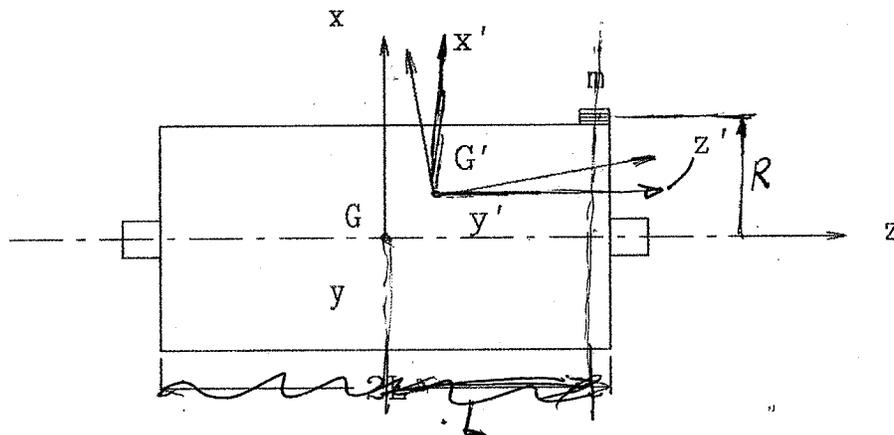


2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

EXERCÍCIO N.1

Seja um rotor ~~simétrico~~ de massa M perfeitamente balanceado, como mostrado na figura abaixo. Um sistema de referência que tenha um eixo coincidente com o eixo de rotação do rotor e centrado no seu baricentro constitui um sistema de eixos centrais de inércia, ou seja:



$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad J_1 = J_2$$

A adição de uma massa m ($m \ll M$) numa das extremidades do rotor, altera ~~a simetria~~ ^{a simetria} do rotor no plano Gyz , assim como provoca uma translação do seu baricentro. Determinar a posição e as direções dos novos eixos centrais de inércia.

Solução:

A posição e as direções dos eixos centrais de inércia serão calculadas utilizando como referência os eixos centrais de inércia do rotor ~~simétrico~~ ^{balanceado}.

Determinação da translação do baricentro:

Inicialmente será considerada uma translação pura do sistema de eixo $Gxyz$ para o sistema $G'x'y'z'$. Por definição de baricentro temos:

$$M \cdot \vec{r}_{T.G} = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \text{sendo } \vec{r}_i = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z$$

Direção X: $(M + m).x_G = M.0 + m.R \quad \therefore x_G = \frac{m.R}{(M + m)}$

Direção Y: $(M + m).y_G = M.0 + m.0 \quad \therefore y_G = 0$

Direção Z: $(M + m).z_G = M.0 + m.L \quad \therefore z_G = \frac{m.L}{(M + m)}$

Devido a adição da massa m , o tensor original de inércia altera-se para:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

Sendo: $J_{xx} = J_1 + m(y^2 + z^2) = J_1 + m(0 + L^2) \approx J_1$

$J_{yy} = J_2 + m(x^2 + z^2) = J_2 + m(R^2 + L^2) \approx J_2$

$J_{zz} = J_3 + m(y^2 + x^2) = J_3 + m(0 + R^2) \approx J_3$

Pois $M \gg m$ (Deve-se observar que J_1 é da ordem de $M.L^2$ e que J_3 é da ordem de $M.R^2$)

$J_{xy} = 0 + m.R.0 = 0$

$J_{xz} = 0 + m.R.L = m.R.L$

$J_{yz} = 0 + m.0.L = 0$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & -m.R.L \\ 0 & J_2 & 0 \\ -m.R.L & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

O tensor de inércia para o sistema $G'x'y'z'$ utilizando a propriedade de translação do baricentro, fica:

$$J = J' + M_T.d^2$$

Assim:

$J'_{xx} = J_{xx} - (M + m).(y_G^2 + z_G^2) \approx J_{xx} \approx J_1$

$J'_{yy} = J_{yy} - (M + m).(x_G^2 + z_G^2) \approx J_{yy} \approx J_2$

$J'_{zz} = J_{zz} - (M + m).(x_G^2 + y_G^2) \approx J_{zz} \approx J_3$

$J'_{x3} = J_{x3} - (M + m).x_G.z_G \approx J_{x3} = m.R.L$

pois $y_G = 0$; x_G e z_G muito pequenos.

