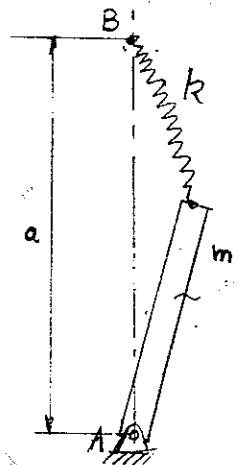


PMC-346- 3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício N. 1

O sistema representado na figura ao lado é constituído de uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $l$  articulada em  $A$ , e uma mola de constante elástica  $k$ . Sabendo-se que a mola é tensionada com uma força  $F_0$ , quando a barra está na vertical, pede-se:

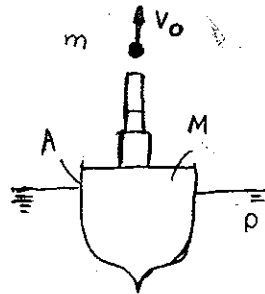


- A equação diferencial do movimento;
- A equação diferencial para pequenas oscilações;
- Discutir a condição de estabilidade da solução da equação linearizada.

$$\frac{ml}{3} \ddot{\theta} + \frac{[F_0 + k(a^2 + l^2 - 2al \cos \theta) - (a+l)mg]}{\sqrt{a^2 + l^2 - 2al \cos \theta}} \cdot a \sin \theta - \frac{mg \sin \theta}{2} = 0$$

Exercício N. 2

O modelo mostrado na figura é uma representação de uma embarcação de massa ( $M$ ), que possui um canhão apontando para a vertical. Sabendo-se que a densidade do líquido é ( $\rho$ ); a área transversal da embarcação é ( $A$ ); a massa da bala é ( $m$ ); a velocidade de saída é ( $v_0$ ), pede-se:

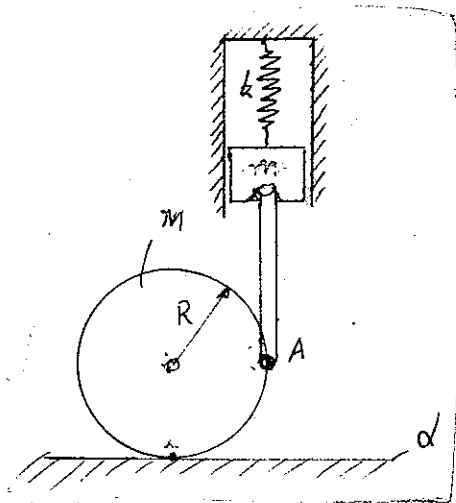


- A equação diferencial do movimento vertical da embarcação;
- Calcular a amplitude máxima do movimento da embarcação após 1 tiro.

$$M \ddot{x} + \rho g A \cdot x = 0$$

Exercício N. 3

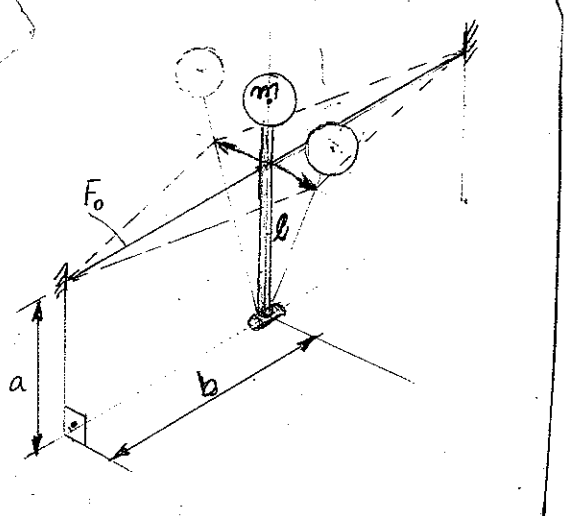
O sistema esquematizado na figura é formado de um cilindro homogêneo de massa ( $M$ ) e raio ( $R$ ), que rola sem escorregar sobre um plano horizontal. A biela  $AB$  liga o cilindro ao pistão de massa ( $m$ ), que está sujeito a ação da mola de constante ( $k$ ). Sabendo-se que o sistema está representado na configuração de equilíbrio, determinar a frequência natural do sistema.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}M + m}}$$

Exercício N. 4

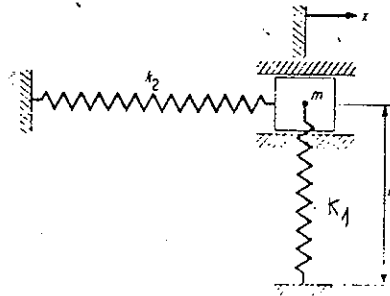
O sistema da figura é constituído de um pêndulo simples invertido de massa  $M$  e comprimento  $l$ , cujo período de oscilação pode ser alterado pela variação da tensão  $F_0$ , nos dois fios. Pede-se determinar a equação do movimento do pêndulo e estudar a condição de estabilidade do mesmo.



$$ml^2 \ddot{\theta} + \left( \frac{2a^2 F_0}{b} - mgl \right) \theta = 0$$

Exercício N. 5

A massa  $m$  da figura move-se sem atrito, na direção horizontal. A mola  $k_1$  está tensionada por uma força  $Q$ , quando está na direção vertical. Nesse instante a mola  $k_2$  não está tensionada. Determinar:



- A equação diferencial do movimento;
- A frequência natural do sistema.

(Assumir que  $x/b$  é a variação de tensão em  $k_1$  pode ser desprezada)

$$m\ddot{x} + (k_2 + \frac{Q}{b})x = 0$$

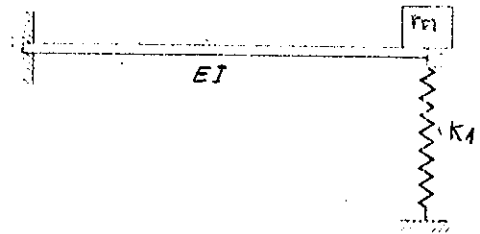
Exercício N. 6

Repetir o exercício anterior, supondo  $x/b$  moderado, tal que a variação de tensão na mola  $k_1$ , deve ser considerada.

$$m\ddot{x} + (k_2 + \frac{Q}{b})x + (k_1 - \frac{Q}{b})\frac{x^3}{2b^2} = 0$$

Exercício N. 7

A figura ao lado representa uma barra sem massa engastada em  $A$  e apoiada em  $B$  sobre uma mola de constante elástica  $k$ . Pede-se:

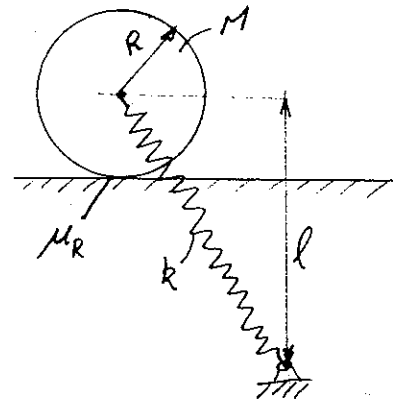


- Determinar a equação diferencial do movimento resultante quando a massa  $m$  cai sobre a barra, no ponto  $B$ , a partir de uma altura  $h$ .
- A frequência natural do sistema, após o impacto.

$$m\ddot{x} + (k_1 + \frac{3EI}{l^3})x = 0$$

Exercício N. 8

O sistema mostrado na figura é constituído de um cilindro homogêneo de peso  $Mg$  e raio  $R$ , que rola sem escorregar sobre uma superfície horizontal pela ação da mola de constante  $k$ . Sabendo-se que o comprimento da mola não deformado é  $l_0 < l$  e que o coeficiente de atrito de rolamento para o cilindro sobre o plano é  $\mu_R$ , calcular:



- A equação diferencial completa para o sistema;
- Admitindo-se que o deslocamento horizontal do cilindro é muito menor que  $l$ , calcular a frequência natural do sistema;
- Se o sistema é deslocado de  $x_0$  da posição de equilíbrio e solto, calcular o tempo decorrido até que pare.

