

Lista 3: Regra da Cadeia, Classes C^k e Polinômio de Taylor

Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio

Nos exercícios 1-4 abaixo, prove, usando a Regra da Cadeia, que a função F é diferenciável no ponto $\bar{x}$ e calcule sua diferencial em $\bar{x}$.

- 1) $\bar{x} = (1, 1)$,

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \det \begin{bmatrix} x - y & \log 1 + x^2 + y^2 \\ e^x & \cos y \end{bmatrix}$$

(Não é para expandir o determinante).

- 2) $\bar{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$, $T: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ transformação linear,

$$F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \langle T(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle$$

- 3) $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto, $\bar{x} \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \Omega$ diferenciável, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{x} \mapsto a_n f^n(\mathbf{x}) + \dots + a_1 f(\mathbf{x}) + a_0$$

(aqui, $f^2(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{x}))$, $f^3(\mathbf{x}) = f(f^2(\mathbf{x}))$ e assim por diante).

- 4) $\bar{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$, $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^p$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciáveis em $\bar{x}$,
 $L: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ bilinear,

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$\mathbf{x} \mapsto L(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$$

5) Consideramos novamente o conjunto $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais como equivalente ao $\mathbb{R}^{n^2}$. Considere a função $f: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = A^t A$. Usando a Regra da Cadeia (mais especificamente, o ex. 4), prove que f é diferenciável e calcule sua diferencial em cada ponto.

Para os exercícios 6-9 abaixo, usaremos a seguinte definição:

Definição: Sejam $M \subset \mathbb{R}^p$ um conjunto não-vazio, $\bar{\mathbf{x}} \in M$ e $F: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função contínua (um *campo de vetores*). Dizemos que o campo F é *ortogonal a M no ponto $\bar{\mathbf{x}}$* se, para qualquer curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^p$, com imagem contida em M , diferenciável em $t = 0$ e com $\gamma(0) = \bar{\mathbf{x}}$, vale:

$$\langle \dot{\gamma}(0), F(\bar{\mathbf{x}}) \rangle = 0$$

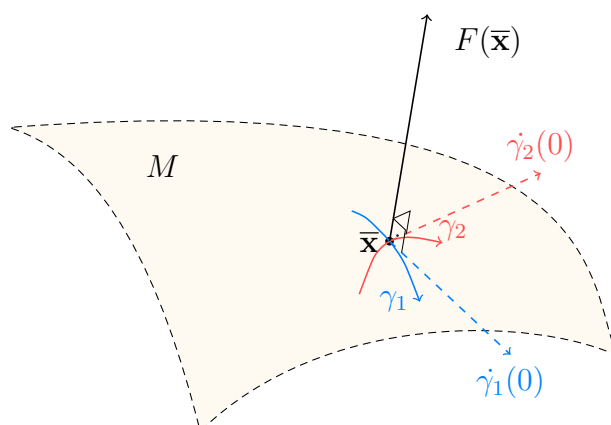


Figura 1

Dizemos que o campo F é *normal a M* se F é ortogonal a M em todos os pontos de M .

6) Prove que:

- (a) se $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, então um campo de vetores $F = (F_x, F_y, F_z)$ é normal a M se, e somente, se, $F_x(\mathbf{x}) = F_y(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in M$;

