AULAS ANTERIORES 26/05/2021 (GRAVADA)

Operações com Vetores: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $m \in \mathbb{R}$

* Igualdade: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \, ; \, y_1 = y_2 \, ; \, z_1 = z_2$

* Adição (Diferença): $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, \, y_1 \pm y_2, \, z_1 \pm z_2) \in \mathbb{R}^3$

* Multiplicação por escalar: $m\vec{u} = (m x_1, m y_1, m z_1) \in \mathbb{R}^3$

Paralelismo entre Dois Vetores:

$\vec{u} \parallel \vec{v} \longrightarrow \exists \, K \in \mathbb{R} \, / \, \vec{u} = K\vec{v}$

$\therefore \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = K$

coordenadas proporcionais!

Produto Escalar: RESULTADO: NÚMERO $\in \mathbb{R}$

$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ... base ortonormal $\therefore \begin{cases} \vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E \\ \vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E \end{cases}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$

produto escalar

Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Ângulo entre Dois Vetores: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \cos\theta$

Ortogonalidade entre Dois Vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Produto Vetorial:

RESULTADO: VETOR $\in \mathbb{R}^3$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

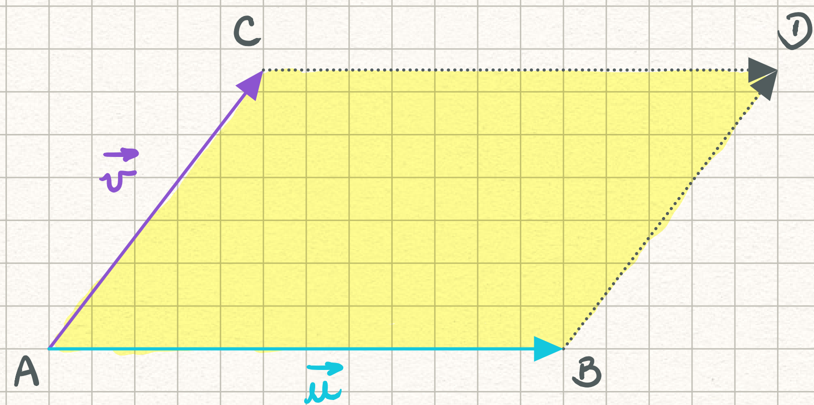
produto vetorial

$\vec{w}$ ... simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Paralelismo entre Dois Vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Interpretação do Módulo:



Área do Paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

Produto Misto:

RESULTADO: NÚMERO $\in \mathbb{R}$

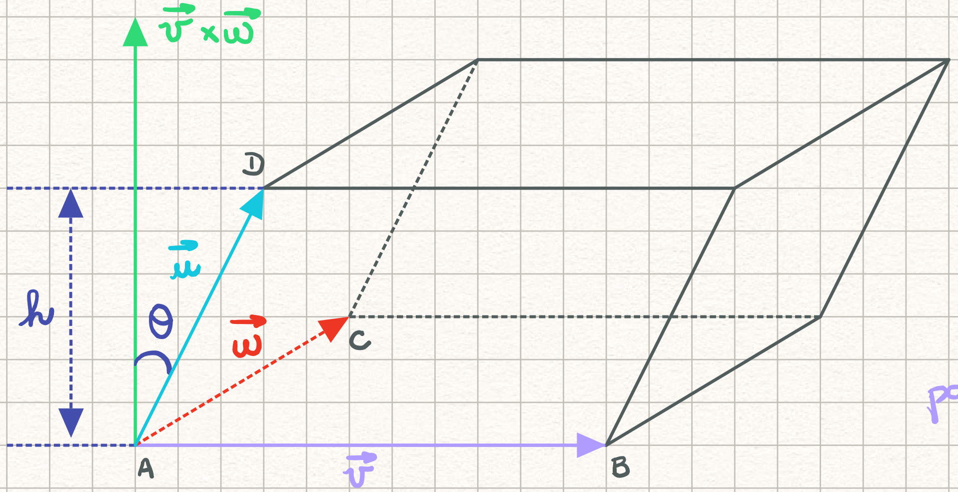
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

produto misto

Coplanaridade entre Três Vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Interpretação do Módulo:

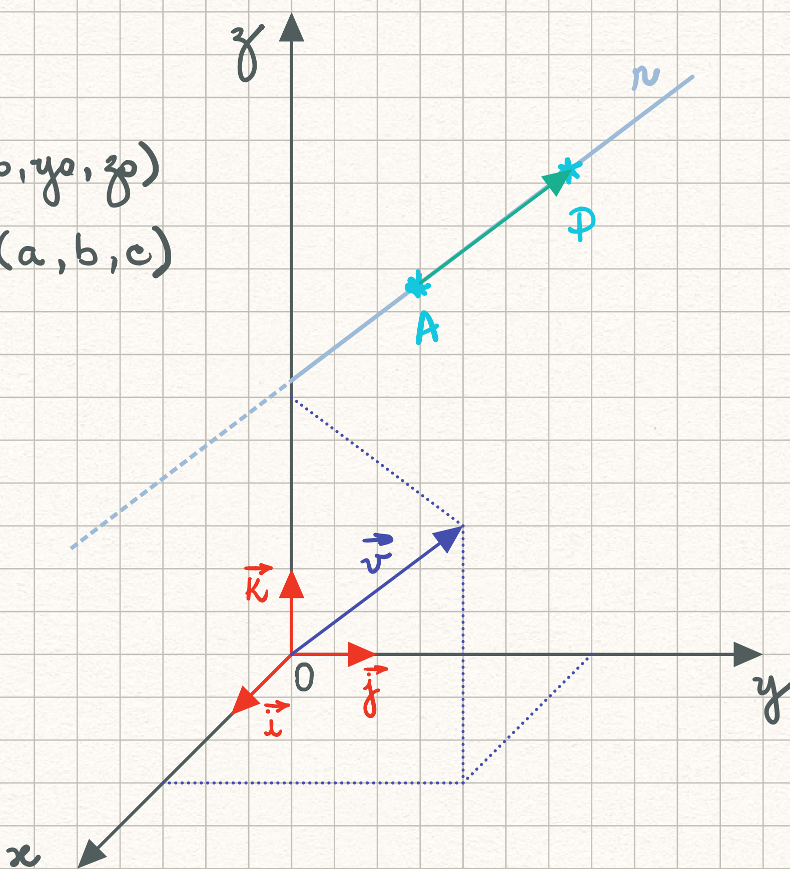


Volume do paralelepípedo $= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$

8. RETA NO ESPAÇO

$A(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = (a, b, c)$



$\Sigma(0, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}) \ldots \mathbb{R}^3$

$A \in r$

$\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \parallel r$

determinam uma reta no espaço

Quando um ponto qualquer $P(x, y, z)$ do espaço $\in r$?

$P \in r \iff \vec{AP} \parallel \vec{v} \longrightarrow \vec{AP} = t\vec{v}, \; t \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad P - A = t\vec{v}$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}$$

EQ. VETORIAL DA RETA r

As Eqs. Paramétricas são obtidas a partir da Eq. vetorial, desenvolvendo a álgebra:

$$r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (at, bt, ct)$$

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

EQS. PARAMÉTRICAS DA RETA r

** As eqs. paramétricas dissociam a relação entre x, y e z, ao obter:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= h(t) \end{aligned}$$

As Eqs. Simétricas são obtidas a partir de manipulação algébrica das Eqs. Paramétricas, desde que $abc \neq 0$:

nenhuma das componentes de $\vec{v}$ pode ser nula!