$$a) \frac{3}{2} M \ddot{x} + \mu_R \cdot (Mg + k \cdot (\sqrt{l^2 + x^2} - l_0) \cdot l) \cdot \frac{\dot{x}}{l \dot{x}} + k \cdot (\sqrt{l^2 + x^2} - l_0) \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = 0$$

$$b) \omega_m = \sqrt{\frac{2k(l-l_0)}{3M \cdot l}}$$

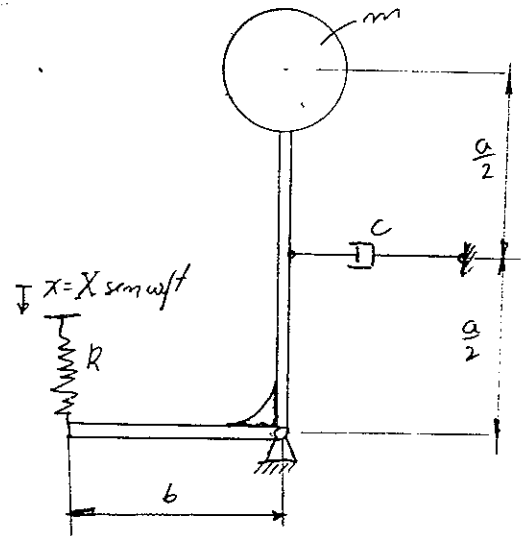
$$c) T = \frac{\pi}{\omega_m} \cdot m_{1/2}, \text{ onde } m_{1/2} \text{ é o inteiro tal que}$$

$$\frac{x_0}{2 \cdot \mu_R \cdot (Mg + k(l-l_0))} - \frac{1}{2} \leq m_{1/2} < \frac{x_0}{2 \mu_R \cdot (Mg + k(l-l_0))} + \frac{1}{2}$$

Exercício N. 9

Para o sistema esquematizado pede-se:

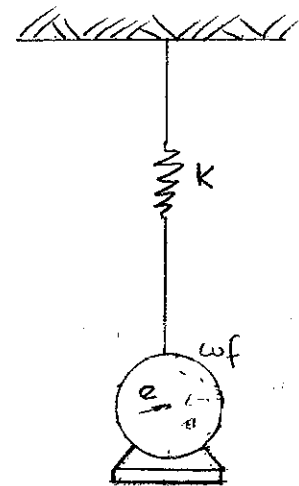
- Qual a frequência  $\omega_f$  que provoca a ressonância do sistema?
- Qual a amplitude de vibração da massa  $m$  na condição de ressonância?
- Discutir a estabilidade do sistema.



Exercício N. 10

Para determinar a qualidade de balanceamento de motores elétricos montados utiliza-se a uma suspensão como a esquematizada na figura. Supondo que o rotor do motor tem um desbalanceamento estático (excentricidade  $e$ ) e sabendo-se que a massa do estator é  $M-m$ , a massa do estator é  $m$ , pede-se:

- Equação diferencial do movimento do estator, admitindo-se pequenas amplitudes de vibração.
- As amplitudes das vibrações verticais e horizontais do estator em função da frequência de rotação do rotor.

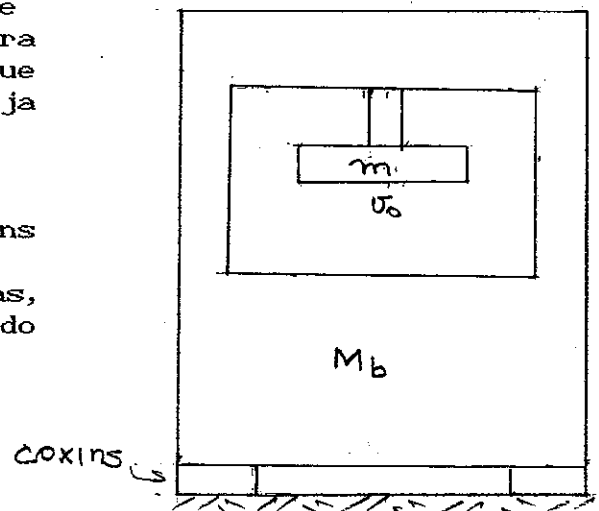


Exercício N. 11

A figura ao lado representa esquematicamente um martelo de forjamento pneumático de massa total  $M$ . Sabendo-se que a massa do martelo móvel é  $m$  e que sua velocidade máxima de impacto é  $v_0$ , pede-se para determinar a massa da base  $M_b$  para que a força máxima transmitida ao solo seja menor do que  $(M + M_b).g/2$ .

São dados:

- Coeficiente de histerese dos coxins  $b = 0,01$
- Deformação estática máxima das molas, para garantia de estabilidade do conjunto,  $f = 0,2 \text{ m}$

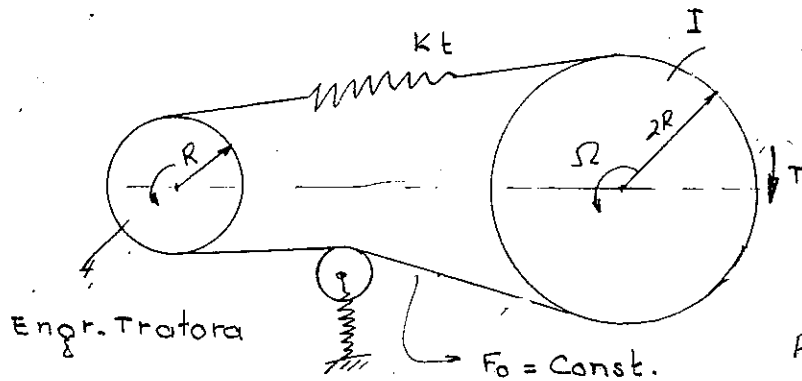
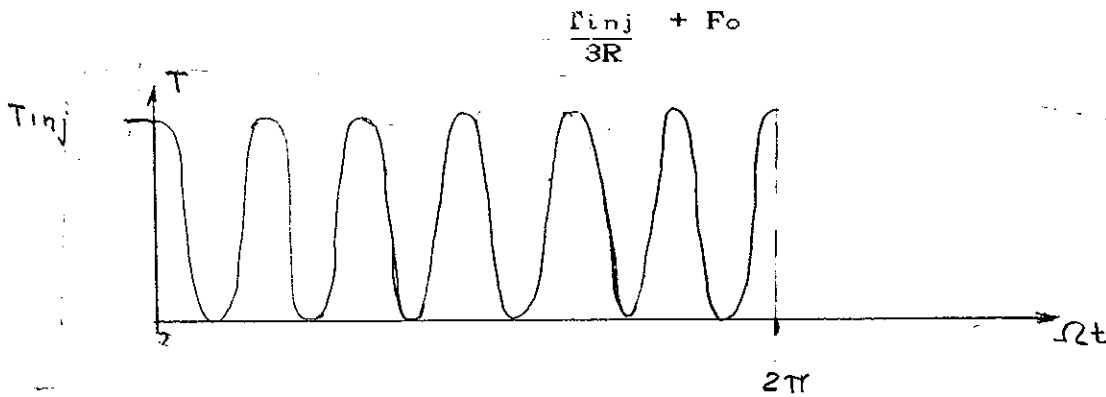


COXINS

PMC-346 - 4º LISTA DE EXERCÍCIO

Exercício N.1

Um bomba injetora de um motor diesel apresenta a característica de torque mostrada na figura abaixo. Deseja-se realizar uma transmissão por corrente, com relação 2:1. Sendo dada a força de esticamento da Corrente  $F_0$  e a rigidez do lado trator da corrente  $k$ , equacionar o dimensionamento do volante a ser colocado no eixo da bomba injetora para que a força de tração máxima na corrente não ultrapasse:



Resp.  

$$I \geq \left( \frac{24R^2 k_t}{T_{inj}} + 1 \right) \frac{R^2 k_t}{9. \Omega^2}$$

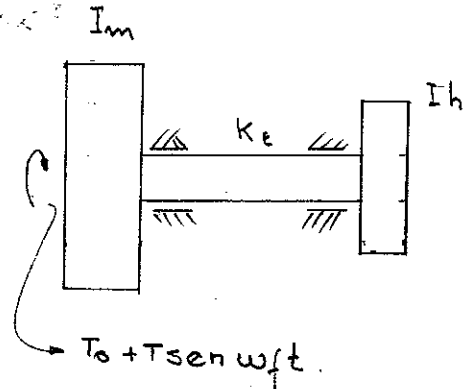
Exercício N. 2

Um console de comando de 1000 Kgf de peso, instalado na sala de máquinas de um navio é apoiado em 4 coxins de borracha de coeficiente de amortecimento por histerese  $\delta = 0,1$ . Sabendo-se que a vibração do piso é essencialmente vertical, com componentes de mesma amplitude na frequência de explosão (6x180 rpm) e na frequência de rotação, determinar a rigidez dos coxins para que somente 20% da velocidade de vibração do piso passe para o console.