Obtemos portanto, $[J'] = [J]$

Determinação das direções principais de inércia:

O tensor de inércia é um operador linear que aplicado a um versor \vec{e} , transforma-o num vetor $J[\vec{e}]$. Na direção principal de inércia, o vetor $J[\vec{e}]$, possui a mesma direção do versor \vec{e} , divergindo apenas em módulo, ou seja:

$$\text{Sendo: } J[\vec{e}] = [J] \cdot \vec{e}$$

na direção principal de inércia, temos:

$$[J] \cdot \vec{e} = \lambda \cdot \vec{e} \quad \text{ou ainda:}$$

$$[J - \lambda \cdot [I]] \cdot \vec{e} = \vec{0}$$

O que se resume num problema de auto-valor, sendo o versor \vec{e} , o auto-vetor associado. Dessa forma, os valores de λ constituirão os momentos principais de inércia, calculados no baricentro do sistema de eixos $G'x'y'z'$. Os auto-vetores associados a cada autovalor fornecerão as componentes para cada direção central de inércia, em relação ao sistema original.

Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} (J_1 - \lambda) & 0 & -m.R.L \\ 0 & (J_1 - \lambda) & 0 \\ -m.R.L & 0 & (J_3 - \lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = 0$$

A solução trivial, ou seja, $e_x = e_y = e_z = 0$, obviamente não interessa, logo, para que o sistema tenha solução devemos impor que o determinante da matriz quadrada seja nulo. Assim, temos:

$$(J_1 - \lambda) \cdot \left[(J_1 - \lambda) \cdot (J_3 - \lambda) - (m.R.L)^2 \right] = 0$$

Este polinômio é chamado *Polinômio Característico do problema de auto-valor*. Suas raízes constituirão, assim, os três momentos principais de inércia, sendo associado a cada raiz um auto-vetor, dando assim, as três direções centrais de inércia para o rotor com a massa adicionada.

Uma das raízes para esse polinômio é obtida quando a expressão contida entre o primeiro par de parênteses for nula, ou:

$$\lambda_1 = J_1$$

Substituindo λ_1 , no sistema acima, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -m.L.R \\ 0 & 0 & 0 \\ -m.L.R & 0 & (J_3 - J_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \\ e_{z1} \end{Bmatrix} = 0$$

A partir desse sistema de equações, podemos calcular o auto-vetor associado a esse autovalor, ou seja, as componentes da direção do eixo central de inércia associado ao momento de inércia J_1 .

Como foi imposto que o determinante da matriz quadrada fosse nulo, esse sistema tornou-se *linearmente dependente*, tornando o problema de autovetor *indeterminado*, ou seja, não haverá apenas uma solução, mas um conjunto de soluções que satisfazem ao sistema. Entretanto, todas as soluções encontradas devem satisfazer a todas as equações do sistema acima; assim o conjunto de soluções associado ao momento de inércia J_1 , será:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.e_{y1} = 0 \longleftrightarrow e_{y1} = \forall \\ -m.L.R.e_{z1} = 0 \longleftrightarrow e_{z1} = 0 \therefore e_{x1} = 0 \end{array} \right.$$

Com esse resultado, temos que a direção do eixo central de inércia associado ao momento de inércia J_1 é dada pelas seguintes componentes:

$$e_{x1} = 0; e_{y1} = \forall, e_{z1} = 0$$

As demais raízes são conseguidas anulando-se a expressão contida entre o segundo par de parênteses, assim:

$$\left[(J_1 - \lambda) \cdot (J_3 - \lambda) - (m.R.L)^2 \right] = 0$$

Sendo o termo $(mRL)^2$ muito pequeno, podemos assumir que as raízes (λ_2 e λ_3) que satisfazem a essa expressão são da mesma ordem de grandeza de J_1 e J_3 , a menos de um valor Δ muito pequeno, ou seja:

para $\lambda_2 = J_1 - \Delta$, temos:

$$\left[J_1 - (J_1 - \Delta) \right] \cdot \left[J_3 - (J_1 - \Delta) \right] - (mRL)^2 = 0$$