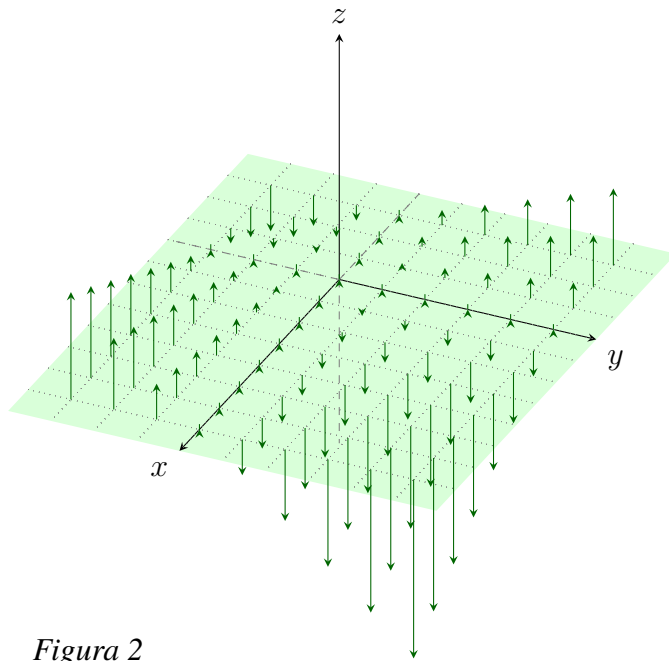


Figura 2

- (b) se $M = \{\bar{\mathbf{x}}\}$ consiste de um ponto só, então qualquer campo F é ortogonal a M ;
 - (c) se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto interior de M , então nenhum campo F é ortogonal a M em $\bar{\mathbf{x}}$. Conclua que se $\mathring{M} \neq \emptyset$, então nenhum campo pode ser normal a M ;
 - (d) (*desafio*) se $M = [0, 1] \times [0, 1]$ é o quadrado unitário no plano, então em qualquer ponto $(x, y) \in M$ há campos F ortogonais a M em (x, y) . Existem campos F normais a M ?
- 7) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Fixemos $c \in f(\Omega)$ e seja $M = f^{-1}(\{c\}) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) = c\}$ (M é o que chamamos de *conjunto de nível c da função f*). Mostre que:
- (a) A função $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $F(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x})$ é contínua, isto é, é um campo de vetores;
 - (b) O campo $F = \text{grad } f$ é normal a M . Assim, o campo gradiente de uma função é normal aos seus conjuntos de nível.
- 8) Prove que, se $M = S(\mathbf{0}, 1)$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^p$, o campo *identidade*

$$F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$$

é normal a M (use o ex. 7).

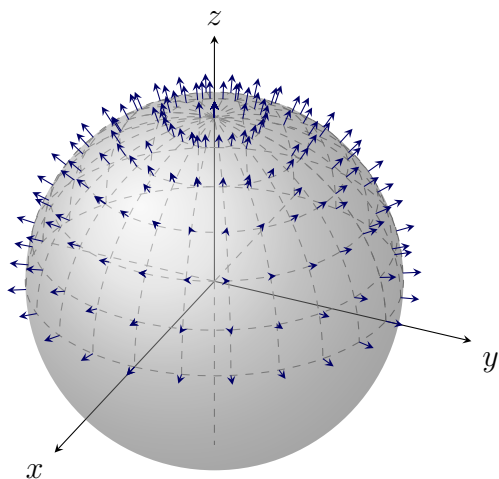


Figura 3

9) (Campo elétrico na superfície de um condutor) Seja C um *condutor elétrico perfeito* – isto é, um objeto sólido maciço e sem quinas (cubos não valem!) no espaço 3D em que cargas elétricas têm total liberdade de movimentação – em equilíbrio eletrostático. Se S é a superfície de C , prove que o campo elétrico $\vec{E}$ é sempre normal a S (use o ex. 7).

10) Use a Desigualdade do Valor Médio para provar o seguinte: se $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ é um aberto conexo não-vazio e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ é uma função diferenciável tal que $Df(\mathbf{x}) = 0$ é a transformação linear nula para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, então f é constante.

Derivadas de Ordem Superior e Classes C^k

Nos exercícios 11-14 abaixo, F é de classe C^1 . Encontre o maior $1 \leq k \leq \infty$ tal que F pertence

à classe C^k , e calcule as derivadas parciais até a ordem indicada.

11) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 - 3y + \sin x \cos 2y$; derivadas parciais até a ordem 2.

12) $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ transformação linear; derivadas parciais até a ordem k_{max} .

13) $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear; derivadas parciais até a ordem k_{max} .

14) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} x^4 y^4 \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

derivadas parciais até a ordem k_{max} .

15) Prove que as funções F dos exs. 1, 2 e 5 são de classe C^∞ .

16) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto. Para cada $1 \leq k \leq \infty$, definimos o conjunto

$$C^k(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é de classe } C^k\}$$

Prove que $C^k(\Omega)$ é um espaço vetorial real, e que, se $f, g \in C^k(\Omega)$, então $fg \in C^k(\Omega)$ (aqui, $fg: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$).

17) (Polinômios) Nesse exercício, daremos uma definição indutiva dos polinômios a n variáveis reais.

