UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

8. Reta no Espaço

LOB 1036 - Geometria Analítica

Profa. Paula C P M Pardal

O QUE VOCÊ DEVE SABER?

- Vetores.
  - Igualdade; Operações.
  - Sistemas de Coordenadas ➔ Espaço cartesiano ($\mathbb{R}^3$).
  - Paralelismo entre vetores.
- Produtos de Vetores.
  - Produto Escalar ➔ módulo; ângulo (e ortogonalidade) entre dois vetores.
  - Produto Vetorial ➔ paralelismo entre vetores; vetor simultaneamente ortogonal a dois vetores; interpretação geométrica do módulo.
  - Produto Misto ➔ coplanaridade entre vetores; interpretação geométrica do módulo.

1. Considerações Iniciais

- Considere uma reta r no $\mathbb{R}^3$e:

i. $\sum\left(O,\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}\right)$: sistema de coordenadas cartesiano (do $\mathbb{R}^3$);

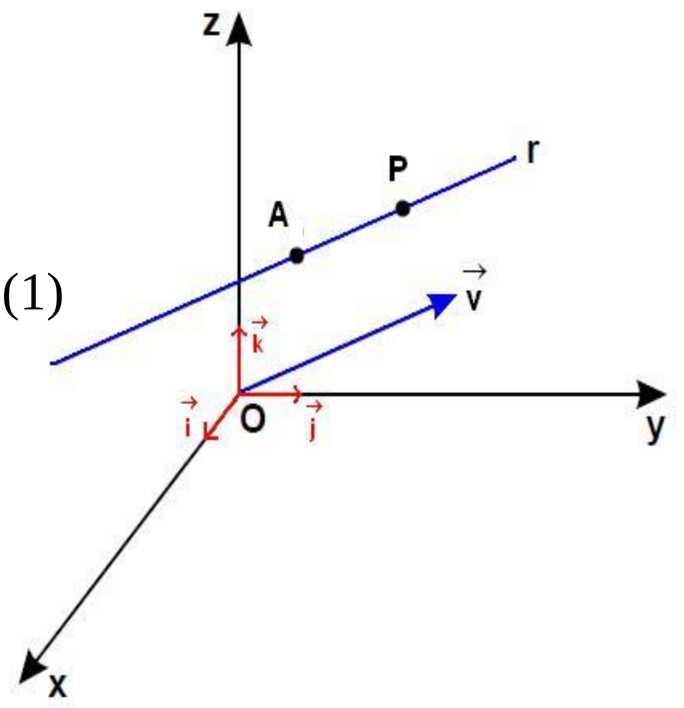
ii. $A(x_0, y_0, z_0)$: ponto conhecido de r $(A \in r)$;

iii. $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$: vetor diretor de r $(\vec{v} \parallel r)$, não nulo.

2. Equação Vetorial da Reta

- Existe somente uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$;
- Um ponto genérico do ***espaço cartesiano*** $P(x, y, z) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$.
  - Desta forma: $\overrightarrow{AP} = t\,\vec{v}\,, t \in \mathbb{R}$, ou:

$$r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a, b, c), t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$



  - Eq. **VETORIAL** da reta r.
  - t: parâmetro.

3. Equações Paramétricas da Reta

- A partir da eq. vetorial (1) de uma reta:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (2)$$

- Eqs. **PARAMÉTRICAS** da reta r, em relação ao sistema de coordenadas fixado.

4. Equações Simétricas da Reta

- A partir das eqs. paramétricas (2) de uma reta e considerando:

$$abc \neq 0$$

tem-se:

$$r: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (= t) \qquad (3)$$

- Eqs. **SIMÉTRICAS** ou normais da reta r que passa pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b, c)$.

5. Equações Reduzidas da Reta

- Nas eqs. simétricas (3), há duas igualdades independentes. Em razão disso, é possível escrever duas das variáveis em função da terceira, chamada ***variável livre***.