Desprezando o termo de segunda ordem, temos:

$$\Delta = \frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)}$$

Assim, temos que:

$$\lambda_2 = J_1 + \frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)}$$

Calculando os autovetores associados a esse autovalor, temos:

$$\begin{bmatrix} -\frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)} & 0 & -mRL \\ 0 & -\frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)} & 0 \\ -mRL & 0 & (J_3 - J_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{Bmatrix} = 0$$

Como podemos verificar, a primeira e a terceira equação são linearmente dependentes, de maneira que podemos utilizar apenas uma delas, juntamente com a segunda equação desse sistema para encontrarmos os autovetores associados a esse autovalor. Novamente, não teremos apenas uma solução mas um conjunto de soluções, ou seja:

$$\frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)} \cdot e_{y2} = 0 \quad \therefore e_{y2} = 0$$

$$-mRL \cdot e_{x2} - (J_1 - J_3) \cdot e_{z2} = 0 \quad \therefore e_{z2} = -\frac{mRL}{(J_1 - J_3)} \cdot e_{x2}$$

Com esse resultado, obtemos as componentes da direção do eixo central de inércia associado ao momento de inércia λ_2 :

$$\boxed{e_{x2} = 1; \quad e_{y2} = 0 \quad e \quad e_{z2} = -\gamma}$$

$$\gamma = \frac{mRL}{(J_1 - J_3)}$$

A terceira raiz do polinômio característico é dada por:

$$\lambda_3 = J_3 - \Delta$$

$$\left[J_1 - (J_3 - \Delta) \right] \cdot \left[J_3 - (J_3 - \Delta) \right] - (mRL)^2 = 0$$

Desprezando o termo de segunda ordem, temos:

$$\Delta = \frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)}$$

Assim, temos que:

$$\lambda_3 = J_3 - \frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)}$$

Calculando os autovetores associados a esse autovalor, temos:

$$\begin{bmatrix} (J_1 - J_3) & 0 & -mRL \\ 0 & (J_1 - J_3) & 0 \\ -mRL & 0 & \frac{(mRL)^2}{(J_1 - J_3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \\ e_{z3} \end{Bmatrix} = 0$$

O conjunto de soluções que fornece a direção do eixo central de inércia associado a esse autovalor é dado por:

$$(J_1 - J_3) \cdot e_{y3} = 0 \therefore e_{y3} = 0$$

$$(J_1 - J_3) \cdot e_{x3} - mRL \cdot e_{z3} = 0 \therefore e_{x3} = \frac{mRL}{(J_1 - J_3)} \cdot e_{z3}$$

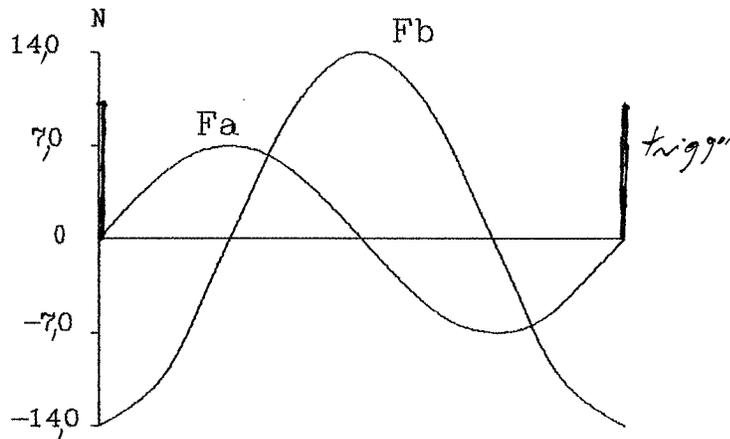
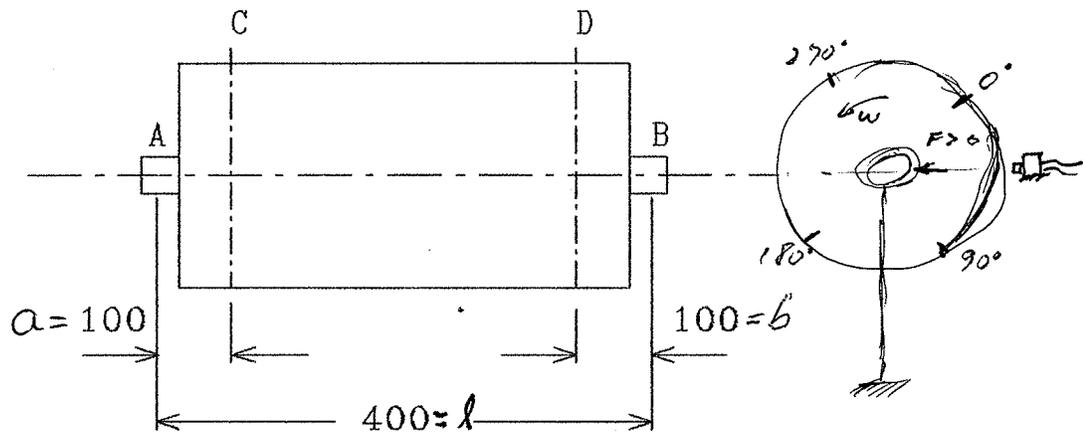
Com esse resultado, obtemos as componentes da direção do eixo central de inércia associado ao ~~momento de inércia~~ *autovalor* λ_3 :