Resp.  $4R \leq 59,2 \text{ N/mm}$

Exercício N. 3

Para analisar o comportamento da linha de eixo de um navio utilizou-se o modelo apresentado na figura abaixo, onde  $I_m$  é o momento de inércia equivalente das partes móveis do motor,  $I_h$  é o momento de inércia da hélice e  $T_0 + T \cdot \text{sen}(\omega t)$  é o torque decorrente da pressão de combustão que age nos pistões, sendo  $\omega$  igual à frequência de explosão ou 6 vezes a frequência de rotação do eixo  $\Omega$  ( $\omega = 6 \cdot \Omega$ ). Sabendo-se que o momento resistente do hélice é

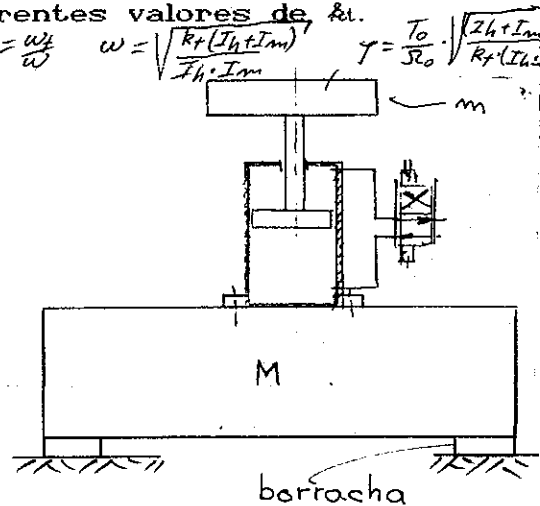


proporcional ao quadrado da velocidade angular, determinar o momento torçor máximo do eixo, para diferentes valores de  $k_e$ .

Resp.  $M_T = T_0 + T \cdot \sqrt{\frac{(\alpha(d+1) \cdot r^2)^2 + (2prd)^2}{[Rr^2(1+r^2(d+1))]^2 + [2pr(d-r^2(d+1))]^2}}$   $r = \frac{\omega_f}{\omega}$   $\omega = \sqrt{\frac{Rr(I_h + I_m)}{I_h \cdot I_m}}$   $\gamma = \frac{T_0}{3T_0} \cdot \sqrt{\frac{2(I_h + I_m)}{Rr(I_h + I_m)}}$

Exercício N. 4

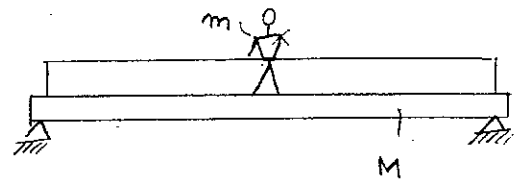
Deseja-se projetar a base para uma mesa vibratória eletro-hidráulica. Sabendo-se que a massa móvel máxima é  $m = 20$  kg, a frequência de oscilação da mesa é  $f = 30$  Hz, a máxima amplitude de oscilação da mesa é  $a = 5$  mm, a rigidez mínima do conjunto de coxins de borracha é  $k = 100$  kgf/mm por problemas de estabilidade e que o coeficiente de histerese da borracha é  $b = 0,2$ , determinar a massa  $M$  da base para que a força dinâmica transmitida ao piso seja menor do que 20 kgf.



Resp.  $M = 517$  kg

Exercício N. 5

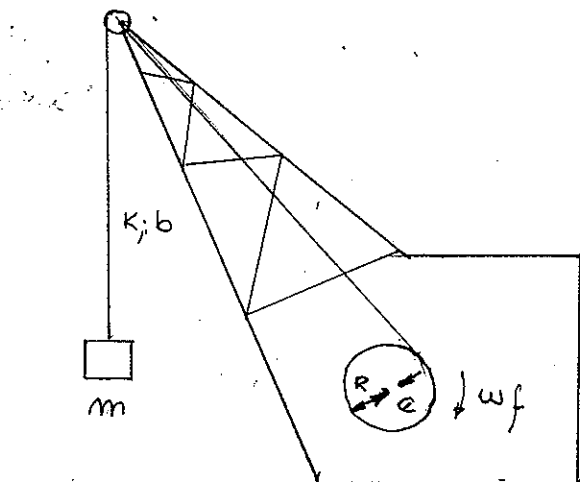
O esquema ao lado representa a pinguela atrás do prédio da Mecânica, sobre a qual um esportista está marchando parado. Sendo dados: massa da ponte, suposta uniformemente distribuida,  $M$ ; massa do esportista  $m = M/4$ ; deflexão estática no meio da ponte devido ao peso do esportista  $f = 4$  cm; coeficiente de histerese da ponte  $b = 0,05$ ; e sabendo-se que a ponte foi dimensionada para suportar o peso de 5 pessoas, calcular o ritmo máximo da marcha que derruba a ponte. Para efeito de modelagem do sistema, supor metade da massa da ponte concentrada no meio do vão e que o centro de massa do esportista marchando tem um movimento vertical harmônico de amplitude  $a = 4$  cm.



$\omega_f = 8,95$  rad/s

Exercício N. 6

O guindaste mostrado na figura está com o tambor de enrolamento do cabo excêntrico. Admitindo-se que o comprimento do cabo é muito maior que o diâmetro do tambor, a rigidez do cabo é  $k$  e o coeficiente de histerese é  $b$ , determinar:



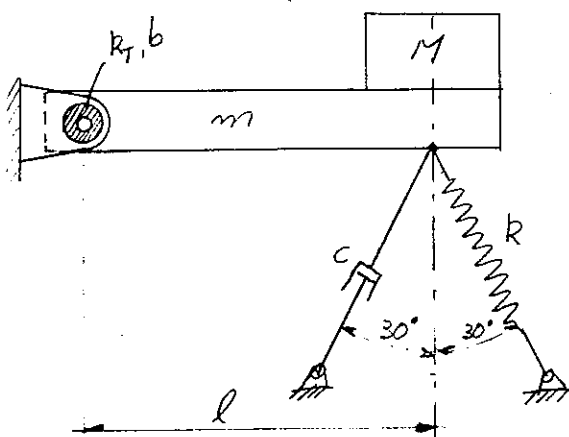
- a) A equação diferencial do movimento da massa  $m$ .
- b) Calcular a máxima velocidade de enrolamento  $\omega_f$  para que a carga no cabo não ultrapasse  $1,5.m.g$ .

$$m \ddot{x} + c_{eq} \dot{x} + kx = k e \sin \omega_f t + c_{eq} e \omega_f \cos \omega_f t$$

Exercício N. 7

$$\omega_f^2 = \left[ 1 - \sqrt{\left( \frac{e \cdot \sqrt{1+b^2} \cdot k}{0,5mg} \right)^2 - b^2} \right] \cdot \frac{k}{m}$$

A suspensão da figura é formada de uma barra rígida uniforme de massa  $m$  e comprimento  $l$ , que é fixada em uma das extremidades por um coxim de borracha trabalhando à torção, e na outra por mola e amortecedor conforme indicado. Sendo dados: constante de amortecimento por histerese da borracha  $b$ ; constante elástica da mola  $k$ ; constante de amortecimento viscoso do amortecedor  $c$ , pede-se:



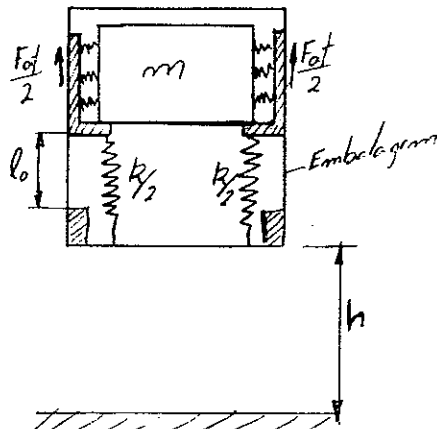
- a) Equação diferencial do movimento para pequenas oscilações.
- b) Frequência natural não amortecida do sistema.

c) Decremento logarítmico da vibração.