VARIÁVEL LIVRE: x

- Igualdades independentes: $\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{x-x_0}{a} \\ \dfrac{z-z_0}{c} = \dfrac{x-x_0}{a} \end{cases}$

- $\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x + y_0 - \dfrac{b}{a}x_0 \\ z = \dfrac{c}{a}x + z_0 - \dfrac{c}{a}x_0 \end{cases} \xrightarrow{\textit{Reescrevendo}} r: \begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \end{cases}$

- Eqs. **REDUZIDAS** na variável x.

VARIÁVEL LIVRE: *y*

- Igualdades independentes: $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \dfrac{z - z_0}{c} = \dfrac{y - y_0}{b} \end{cases}$

- $\begin{cases} x = \dfrac{a}{b}y + x_0 - \dfrac{a}{b}y_0 \\ z = \dfrac{c}{b}y + z_0 - \dfrac{c}{b}y_0 \end{cases} \xrightarrow{Reescrevendo} r: \begin{cases} x = m_2y + n_2 \\ z = p_2y + q_2 \end{cases}$ Eqs. **REDUZIDAS** na variável *y*.

VARIÁVEL LIVRE: *z*

- Igualdades independentes: $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$

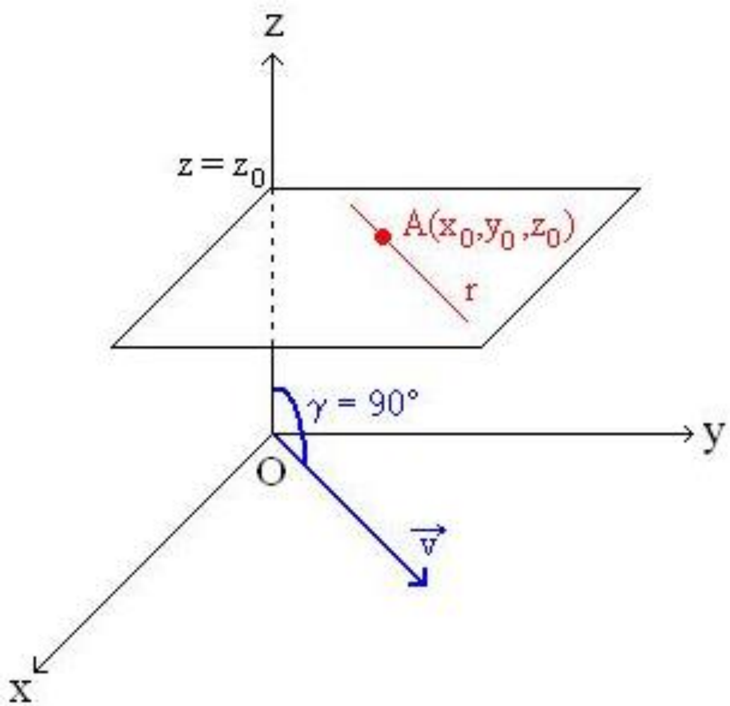
- $r: \begin{cases} x = \dfrac{a}{c}z + x_0 - \dfrac{a}{c}z_0 \\ y = \dfrac{b}{c}z + y_0 - \dfrac{b}{c}z_0 \end{cases} \xrightarrow{Reescrevendo} r: \begin{cases} x = m_3z + n_3 \\ y = p_3z + q_3 \end{cases}$ Eqs. **REDUZIDAS** na variável *z*.

EXEMPLO

- Determine as eqs. vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas da reta r, que passa pelos pontos $A(1, -2, 3)$ e $B(3, -1, -1)$.
  - Utilize tanto o ponto A quanto o ponto B para determinar as eqs. de r;
  - Considere y como variável independente das eqs. reduzidas.

I. Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula

- $\mathbf{c = 0}$ $\therefore$ $\vec{v} = (a, b, 0)$; $z = z_0$.