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Isolando t em cada equação paramétrica:

$$t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$t = \frac{y - y_0}{b} \longrightarrow r: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (= t)$$

$$t = \frac{z - z_0}{c}$$

EQS. SIMÉTRICAS DA RETA r

As Eqs. Reduzidas são obtidas a partir das Eqs. Simétricas e escrevem as eqs. de duas variáveis entre x, y e z como função da terceira (chamada variável livre).

x : Variável Livre

Igualando os pares de equações abaixo. Atente para o fato de que a eq. em x vai aparecer nas 2 igualdades, pois x é a variável livre:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{x - x_0}{a}$$

$$\frac{z - z_0}{c} = \frac{x - x_0}{a}$$

Isolando y

Isolando z

$$r: \begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \end{cases}$$

EQS. REDUZIDAS NA VARIÁVEL x

y: Variável Livre

Igualando os pares de equações abaixo. Atente para o fato de que a eq. em y vai aparecer nas 2 igualdades, pois y é a variável livre:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \qquad \frac{z-z_0}{c} = \frac{y-y_0}{b} \xrightarrow[\text{Isolando } z]{\text{Isolando } x} r: \begin{cases} x = m_2 y + n_2 \\ z = p_2 y + q_2 \end{cases}$$

EQS. REDUZIDAS NA VARIÁVEL y

z: Variável Livre

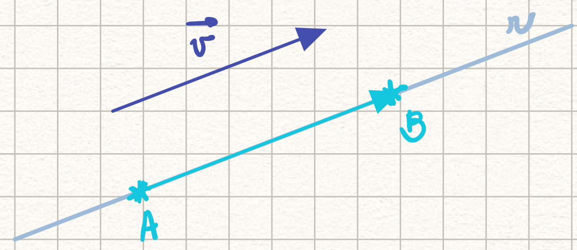
Igualando os pares de equações abaixo. Atente para o fato de que a eq. em z vai aparecer nas 2 igualdades, pois z é a variável livre:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c} \qquad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \xrightarrow[\text{Isolando } y]{\text{Isolando } x} r: \begin{cases} x = m_3 z + n_3 \\ y = p_3 z + q_3 \end{cases}$$

EQS. REDUZIDAS NA VARIÁVEL z

Slide 09 - Exemplo



$\vec{v} \mathbin{/\!/} \vec{AB}$

$\vec{v} = k(\vec{AB})$, $k \neq 0$ ($B - A$)

$\vec{v} = k[(3,-1,-1) - (1,-2,3)]$

$\vec{v} = k(2,1,-4)$

$k = 1$ $\therefore$ $\vec{v} = (2,1,-4)$

Utilizando o ponto $A(1,-2,3)$ para obter as eqs. da reta.

Um ponto genérico $P(x,y,z)$ do espaço $\in r \iff \vec{AP} \mathbin{/\!/} \vec{v}$.

Logo:

$$\vec{AP} = t\vec{v} \, , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$r: (x,y,z) = (1,-2,3) + t(2,1,-4) \, , \quad t \in \mathbb{R}$$

Eq. Vetorial

Eq. Vetorial $\longrightarrow$ Eqs. Paramétricas

$$(x,y,z) = (1,-2,3) + (2t, t, -4t)$$

$$(x,y,z) = (1+2t, -2+t, 3-4t)$$

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 3-4t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Eqs. Paramétricas

Eqs. Paramétricas $\longrightarrow$ Eqs. Simétricas

* $abc \neq 0$ $\longrightarrow$ nenhuma coord. de $\vec{v}$ pode ser nula!

Isolando t:

$$t = \frac{x-1}{2}$$

$$t = y+2$$

$$t = \frac{3-z}{4}$$

$$\therefore \quad r = \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{3-z}{4}$$

Eqs. Simétricas

Eqs. Simétricas $\longrightarrow$ Eqs. Reduzidas em y

(1) (2)

$$\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{3-z}{4}$$

Considerando as igualdades (1) e (2):

$$\frac{x-1}{2} = y+2 \qquad\qquad x-1 = 2y+4$$

$$\longrightarrow$$

$$\frac{3-z}{4} = y+2 \qquad\qquad 3-z = 4y+8$$

$$\therefore \quad r = \begin{cases} x = 2y+5 \\ z = -4y-5 \end{cases}$$

Eqs. Reduzidas em y