Começamos definindo que o único polinômio de grau ≤ -1 é o polinômio nulo $\mathcal{Z}(x_1, \dots, x_n) = 0$. Em seguida, definimos o conjunto dos polinômios de grau ≤ 0 , $\mathcal{P}_0$, que consiste das funções constantes $p(x_1, \dots, x_n) = c$. Em seguida, definimos os polinômios de grau ≤ 1 da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_1 = \{p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists q_1, \dots, q_n, r \in \mathcal{P}_0 \text{ t.q. } p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, (q_1(\mathbf{x}), \dots, q_n(\mathbf{x})) \rangle + r(\mathbf{x})\}$$

Mais geralmente, supondo definidos os polinômios de grau $\leq d$, definimos os polinômios de grau $\leq d + 1$ por:

$$\mathcal{P}_{d+1} = \{p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists q_1, \dots, q_n, r \in \mathcal{P}_d \text{ t.q. } p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, (q_1(\mathbf{x}), \dots, q_n(\mathbf{x})) \rangle + r(\mathbf{x})\}$$

Por indução, assim definimos os polinômios de grau $\leq d$ a n variáveis, para qualquer d . O conjunto de todos os polinômios é então $\mathcal{P} = \bigcup_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_d$. Se p é um polinômio, seu grau é o menor d tal que $p \in \mathcal{P}_d$.

Prove por indução que, se p é um polinômio de grau $\leq d$ a n variáveis e $i \in \{1, \dots, n\}$, então $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ é um polinômio de grau $\leq d - 1$. Conclua que todo polinômio é de classe C^∞ .

Polinômio de Taylor

18) Nos itens abaixo, a função F é de classe C^∞ . Calcule seu polinômio de Taylor de ordem 3 com relação a $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

(a)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \exp\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$$

(b)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} y \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(c)

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Desafios

19) (Outra interpretação da classe C^1) Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ uma função diferenciável definida no aberto Ω . Para cada $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega$, $Df(\bar{\mathbf{x}})$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$.

Recorde agora o espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ das transformações lineares de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$, com soma e multiplicação escalar definidas pontualmente: para $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$S + T: \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) \quad \alpha S: \mathbf{x} \mapsto \alpha S(\mathbf{x})$$

No curso de Álgebra Linear em Matemática III, foi provado que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tem dimensão $d = pq$, e portanto, pode ser considerado equivalente ao $\mathbb{R}^{pq}$.

Considere a função $Df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ cujo valor em $\mathbf{x}$ é a diferencial de f em $\mathbf{x}$, $Df(\mathbf{x})$ (tipicamente chamada de *aplicação diferencial* de f). Como vemos acima, Df pode ser considerada como uma função de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^{pq}$, e, portanto, podemos nos perguntar naturalmente sob que condições Df é contínua, ou até diferenciável.

Prove que:

- (a) $Df = (Df_1, \dots, Df_{pq})$ com $Df_{(i-1)p+j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ para $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$ (isto é, as funções coordenadas de Df são as derivadas parciais);
- (b) f é de classe C^1 (isto é, suas derivadas parciais são contínuas) se, e somente se, a aplicação diferencial de f , Df , é uma função contínua.

20) (Teorema de Schwarz)

- (a) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto do plano e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com derivadas parciais de segunda ordem em Ω . Suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de f são contínuas no ponto $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Dica: Defina, num pequeno retângulo aberto $R = (-\varepsilon, \varepsilon)^2$ com centro $(0, 0)$ (tal que $(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) \in \Omega \forall (h, k) \in R$), as funções

$$u(h, k) = f(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) - f(\tilde{x} + h, \tilde{y})$$

$$v(h, k) = f(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) - f(\tilde{x}, \tilde{y} + k)$$

$$w(h, k) = f(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) - f(\tilde{x} + h, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, \tilde{y} + k) + f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Observe que $w(h, k) = u(h, k) - u(0, k) = v(h, k) - v(h, 0)$. Use o Teorema do Valor Médio para segmentos paralelos aos eixos coordenados quatro vezes para obter

$$u(h, k) - u(0, k) = hk \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\tilde{x} + s_1 h, \tilde{y} + s_2 k)$$

$$v(h, k) - v(h, 0) = hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\tilde{x} + t_1 h, \tilde{y} + t_2 k)$$

para certos $s_1 = s_1(h, k), s_2 = s_2(h, k), t_1 = t_1(h, k), t_2 = t_2(h, k) \in (0, 1)$. Conclua dividindo por hk , tomando o limite e usando a continuidade de $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ e $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$ em $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