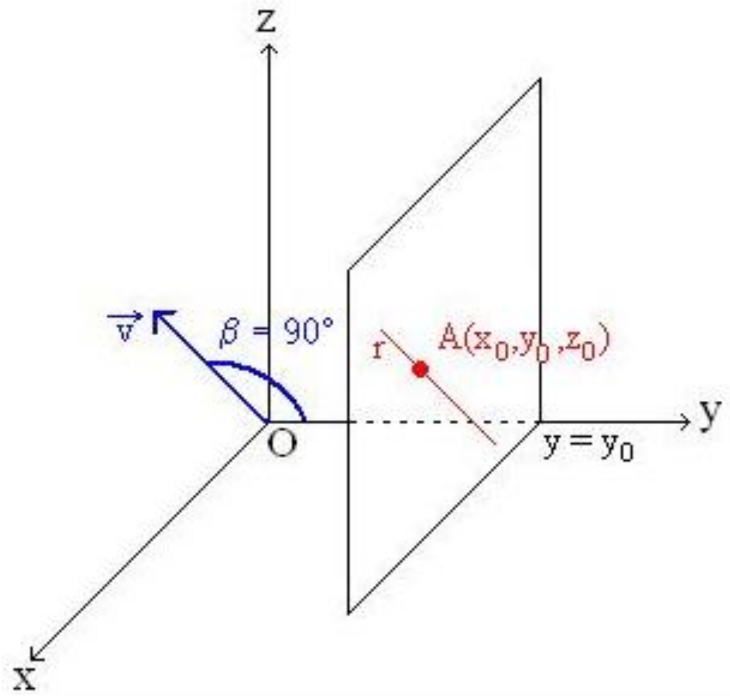


$\vec{v} \perp Oz$; **r ∥ $\boldsymbol{Oxy}$**.

As eqs. simétricas de r são reescritas da seguinte forma:

$$r: \begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \end{cases}, \; a, b \neq 0.$$

- $\mathbf{b = 0}$ $\therefore$ $\vec{v} = (a, 0, c)$; $y = y_0$.

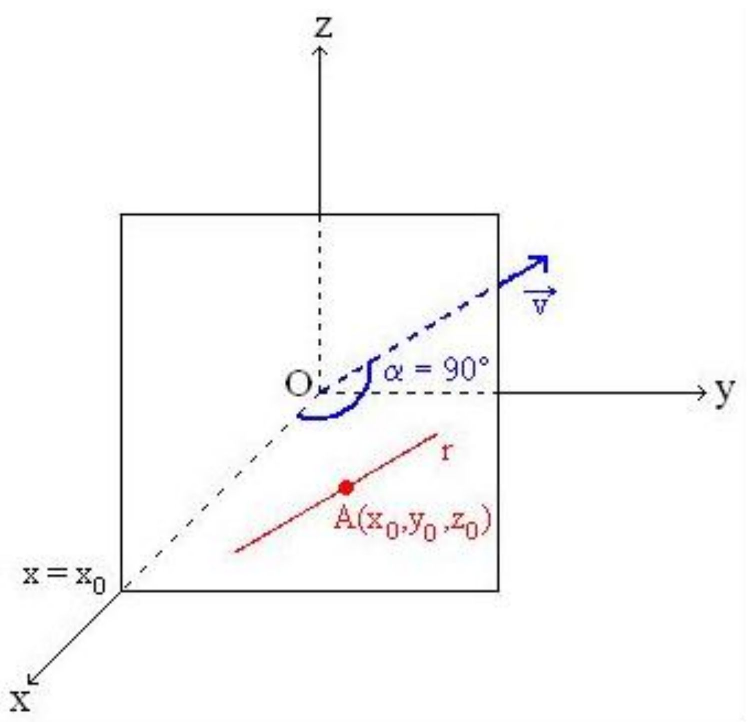


$\vec{v} \perp Oy$; $\mathbf{r \parallel O\mathit{xz}}$.