(a)  $\left( \frac{m l^2}{3} + M l^2 \right) \ddot{\theta} + \left( c_{eq} + \frac{3}{4} c l^2 \right) \dot{\theta} + \left( k_t + \frac{3}{4} k l^2 \right) \theta = 0$   
 (b)  $\omega^2 = \left( \frac{k_t}{l^2} + \frac{3}{4} k \right) \left( \frac{m l^2}{3} + M l^2 \right)$   
 (c)  $\delta = \frac{c_{eq}}{\sqrt{k_{eq} m_{eq}}}$        $\gamma = \frac{b k_t + \frac{3}{4} c l^2}{2 \sqrt{\left( k_t + \frac{3}{4} k l^2 \right) \left( \frac{m l^2}{3} + M l^2 \right)}}$   
 where  $c_{eq} = \frac{b \cdot k_t}{\omega}$

Exercício N. 8

O sistema mostrado na figura é usado para proteger a caixa de massa  $m$  de choques. Deseja-se saber qual a máxima altura de queda para a qual a aceleração na caixa não ultrapasse 3 g. São dados:

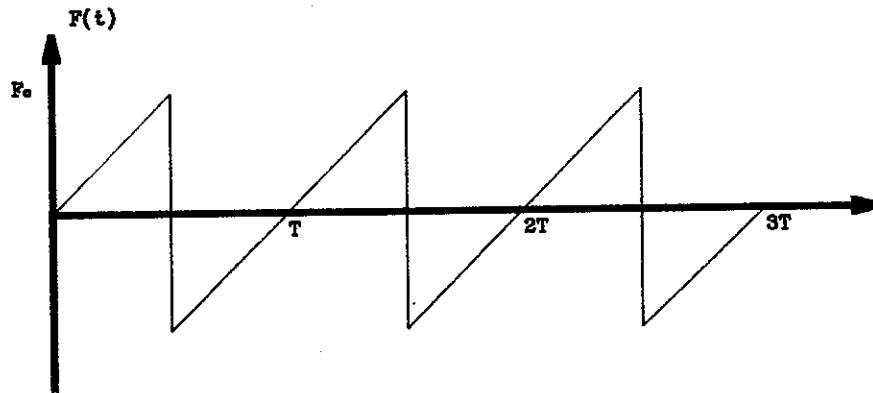


$F_{at} = m.g$        $k = m.g/l_0$

## PMC 346 - 5. LISTA DE EXERCICIO

### Exercício N.1

Determinar a expressão geral da resposta em regime permanente de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento, sujeito a uma força cíclica representada graficamente pela figura abaixo:



Expansão da força em série de Fourier:

$$F(t) = F_0 \left( \frac{\omega}{\pi} \right) \cdot t, \quad p/ \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$$

$$F(t) = F_0 \left( \frac{\omega}{\pi} \cdot t - 2 \right) \quad p/ \quad \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$$

Determinação dos termos da Série de Fourier:

Cálculo de  $a_0$ :

$$a_0 = \int_0^T F(t) dt = F_0 \cdot \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} t \cdot dt + F_0 \cdot \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} \left( \frac{\omega}{\pi} t - 2 \right) \cdot dt$$

$$a_0 = F_0 \left[ \frac{\omega \cdot t^2}{2} \right] \Big|_0^{\pi/\omega} + F_0 \cdot \left[ \frac{\omega \cdot t^2}{2} - 2 \cdot t \right] \Big|_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} = 0$$

Cálculo de  $a_i$ :

$$a_i = \int_0^T F(t) \cdot \cos(i\omega \cdot t) dt =$$

$$= F_0 \cdot \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} t \cdot \cos(i\omega t) dt + F_0 \cdot \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} \left[ \frac{\omega}{\pi} t - 2 \right] \cdot \cos(i\omega t) dt = 0$$

Cálculo de  $b_i$ :

$$b_i = \int_0^T F(t) \cdot \text{sen}(i\omega t) dt =$$

$$= F_0 \cdot \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} t \cdot \text{sen}(i\omega t) dt + F_0 \cdot \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} \left[ \frac{\omega}{\pi} t - 2 \right] \cdot \text{sen}(i\omega t) dt$$

Integrando temos:

$$F(t) = \frac{2F_0}{\pi} \left[ \text{sen}(\omega t) - \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega t) + \dots \right]$$

Resposta do sistema:

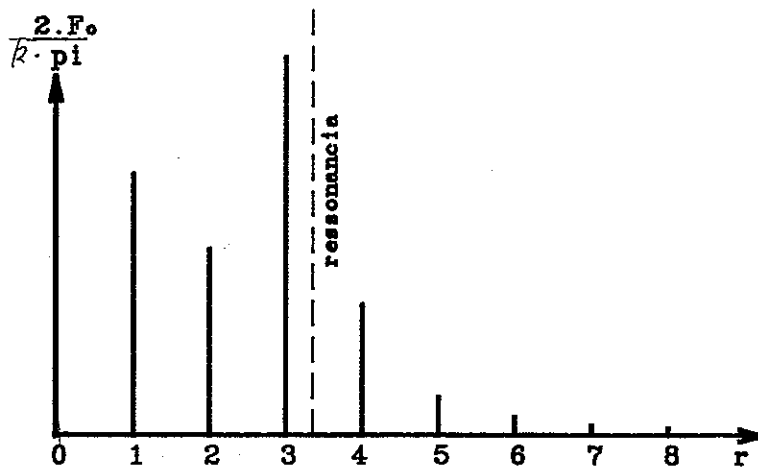
$$x(t) = \frac{2F_0}{\pi \cdot k} \left[ \frac{1}{\beta_1} \text{sen}(\omega t + \phi_1) - \frac{1}{2\beta_2} \text{sen}(2\omega t + \phi_2) + \frac{1}{3\beta_3} \text{sen}(3\omega t + \phi_3) - \dots \right]$$

$$\beta_i = \frac{i\omega}{\sqrt{k/m}}$$

$$\beta_i = \sqrt{(1 - r_i^2)^2 + (\zeta \cdot 2 \cdot r_i)^2}$$

$$\phi_i = \text{tg}^{-1} \frac{\zeta \cdot 2 \cdot r_i}{(1 - r_i^2)}$$

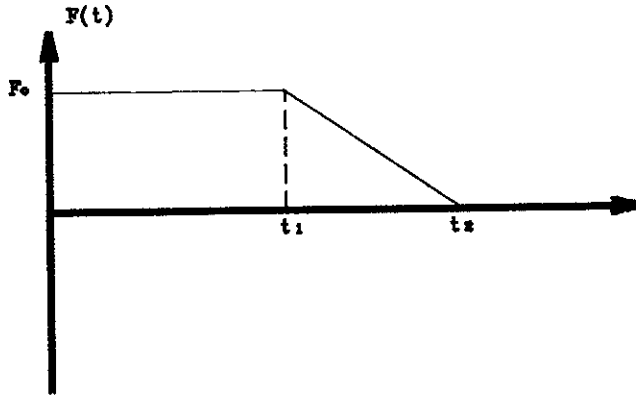
Supondo que o sistema possui uma frequência natural tal que  $r = 0,3$  e  $\zeta = 0,1$ , uma medida de vibração em deslocamento apresentará o seguinte espectro de frequência:





Exercício N. 2

Determinar a resposta de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento sujeito a uma força apresentada na figura abaixo. Supor condições iniciais nulas.



Determinação da resposta do sistema no intervalo  $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \cdot \text{sen } \omega(t - \tau) d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \left[ \frac{1}{\omega} \cos \omega(t - \tau) \right]_0^t = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad \text{p/ } 0 \leq t \leq t_1$$

Determinação da resposta do sistema no intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left[ 1 - \frac{(\tau - t_1)}{(t_2 - t_1)} \right] \text{sen } \omega(t - \tau) d\tau + A \cdot \cos \omega(t - t_1) + B \cdot \text{sen } \omega(t - t_1)$$

$$x(t) = x'(t) + x''(t) + x'''(t)$$

onde A e B dependem das condições iniciais ( $x(t_1)$  e  $\dot{x}(t_1)$ ) para o intervalo  $(0 - t_1)$  e são determinadas a partir da resposta válida para o intervalo anterior, no instante  $t = t_1$ .