$$e_{x3} = \gamma; \quad e_{y3} = 0 \quad e \quad e_{z3} = 1$$

Concluindo, se adicionarmos a uma massa $m \ll M$, ^{para o plano $x_3 z_3$ de} ~~um rotor~~ ^{com eixo de} ~~no plano $x_3 z_3$~~ ^{com eixo de} ~~provocamos um deslocamento do centro de~~ ^{provocamos um deslocamento do centro de} ~~massa dado por:~~ ^{massa dado por:} $x_G = \frac{mR}{M}$ e $z_G = \frac{mb}{M}$, e uma inclinação do eixo central de inércia que coincide com o eixo de rotações de $\beta = \frac{mRL}{(J_1 - J_3)}$.

Exercício N. 2

O rotor da figura deve ser balanceado em uma máquina de balanceamento de mancais rígidos. No gráfico abaixo, são apresentados os sinais de forças aplicadas pelo rotor nos mancais da balanceadora, em função do tempo, juntamente com o pulso de referência ("trigger"). Determinar as massas m_c e m_d para balancear o rotor. Se o rotor deve ser balanceado para uma classe ISO G 2,5, determinar quais os valores de desbalanceamento residual admissível nos planos C e D.



Dados:

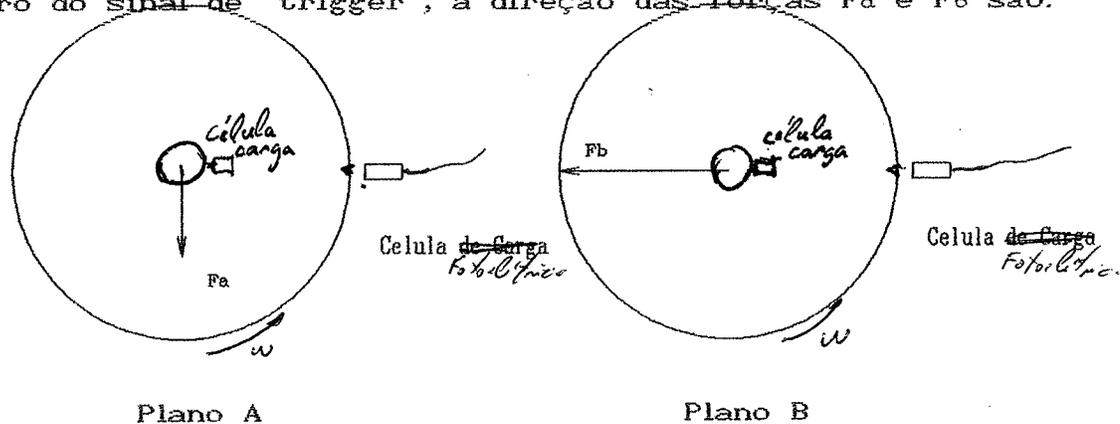
Rotação da balanceadora:	800 rpm
Rotação de trabalho do rotor:	3.600 rpm
Peso do rotor:	50 kg
Raio de correção no plano C:	200 mm
Raio de correção no plano D:	250 mm
Amplitude da Força no mancal A:	70 N
Amplitude da Força no mancal B:	140 N