As eqs. simétricas de r são reescritas da seguinte forma:

$$r: \begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}, \text{ a,c} \neq 0.$$

$\mathbf{a = 0} \therefore \vec{v} = (0, b, c);\ x = x_0.$



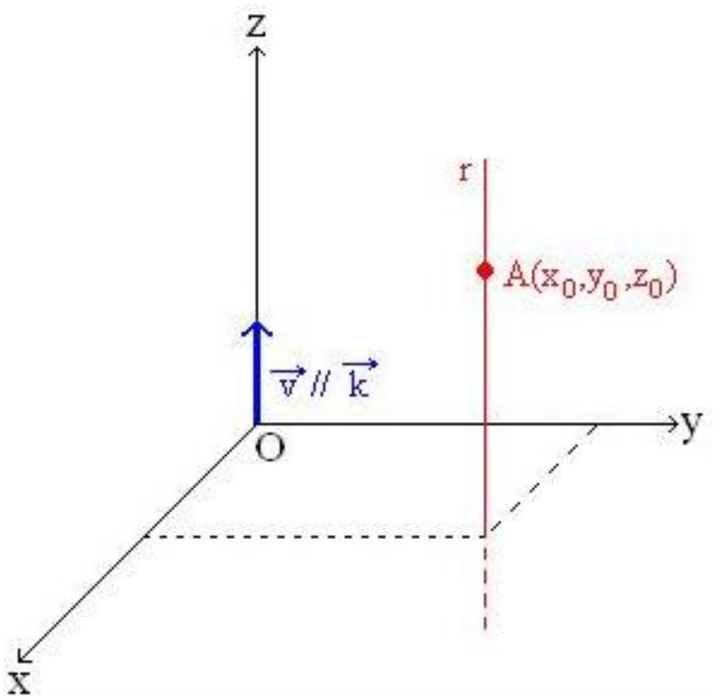
$\vec{v} \perp Ox$; $\mathbf{r \parallel Oyz}$.

As eqs. simétricas de r são reescritas da seguinte forma:

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}, \ b,c \neq 0.$$

II. Duas das componentes de $\vec{v}$ são nulas

- $\mathbf{a = b = 0}, c \neq 0 \therefore \vec{v} = (0, 0, c);\ x = x_0; y = y_0.$

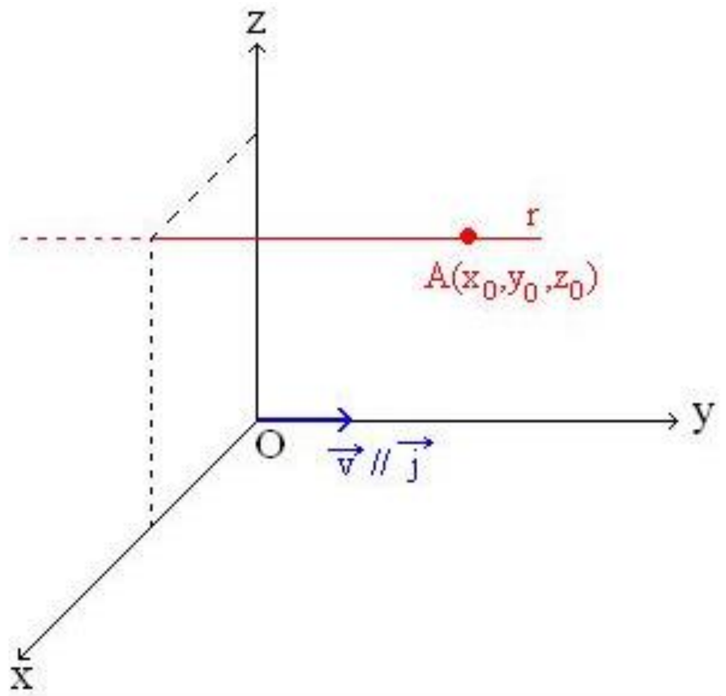


$\vec{v}$ tem a direção do versor $\vec{k}$ e $\mathbf{r \parallel Oz}$.