- (b)** O caso geral é o seguinte: Ω é um aberto do $\mathbb{R}^p$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ é uma função de classe C^1 com derivadas parciais de segunda ordem em Ω , e as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas no ponto $\bar{x}$; então para quaisquer $i \in \{1, \dots, q\}$ e $j, k \in \{1, \dots, p\}$ vale

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{\mathbf{x}})$$

Mostre que o caso geral é consequência do caso do item **(a)**. *Dica:* Fixados $\bar{\mathbf{x}}, i, j, k$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $R = (\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (\bar{x}_p - \varepsilon, \bar{x}_p + \varepsilon) \subset \Omega$ e defina $\phi_{i,j,k}: (\bar{x}_j - \varepsilon, \bar{x}_j + \varepsilon) \times (\bar{x}_k - \varepsilon, \bar{x}_k + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_{i,j,k}(x, y) = f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{j-1}, x, \bar{x}_{j+1}, \dots, \bar{x}_{k-1}, y, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_p)$$

Aplique o item **(a)** a $\phi_{i,j,k}$ e conclua o resultado.

21) (Existência de Funções Teste)

(a) Mostre que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é de classe C^∞ . *Dica:* Mostre que, se f é de classe C^k e $f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ para $x > 0$, onde p_k é um polinômio, então $f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ para $x > 0$, onde p_{k+1} é também um polinômio.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0$ para qualquer polinômio p . Conclua que $f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k+1)}(x) = 0$, e portanto, f é de classe C^{k+1} . Conclua por indução que f é de classe C^∞ .

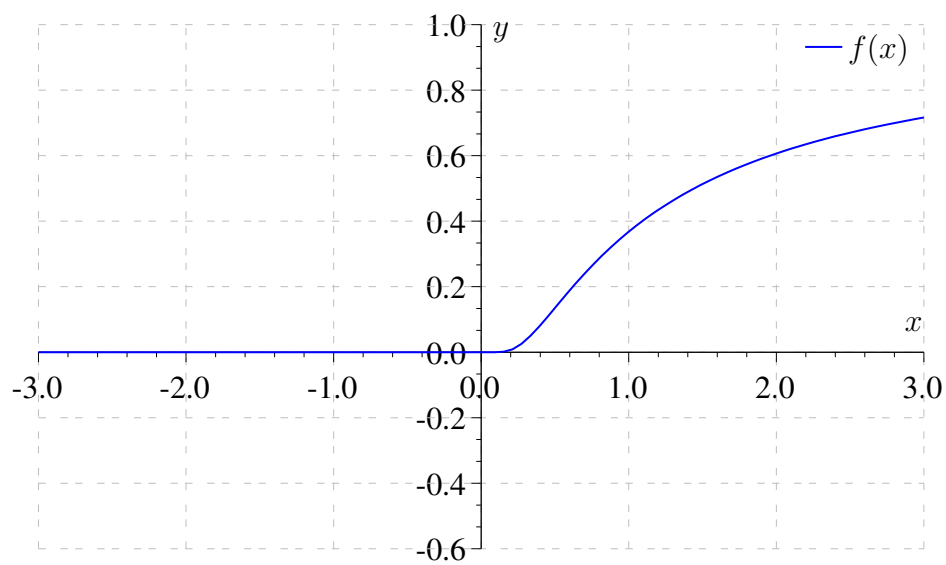


Figura 4

(b) Sejam $a < b$ fixados. Defina $h_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_{a,b}(x) = \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)}$$

onde f é a função do item (a). Mostre que $h_{a,b}$ é de classe C^∞ e que

$$\begin{cases} h_{a,b}(x) = 1 & \text{se } x \leq a \\ 0 < h_{a,b}(x) < 1 & \text{se } a < x < b \\ h_{a,b}(x) = 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