Determinação de  $x''(t)$ :

$$x(t_1) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_1) = A \cdot \cos \omega(t_1 - t_1)$$

$$x''(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_1) \cdot \cos \omega(t - t_1)$$

Determinação de  $x'''(t)$ :

$$\dot{x}(t_1) = \frac{F_0 \omega}{k} \text{sen } \omega t_1 = B \omega \cdot \cos \omega(t_1 - t_1)$$

$$x'''(t) = \frac{F_0}{k} \text{sen } \omega t_1 \text{sen } \omega(t - t_1)$$

Determinação de  $x'(t)$ :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{F_0}{m\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left[ 1 - \frac{(\tau - t_1)}{(t_2 - t_1)} \right] \text{sen } \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{F_0}{m\omega} \left[ \frac{1}{\omega} \cos \omega(t - \tau) - \frac{(\tau - t_1)}{\omega(t_2 - t_1)} \cos \omega(t - \tau) - \frac{1}{\omega^2(t_2 - t_1)} \text{sen } \omega(t - \tau) \right]_{t_1}^t \\ &= \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \cos \omega(t - t_1) - \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} + \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} \text{sen } \omega(t - t_1) \right] \end{aligned}$$

Resposta do sistema no intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \cos \omega t - \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} + \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} \text{sen } \omega(t - t_1) \right]$$

Determinação da resposta do sistema no intervalo  $t \geq t_2$ :

$$x(t) = A \cos \omega(t - t_2) + B \text{sen } \omega(t - t_2)$$

onde A e B dependem das condições iniciais  $x(t_2)$  e  $\dot{x}(t_2)$  para o intervalo  $(t_1 - t_2)$  e são determinadas a partir da resposta válida para o intervalo anterior, no instante  $t = t_2$ .

$$\frac{F_0}{k} \left[ -\cos \omega t_2 + \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} \text{sen } \omega(t_2 - t_1) \right] = A$$

$$\frac{F_0}{k} \left[ \text{sen } \omega t_2 - \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} + \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} \cos \omega(t_2 - t_1) \right] = B$$

Resposta do sistema no intervalo  $t \geq t_2$ :

$$\frac{F_0}{k} \left[ -\cos \omega t + \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} \text{sen } \omega(t - t_1) + \frac{1}{\omega(t_2 - t_1)} \text{sen } \omega(t - t_2) \right]$$

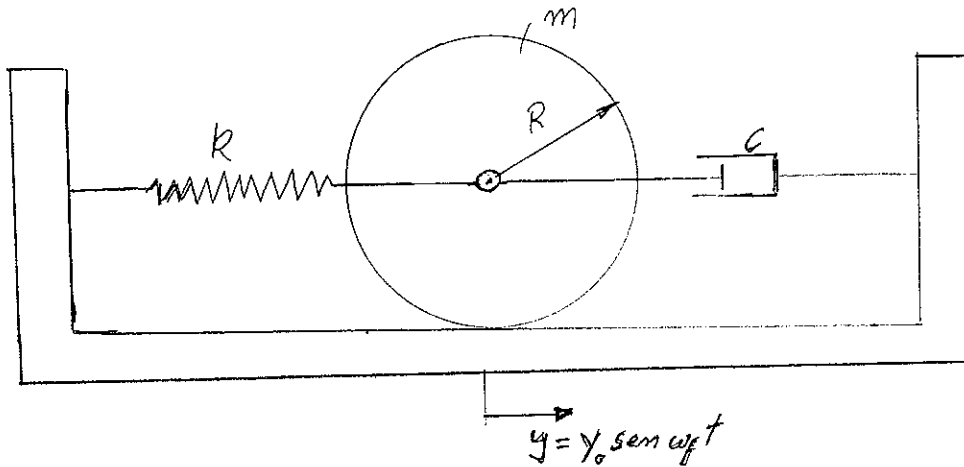
# PMC-346 - Vibrações

## 6 - Lista de Exercícios

- 1 - O sistema indicado na figura é constituído de um cilindro homogêneo que rola sem escorregar sobre uma base horizontal móvel. Sabendo-se que o cilindro tem massa " $m$ " e raio " $R$ " e que o amortecedor tem uma constante de amortecimento  $C = \sqrt{k \cdot m}$  pede-se:

a) Equação diferencial que rege o movimento do cilindro

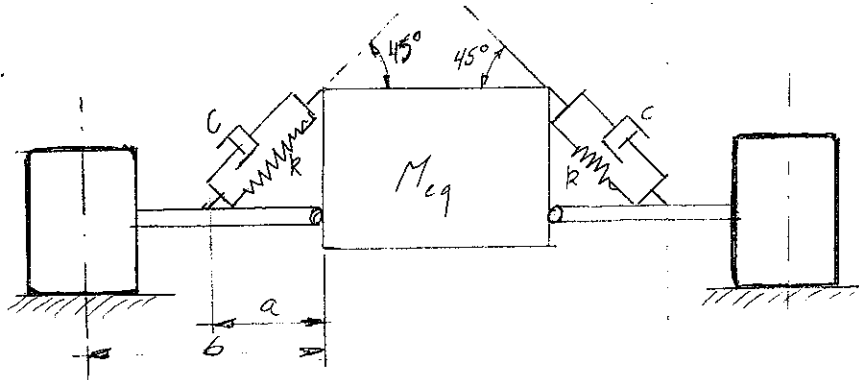
b) Determinar a potência média necessária para manter a base do cilindro na ressonância do sistema com amplitude  $Y_0$ .



$$\frac{3}{2} m R \ddot{\theta} + C R \dot{\theta} + k R \theta = -m \ddot{y} = m y_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$$\bar{P} = \frac{2}{9} y_0^2 \cdot k \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 2 - A figura representa esquematicamente a suspensão de um veículo de massa  $M_{eq}$  na traseira. Sabendo-se que a frequência natural da suspensão na vertical é 2Hz, pede-se determinar  $k$  e  $C$ .

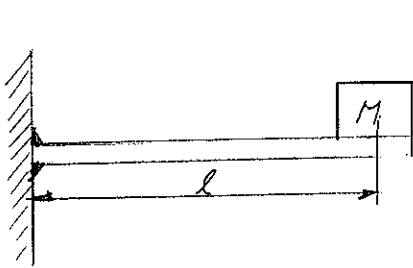


$$k = M_{eq} \cdot (4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{b}{a})^2$$

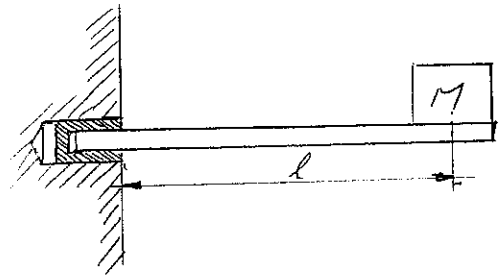
$$\xi_{admitido} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C = M_{eq} \cdot 8 \pi \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

- 3 - Uma viga uniforme, de massa desprezível e comprimento  $l$ , tendo na extremidade uma massa  $M$ , pode ter dois tipos de engastamento. No primeiro ela é soldada na estrutura suporte, enquanto no segundo sofre uma montagem com uma bucha elástica. Sabendo-se que para o primeiro tipo de engastamento o sistema tem uma frequência natural " $f_0$ " e baixíssimo amortecimento, e que no segundo tipo de engastamento a frequência natural cai para  $0,5 f_0$  e que a amplitude de vibração cai 10% por ciclo, pede-se determinar a rigidez do engastamento e o coeficiente de histerese do material do engastamento.



$$k_{eng} = (2\pi f_0)^2 \cdot \frac{M}{3} \cdot l^2$$

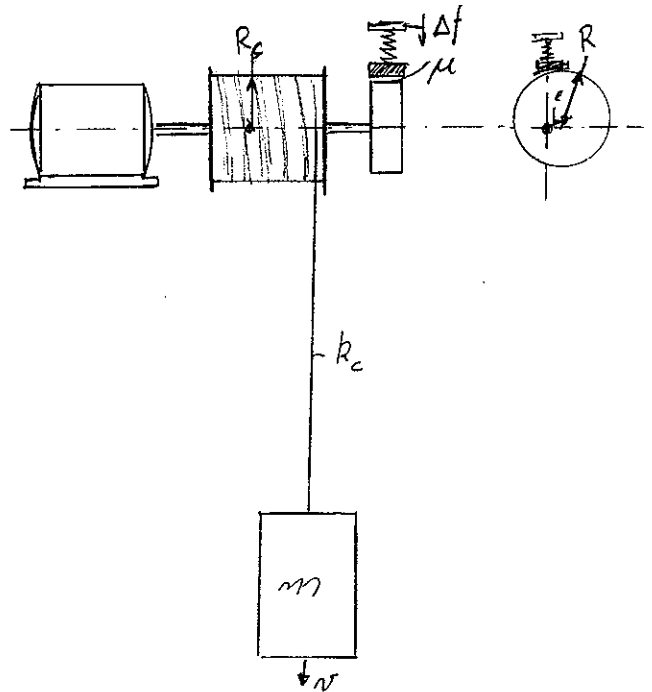


$$b = 0,18$$

- 4 - A figura ao lado representa esquematicamente, um sistema de levantamento, durante a fase de descida da carga com velocidade " $v$ " regulada ( $v \approx cte$ ) com o motor elétrico desligado.