As eqs. paramétricas de r são reescritas da seguinte forma:

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + c\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- $\mathbf{a = c = 0}, b \neq 0 \therefore \vec{v} = (0, b, 0);\ x = x_0; z = z_0.$

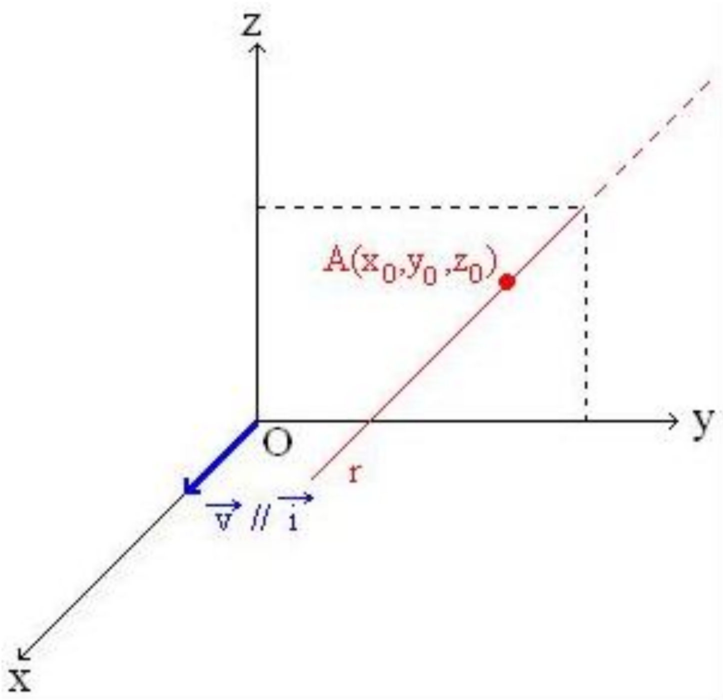


$\vec{v}$ tem a direção do versor $\vec{j}$ e $\mathbf{r \parallel O}\boldsymbol{y}$.

As eqs. paramétricas de r são reescritas da seguinte forma:

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \\ y = y_0 + b\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- $\mathbf{b = c = 0}, a \neq 0 \therefore \vec{v} = (a, 0, 0);\ y = y_0; z = z_0.$



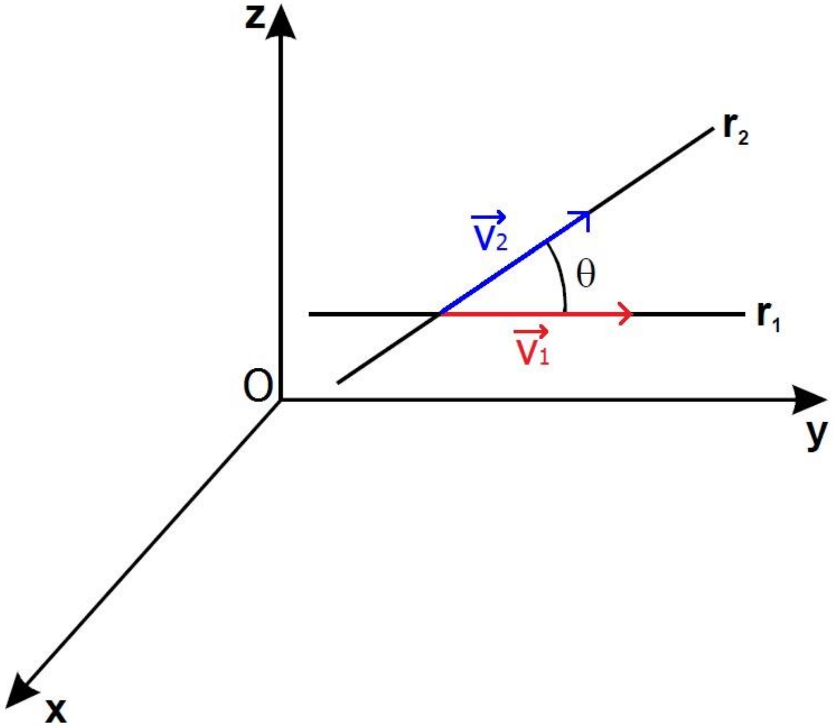
$\vec{v}$ tem a direção do versor $\vec{i}$ e $\mathbf{r \parallel O}\boldsymbol{x}$.

