planos $\alpha_1\colon z = 3$ e $\alpha_2\colon 2x + y - 2 = 0$.

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 \end{cases} \text{ ou } r\colon \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

7. Determine o ponto de intersecção da reta $r\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$, com o plano $\alpha\colon 2x + y - z - 4 = 0$.

$I(3, -5, -3)$

8. Estabeleça as eqs. simétricas da reta que passa pelo ponto $A(3,6,4)$, intercepta o eixo Oz e é paralela ao plano $\alpha\colon x - 3y + 5z - 6 = 0$.

$$r\colon x - 3 = \frac{y-6}{2} = z - 4$$

9. Encontre os pontos de intersecção I_1, I_2 e I_3 da reta $r\colon \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ com os planos coordenados Oxy, Oxz e Oyz, respectivamente.

$I_1(2,1,0)$; $I_2\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$; $I_3(0, -3, 2)$