Sabendo-se que o tambor de freio de raio " $R$ " apresenta uma excentricidade " $e$ " em relação ao eixo de rotação, e que a rigidez do mecanismo de aplicação do freio é " $k$ ", pede-se determinar o comportamento dinâmico do sistema durante essa fase. São dados:

- momento de inércia das partes rotativas =  $I$
- diâmetro do tambor de enrolamento do cabo =  $R_c$
- rigidez do cabo =  $k_c$
- coeficiente de atrito no freio =  $\mu$



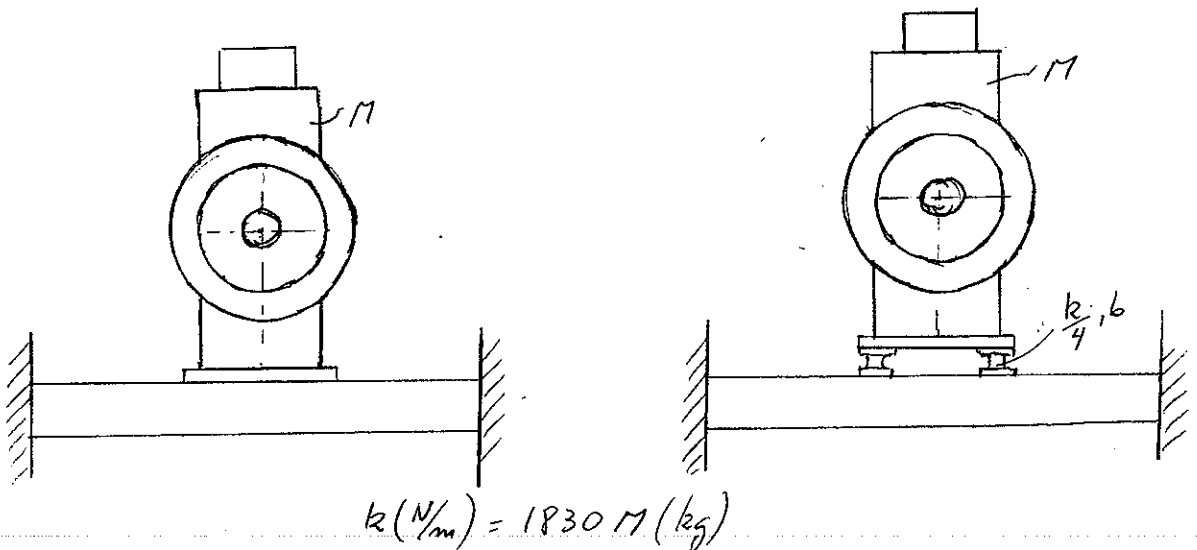
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{I}{R_c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ R_c \ddot{\theta} \end{bmatrix} + k_c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ R_c \theta \end{bmatrix} = -\mu k e \frac{R}{R_c} \sin\left(\frac{v}{R_c} t\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_c \cdot (I + mR_c^2)}{m \cdot I}} = \frac{v}{R_c} \text{ (ressonância)}$$

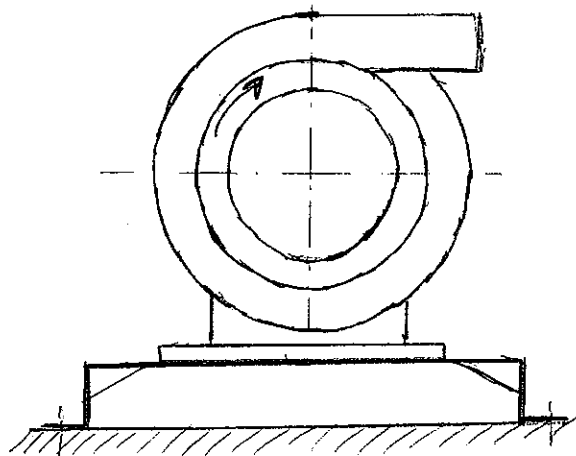
- 5 - Um pequeno conjunto moto-bomba acionado por um motor de combustão interna monocilíndrico de dois tempos, que opera na faixa de 800 a 3000 rpm, foi instalado diretamente na laje do pavimento inferior de uma fábrica. Sabendo-se que em torno de 1000 rpm o conjunto provoca vibração excessiva da laje (5 mm/s), o que não acontece nas demais rotações, deseja-se isolar a vibração do conjunto, de modo a reduzir a amplitude de vibração da laje a no máximo 1/5 da amplitude original. Admitindo-se que a massa do conjunto "M" é muito menor que a massa da laje e que o coeficiente de histerese da borracha dos coxins é  $b=0,1$ , determinar a rigidez dos coxins.

DICAS: Considerar inicialmente a moto-bomba presa à laje que vibra e, em seguida o sistema sobre coxins.



- 6 - Um grande soprador instalado em um edifício está montado sobre uma estrutura de ferro, fixada no piso do edifício como mostrado na figura. Devido ao desbalanceamento no rotor do soprador que gira a 1750 rpm, o soprador é excitado nessa rotação.

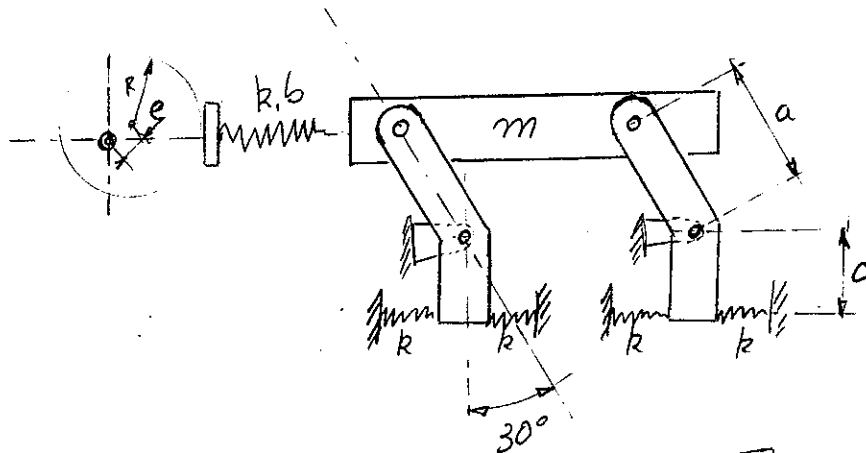
A base metálica é flexível, sendo que na sua deflexão vertical sob o peso do soprador que é de 250 kg é de 0,7 mm. Seu funcionário projetou a base do soprador, e após a instalação notou-se que o soprador vibrava violentamente na direção vertical. Seu projetista projetou algumas nervuras que aumentaram a rigidez vertical da base por um fator de aproximadamente 2, o que segundo ele irá reduzir a amplitude do movimento vertical do mesmo fator. Ele deseja que você aprove a modificação do desenho. Você o faria?



(Admita que seu cálculo de rigidez esteja correto). Se você não aprova, que alternativa proporia? Justifique.

- Não  $\Rightarrow \omega_{orig} = 118,4 \text{ rad/s}$      $\omega_{mod} = 167 \text{ rad/s}$      $\omega_f = 183 \text{ rad/s}$
- Diminuir a rigidez da base e principalmente mandar balancear o rotor.

- 7 - O esquema abaixo representa esquematicamente uma peneira vibratória, cuja excitação é sintonizada na ressonância, de modo a obter uma amplitude grande de vibração, com pequenos esforços no sistema excitador. Dadas as características da figura e sabendo-se que o elemento elástico que é utilizado para provocar a excitação tem rigidez "k" e coeficiente de histerese "b", pede-se:
- determinar a equação diferencial do movimento de massa "m"
  - a frequência de trabalho do excitador ( $\omega_f$ )
  - a amplitude de vibração da peneira vazia.

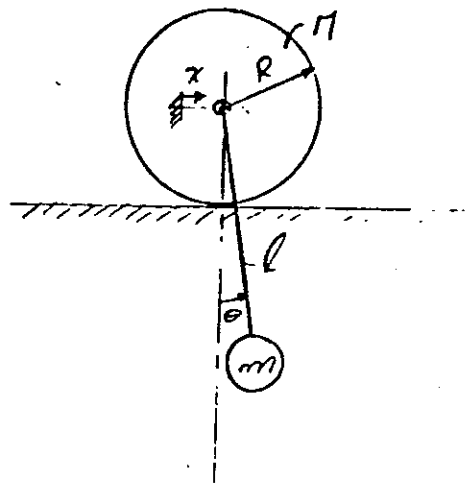


$$a) m\ddot{x} + \frac{3}{4} \frac{bk}{\omega_f} \dot{x} + k \left[ \left( \frac{2c}{a} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] x = \frac{3}{4} k e \sqrt{1+b^2} \sin(\omega_f t + d)$$

$$b) \omega_f = \sqrt{\frac{k \left[ \left( \frac{2c}{a} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]}{m}}$$

$$c) X = \frac{e \sqrt{1+b^2}}{b}$$

1 - O sistema representado na figura ao lado é constituído de um cilindro que rola sem escorregar sobre um plano horizontal e por um pêndulo articulado no eixo do alinhamento.