As eqs. paramétricas de r são reescritas da seguinte forma :

$$r: \begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

7. Ângulo entre Duas Retas

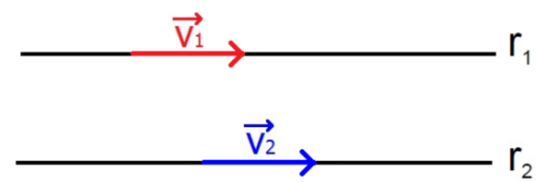
- Sejam as retas:
  - r_1: passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$;
  - r_2: passa pelo ponto $B(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$.



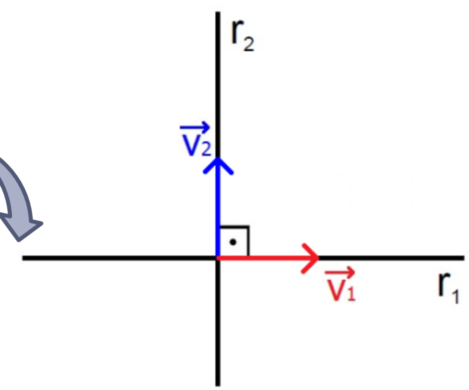
Ângulo entre duas retas é o **menor ângulo** formado entre o vetor diretor de r_1 e o vetor diretor de r_2:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|\,|\overrightarrow{v_2}|} \quad \text{, com } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Sejam r_1 e r_2 retas com vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente.

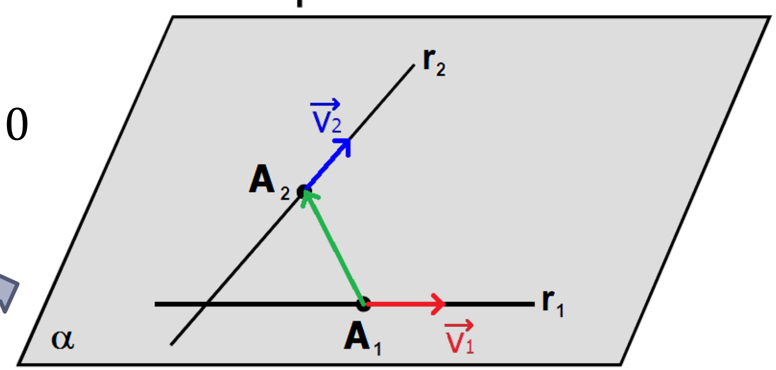


- **Condição de Paralelismo:** $\overrightarrow{v_1} = k\,\overrightarrow{v_2}\,,\ k \in \mathbb{R}$



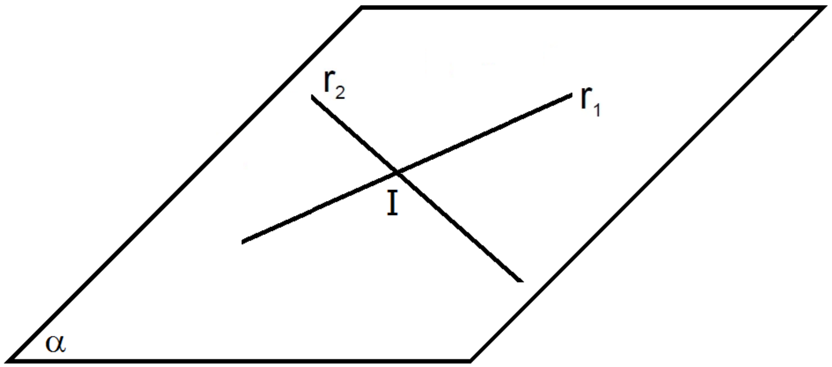
- **Condição de Ortogonalidade:** $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$

