

MAE-314 - ANÁLISE ESTATÍSTICA 1ª Prova
26/05/2021

A prova totaliza 12,0 pontos. Notas acima de 10,0 serão arredondadas para 10,0.
Ao enviar a resolução, não esqueçam de colocar o nome. Horário limite de envio:
20:00h para o email selian@ime.usp.br
A prova é individual com consulta a qualquer material.

1) Seja $\underline{X} \sim N_4(\underline{\mu}; \underline{\Sigma})$ com $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Determine a distribuição de (X_1, X_4) .
- Determine a distribuição condicional de $\bar{X}_1$ dado $\bar{X}_4 = x$.
- Obtenha a distribuição de probabilidades de $Y = 2X_1 + 3X_2 + X_3 + X_4$.
- Seja a variável aleatória $W = (X_2 - 1)^2 / 4$. Determine o valor de c tal que $P(W > c) = 0,10$. Justifique todas as passagens utilizadas. (3,5 pontos).

2) Se $\underline{Y} \sim N_3(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, com $\underline{Y} = (Y_1 \ Y_2 \ Y_3)'$, $\underline{\mu} = (\mu \ \mu \ \mu)'$

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$$

- Determine os valores de k para que $\underline{\Sigma}$ seja positiva definida.
- Nas condições do item a), determine o valor de k para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam variáveis aleatórias independentes. (3,0 pontos)

3) Seja $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}_x, \underline{\Sigma})$, $\underline{\mu}_x$ e $\underline{\Sigma}$ desconhecidos e $\underline{Y} = \underline{C}\underline{X} + \underline{d}$, onde $\underline{C}$ é uma matriz de constantes $p \times p$ não singular e $\underline{d}$ é um vetor $p \times 1$.

Mostre que a estatística T^2 de Hotelling para testar $H_0: \underline{\mu}_x = \underline{\mu}_0$ coincide com a estatística T^2 de Hotelling para testar $H_0: \underline{\mu}_y = \underline{C}\underline{\mu}_0 + \underline{d}$. (2,0 pontos)

4) Considere o vetor aleatório $\underline{X} = (X_1 \ X_2)'$ com $\text{Var}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

- Verifique que as raízes características e correspondentes vetores característicos normalizados de $\text{Var}(\underline{X})$ são

$$\lambda_1 = 7 \quad L_1 = (\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2)' \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 \quad L_2 = (\sqrt{2}/2 \quad -\sqrt{2}/2)'$$

b) Considere as transformações

$$Y_1 = L_1' \mathbf{X} = \sqrt{2}/2 X_1 + \sqrt{2}/2 X_2 \quad \text{e} \quad Y_2 = L_2' \mathbf{X} = \sqrt{2}/2 X_1 - \sqrt{2}/2 X_2$$

Prove que $\text{Var}(Y_1) = \lambda_1$, $\text{Var}(Y_2) = \lambda_2$ e que

$$\text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2).$$

c) Prove que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$.

As variáveis transformadas são denominadas Componentes Principais associadas à matriz $\text{Var}(\mathbf{X})$. (2,0 pontos)

5) Considere o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5)'$ com matriz de covariância

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ particionado em } \bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \mid \bar{X}_3 \ \bar{X}_4 \ \bar{X}_5)', \text{ de modo que}$$

$$\mathbf{X}^{(1)} = (X_1 \ X_2)' \quad \text{e} \quad \mathbf{X}^{(2)} = (X_3 \ X_4 \ X_5)'$$

$$\text{e as matrizes } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $\text{Var}(A \mathbf{X}^{(1)})$

b) Calcule $\text{Cov}(A \mathbf{X}^{(1)}, B \mathbf{X}^{(2)})$. (1,5 pontos)