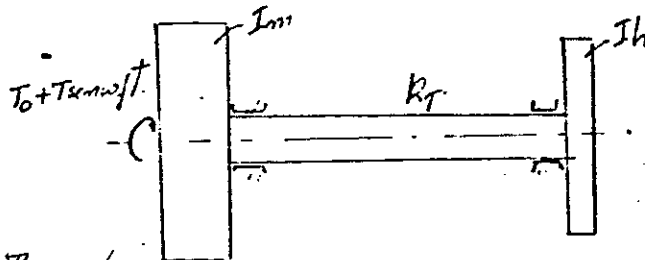
a) Escrever as equações diferenciais do movimento do sistema;

b) Calcular as frequências naturais de vibração.

$$a) \begin{cases} (\frac{3}{2}M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \\ m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + mg\theta = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{mg \cdot (\frac{3}{2}M+m)}{\frac{3}{2}M \cdot ml}} \end{cases}$$

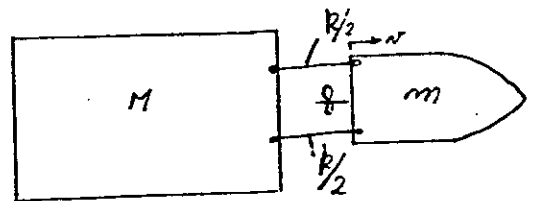
2 - Para analisar o comportamento da linha de eixo de um navio utilizou-se o modelo apresentado onde  $I_m$  é o momento de inércia equivalente das partes móveis do motor,  $I_h$  é o momento de inércia do hélice e  $T_0 + T_{sen\omega t}$  é o torque decorrente da pressão de combustão que age nos pistões, sendo  $\omega$  igual a frequência de explosão ( $\omega = 6\Omega$ ). Pedem-se as equações diferenciais do movimento, e as frequências naturais do sistema não amortecido.



$$\begin{cases} I_m \ddot{\theta}_m + k_T(\theta_m - \theta_h) = T_{sen\omega t} \\ I_h \ddot{\theta}_h + \frac{2T_0}{\Omega} \dot{\theta}_h + k_T(\theta_h - \theta_m) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T(I_m + I_h)}{I_m \cdot I_h}} \end{cases}$$

3 - O esquema ilustra um rebocador puxando uma chata. Sendo dados: rigidez das amarras -  $k$ ; massa do rebocador -  $m$ ; massa da chata carregada -  $M$ ; força de propulsão do rebocador -  $P$ ; e sabendo-se que no instante inicial a chata está parada e as amarras estão frouxas, determinar a máxima velocidade inicial do empurrador para que a tensão em cada uma das amarras não ultrapasse  $P$ .

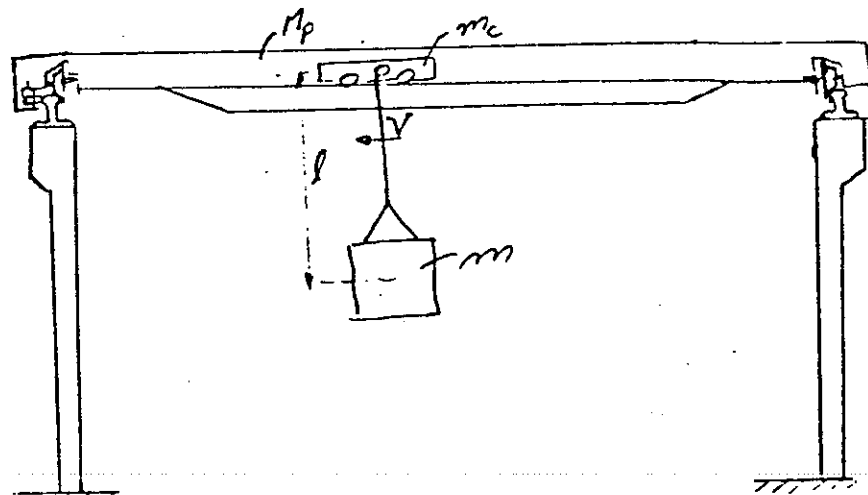


$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = P \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{M \cdot m}}$$

$$v \leq \frac{2 \cdot \omega \cdot P}{k} \cdot \sqrt{\frac{m}{M+m}} = \frac{2P}{\sqrt{k \cdot M}}$$

- 4 - O esquema abaixo representa uma ponte rolante cujo carro transversal, que estava se movendo com velocidade  $V$ , foi freado instantaneamente. Deseja-se estudar o esforço na estrutura após a frenagem. Sendo dados: massa total da ponte rolante, inclusive da parte das colunas que sustentam a ponte  $M_p$ ; rigidez transversal das colunas  $k$ ; massa do carro transversal  $m_c$ ; massa sendo transportada  $m$ ; comprimento do cabo  $l$ , pede-se:
- as equações diferenciais que regem os movimentos laterais da ponte e da massa suspensa;
  - as frequências naturais do sistema.



$$(M_p + m_c) \ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) + kx = 0$$

$$m(l\ddot{\theta} + \ddot{x}) + mg\theta = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k + g(M_p + m_c + m)}{2(M_p + m_c)} \pm \sqrt{\left(\frac{k + g(M_p + m_c + m)}{2(M_p + m_c)}\right)^2 - \frac{kg}{M_p + m_c}}$$

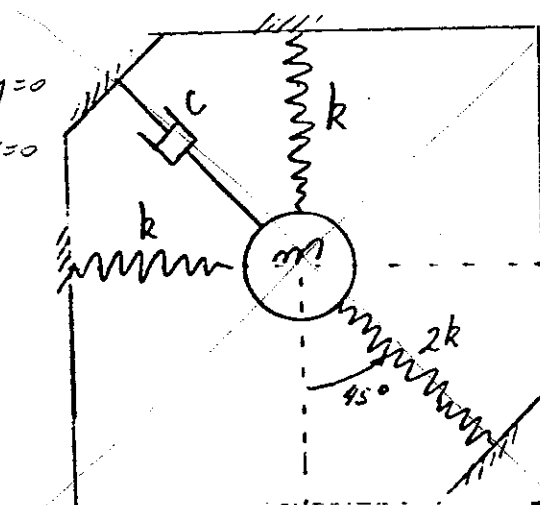
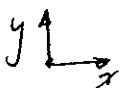
- 5 - Deseja-se estudar o movimento da suspensão mostrada na figura abaixo.

- escrever as equações diferenciais do movimento da massa  $m$ ;
- calcular as frequências naturais não amortecidas do sistema, especificando os modos principais de vibração do sistema.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{c}{2}(\dot{x} - \dot{y}) + 2kx - ky = 0 \\ m\ddot{y} + \frac{c}{2}(\dot{y} - \dot{x}) + 2ky - kx = 0 \end{cases}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad X_1 = Y_1$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}; \quad X_2 = -Y_2$$