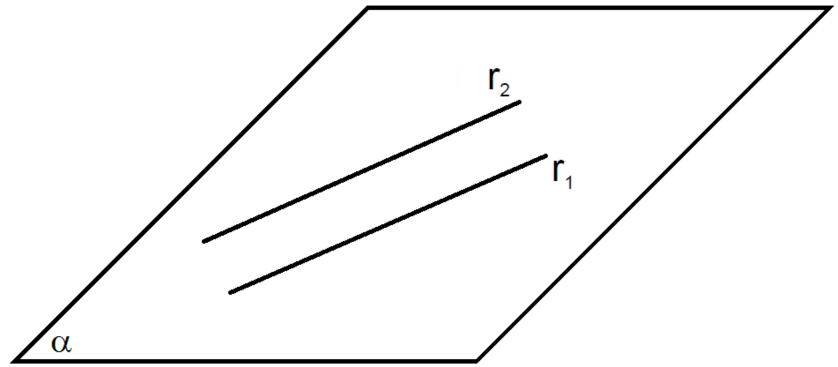
- **Condição de Coplanaridade:** $[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}] = 0$



As retas r_1 e r_2, no espaço, podem ser:

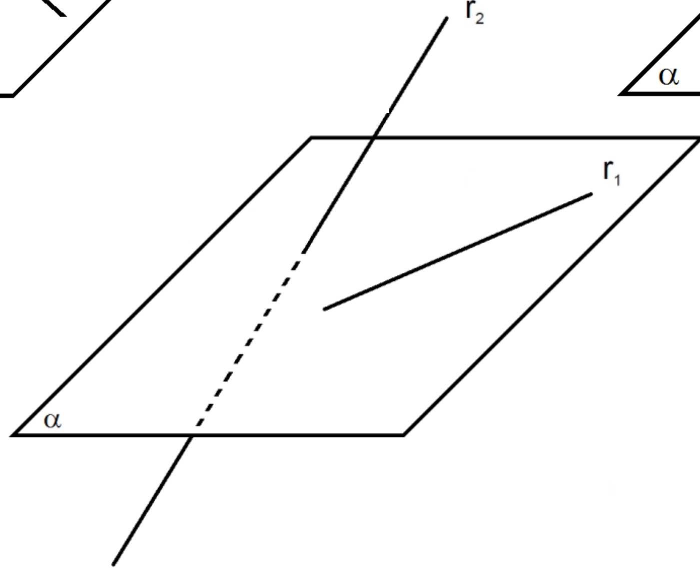
- **COPLANARES**: ***Concorrentes*:** $r_1 \cap r_2 = \{I\}$; ***Paralelas*:** $r_1 \cap r_2 = \emptyset$





- **REVERSAS**:

  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$



Teste das Posições Relativas

- Dadas as retas: r_1, que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{\mathrm{v}_1} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1)$; e r_2, que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{\mathrm{v}_2} = (\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2, \mathrm{c}_2)$. Elas serão:

1. **COPLANARES** se: $\left[\overrightarrow{\mathrm{v}_1}, \overrightarrow{\mathrm{v}_2}, \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\right] = 0$

   a) ***Paralelas*** se: $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\mathrm{v}_1} = k\, \overrightarrow{\mathrm{v}_2}$

   b) ***Concorrentes*** se: $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\mathrm{v}_1} = k\, \overrightarrow{\mathrm{v}_2}$

2. **REVERSAS** se: $\left[\overrightarrow{\mathrm{v}_1}, \overrightarrow{\mathrm{v}_2}, \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\right] \neq 0$

10. Intersecção de Duas Retas

- Se duas retas r_1 e r_2 são ***concorrentes***, o ponto de intersecção $\mathrm{I}(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i}, \mathrm{z_i})$ será a solução do sistema formado pelas **eqs. reduzidas** das duas retas.