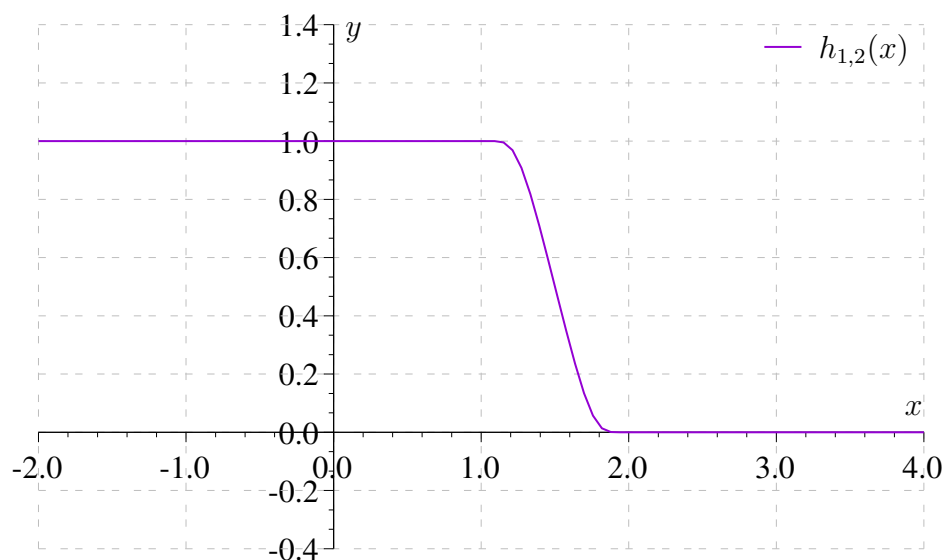


Figura 5

(c) Sejam $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^p$, $0 < r_1 < r_2$ quaisquer. Mostre que a função $\varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = h_{\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}}(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2)$$

é de classe C^∞ , é constante = 1 em $\overline{B(\bar{\mathbf{x}}, r_1)}$, é constante = 0 em $B(\bar{\mathbf{x}}, r_2)^c$ e satisfaz $0 < \varphi(\mathbf{x}) < 1 \forall \mathbf{x} \in B(\bar{\mathbf{x}}, r_2) \setminus \overline{B(\bar{\mathbf{x}}, r_1)}$.

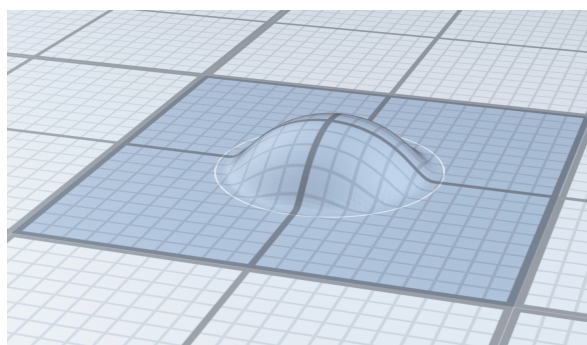


Figura 6

(d) Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p$ e Ω um aberto que contém K . Mostre que

existem uma função $\psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e L compacto tais que $K \subset L \subset \Omega$, $\psi \equiv 1$ em K e $\psi \equiv 0$ em L^c .

Ideia da prova: Para cada $\mathbf{x}$ em K , sejam $B_{\mathbf{x}} \subset B'_{\mathbf{x}}$ bolas abertas centradas em $\mathbf{x}$ tais que

$$\overline{B_{\mathbf{x}}} \subset B'_{\mathbf{x}} \subset \overline{B'_{\mathbf{x}}} \subset \Omega$$

Extraia uma subcobertura finita $\{B_i := B_{\mathbf{x}_i}\}_{i=1}^N$. Para cada $i = 1, \dots, n$, seja φ_i a função φ do item (c) com $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i$, $r_1 =$ raio de B_i e $r_2 =$ raio de $B'_i := B'_{\mathbf{x}_i}$. Tome $L = \bigcup_{i=1}^N \overline{B'_i}$.

Defina $\Lambda: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) + \prod_{i=1}^N (1 - \varphi_i(\mathbf{x}))$$

Termine a prova mostrando que Λ é estritamente positiva e que

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Lambda(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x})$$

satisfaz as condições do enunciado.

Observação: Se $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, definimos o seu *suporte* como

$$\text{supp } f := \overline{\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto. Para $1 \leq k \leq \infty$, definimos o espaço $C_c^k(\Omega)$ das funções C^k com suporte compacto em Ω como

$$C_c^k(\Omega) = \{f \in C^k(\mathbb{R}^p) \mid \text{supp } f \text{ é compacto e } \text{supp } f \subset \Omega\}$$

Não é difícil ver que cada $C_c^k(\Omega)$ é um espaço vetorial de funções, e que

$$C_c^1(\Omega) \supset C_c^2(\Omega) \supset C_c^3(\Omega) \supset \cdots \supset C_c^\infty(\Omega), \quad C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(\Omega)$$

Segue do item **(d)** que o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ tem dimensão infinita. Seus elementos são tipicamente chamados de *funções teste* (em inglês, *bump functions*) *suportadas em Ω* (veja a figura 6 acima).