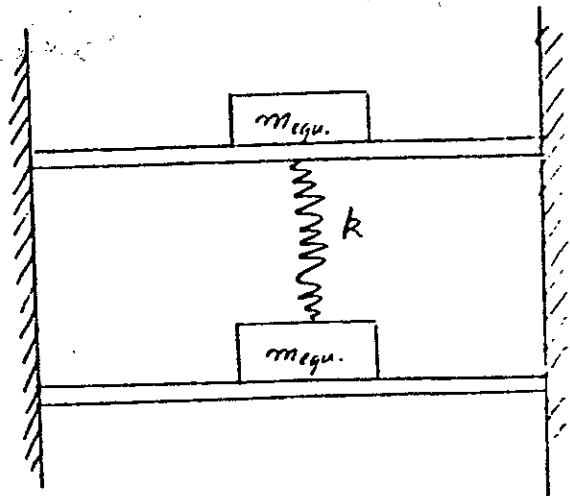


simétrico

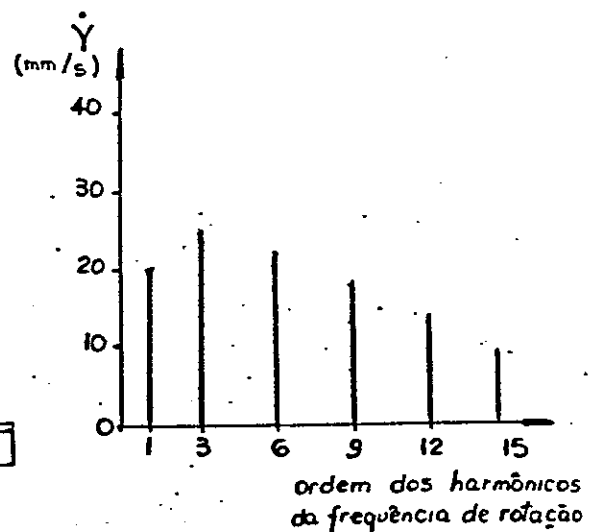
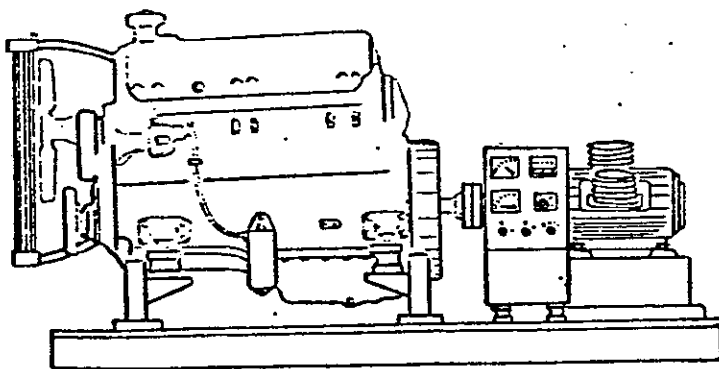
desacoplado sistema



- 6 - O sistema esquematizado na figura representa dois pavimentos de uma estrutura que foram interligados através de uma coluna de rigidez  $k$ , para reduzir a amplitude de vibração da laje superior. Sabendo-se que a 1ª frequência natural de cada pavimento é  $\omega$  e que a massa suposta, concentrada no centro do vão é  $m$ , calcular as frequências naturais do sistema após a construção da coluna.

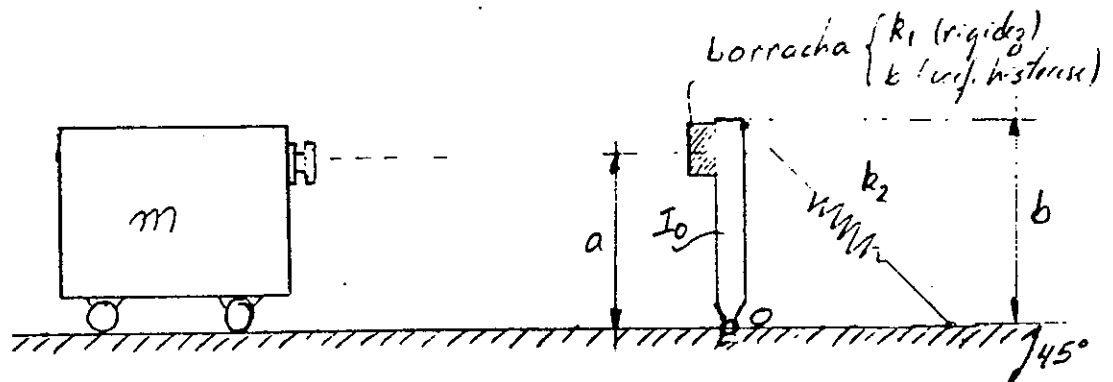


- 7 - Um grupo motor-compressor formado por um motor diesel de 6 cilindros, quatro tempos, e um compressor alternativo de três estágios, deve receber um painel de instrumentos eletrônicos de controle, cuja velocidade máxima de vibração deve ser menor que  $1 \text{ mm/s}$  em qualquer frequência específica. Sabendo-se que a rotação do conjunto motor-compressor pode variar entre 800 e 2000 rpm e que o ponto de fixação do painel tem uma velocidade de vibração formada por vários harmônicos conforme a figura abaixo, pede-se dimensionar a rigidez dos coxins da suspensão. São dados: massa do painel  $m=10 \text{ kg}$ ; borracha dos coxins com coeficiente de perda por histerese  $b=0,2$ .



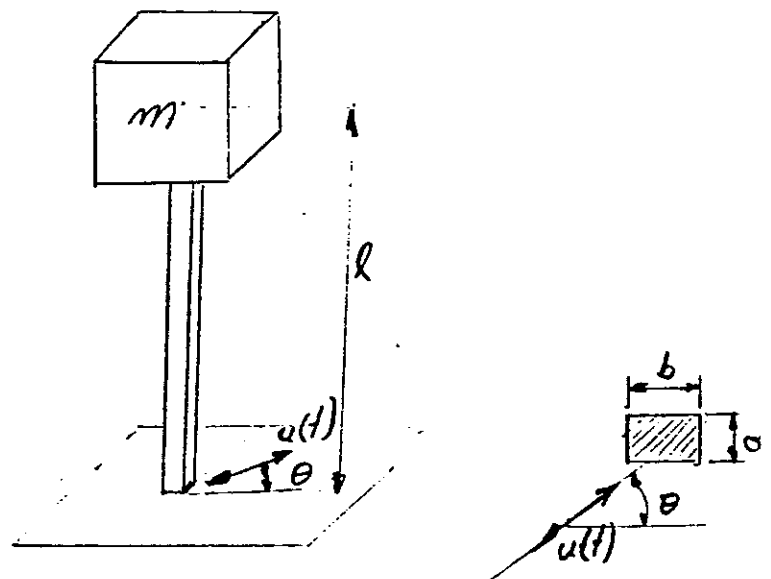
8 - O esquema representado na figura refere-se a uma vagoneta de massa  $m$  que atinge um batente de fim de linha com velocidade  $v$ . Para estudar a desaceleração máxima da vagoneta e o esforço máximo no batente, admite-se que o batente possa ser representado pelos parâmetros indicados. Pede-se:

- a) Escrever as equações diferenciais do movimento da vagoneta e do batente após o contato, admitindo-se pequenas amplitudes de vibração.
- b) Calcular as frequências naturais não amortecidas do sistema.

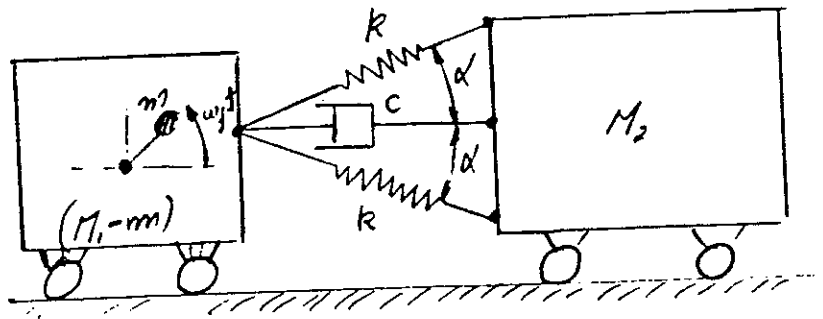


9 - Um poste de seção retangular  $a \times b$ , comprimento  $l$  e módulo de elasticidade  $E$ , suporta um transformador de massa  $m$  conforme indicado na figura. Deseja-se estudar o comportamento do sistema quando submetido a um tremor de terra de amplitude horizontal  $u(t)$  conforme mostrado na figura. Pede-se:

- a) escrever as equações do movimento da massa  $m$ ;
- b) calcular as frequências naturais do sistema.



- 10 - Dado o sistema esquematizado na figura abaixo, pede-se:
- as equações diferenciais do movimento dos carros de massas  $M_1$  e  $M_2$ ;
  - as frequências naturais e os modos de vibrar do sistema;
  - esquematizar graficamente a variação da amplitude do movimento da massa  $M_2$  em função da frequência  $\omega f$ .



- 11 - A base de um instrumento de precisão que não pode ser submetido a vibrações de alta frequência é constituída essencialmente de um bloco retangular de massa  $M$  e momento de inércia  $I$  em relação ao eixo central, preso por dois fios de aço pretensionados com uma força  $F_0$ , como mostrado na figura. Pede-se:

- escrever as equações diferenciais do movimento da base
- calcular as frequências naturais de vibração do sistema.