EXEMPLO: Sejam os pontos $A_1(8,1,9)$, $A_2(3,-4,4)$ e os vetores diretores $\overrightarrow{\mathrm{v_1}} = (2,-1,3)$, $\overrightarrow{\mathrm{v_2}} = (1,-2,2)$ de r_1 e de r_2, respectivamente. Suas eqs. podem ser dadas por:

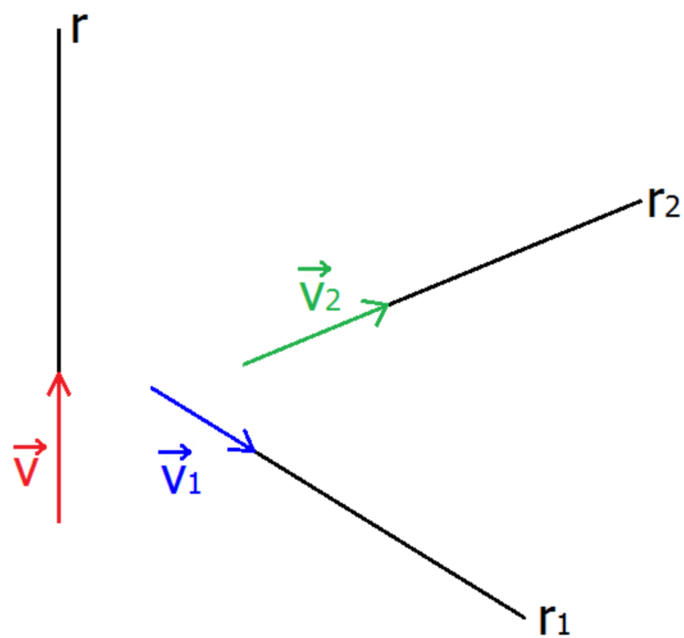
$$r_1: \begin{cases} \mathrm{x} = 8 + 2\mathrm{t} \\ \mathrm{y} = 1 - \mathrm{t} \quad , t \in \mathbb{R} \\ \mathrm{z} = 9 + 3\mathrm{t} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2: \frac{\mathrm{x} - 3}{1} = \frac{-4 - \mathrm{y}}{2} = \frac{\mathrm{z} - 4}{2}$$

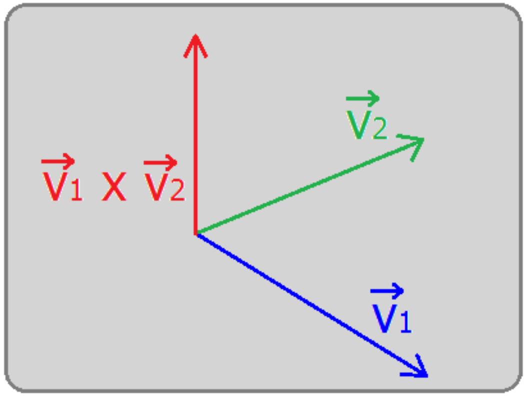
- O ponto $\mathrm{I}(-2,6,-6)$ é solução do sistema $\therefore$ suas coordenadas satisfazem o sistema formado pelas eqs. reduzidas de r_1 e de r_2.

11. Reta Ortogonal a Duas Retas

- Sejam as retas r_1 e r_2, com as direções de $\overrightarrow{\mathrm{v}_1} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1)$ e de $\overrightarrow{\mathrm{v}_2} = (\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2, \mathrm{c}_2)$, respectivamente. Qualquer reta r, simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2, terá um vetor diretor, $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$, ***paralelo*** ao vetor $\overrightarrow{\mathrm{v}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{v}_2}$.

$$\vec{\mathrm{v}} = k\,(\overrightarrow{\mathrm{v}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{v}_2}), \qquad k \neq 0$$





EXERCÍCIOS

1. Determine as eqs. da reta r que passa pelo ponto $A(4,-1,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{i}-\vec{j}$.

2. Represente graficamente as retas cujas equações são:

a) $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$.

3. Determine a posição relativa das retas r e s:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \text{ e } s: (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,2,0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Reversas

4. Se houver, calcule o ponto de intersecção entre as retas:

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \text{ e } s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

$I(4, 3, 9)$

5. Determine a e b tal que a reta $r: \frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{-z}{2}$ seja simultaneamente ortogonal às retas:

$$r_1: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t + 3\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 1 \end{cases} \text{ e } r_2: \begin{cases} y = x \\ \\ z = 2x \end{cases}.$$

$a = 14; b = -10$