Para um rotor real, o lugar geométrico dos centros de massa de cada fatia do rotor é uma curva espacial ao longo do seu comprimento, resultante de erros de usinagem, não homogeneidade de material, etc. A consequência desse fato é que não existe coincidência de nenhum de seus eixos centrais de inércia com o eixo de rotação do rotor. Entretanto, como numa máquina real, o rotor é forçado a girar em torno de seu eixo de rotação, surgirão forças dinâmicas nos seus mancais.

A operação de balanceamento não significa a correção dessa curva de distribuição de centros de massas, mas apenas a minimização dos seus efeitos nos mancais, ou seja, a operação de balanceamento do rotor tem o objetivo de reduzir as forças aplicadas pelo rotor aos seus mancais, através da adição ou retirada de massa em dois ou mais planos de correção. Para rotores rígidos, são necessários e suficientes dois planos de correção.

As máquinas de balanceamento de mancais rígidos tem a propriedade de realizar o balanceamento com rotações muito inferiores à velocidade crítica da combinação rotor/mancais, de maneira que a direção das forças dinâmicas medidas nos seus mancais estão perfeitamente em fase com posição do eixo central de inércia.

A partir do gráfico acima, podemos notar que no instante de disparo do sinal de "trigger", a direção das forças F_a e F_b são:



	Amplitude	Ângulo
$F_a =$	70 N.	$+90^\circ$
$F_b =$	140 N.	180°

Essas forças F_a e F_b devem ser reduzidas acrescentando-se massas nos planos \mathcal{E} e \mathcal{D} . Entretanto, qualquer massa acrescentada num dos planos irá provocar ^{forças} reações em ambos os mancais, ou seja, acrescentando-se uma massa m_c no plano \mathcal{E} , surgirão nos mancais as seguintes reações:

F_{ac} - Força aplicada no mancal A devido a uma massa colocada no plano \mathcal{E} .

F_{bc} - Força aplicada no mancal B devido a uma massa colocada no plano \mathcal{E} .

Acrescentando-se uma massa m_d no plano \mathcal{D} , surgirão nos mancais as

seguintes ^{forças} reações:

F_{ad} - Força aplicada no mancal A devido a uma massa colocada no plano D .

F_{bd} - Força aplicada no mancal B devido a uma massa colocada no ~~manco~~ ^{plano} D .

A combinação dessas forças em cada mancal deve ser tal que:

$$\vec{F}_{ac} + \vec{F}_{ad} = -\vec{F}_a$$

$$\vec{F}_{bc} + \vec{F}_{bd} = -\vec{F}_b$$

As forças nos mancais devido às massas m_c e m_d são calculadas ~~como~~ através da equivalência de sistemas de forças, como segue:

Massa m_c

$$\vec{F}_c \cong \vec{F}_{ac} + \vec{F}_{bc}$$

$$\vec{F}_c \cdot a \cong F_{bc} \cdot l$$

$$\vec{F}_{ac} = \vec{F}_c \cdot \frac{(l - a)}{l} \quad \therefore \quad \vec{F}_{bc} = \vec{F}_c \cdot \frac{a}{l}$$

Fazendo o mesmo para a massa m_d , temos:

$$\vec{F}_{ad} = \vec{F}_d \cdot \frac{b}{l} \quad \therefore \quad \vec{F}_{bd} = \vec{F}_d \cdot \frac{(l - b)}{l}$$

Fazendo o equilíbrio de forças em cada mancal, nas direções horizontal e vertical e escrevendo esse sistema na forma matricial, temos:

Direção Horizontal:

$$\begin{bmatrix} \frac{(l - a)}{l} & \frac{b}{l} \\ \frac{a}{l} & \frac{(l - b)}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_c \cdot \cos\theta_c \\ F_d \cdot \cos\theta_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_a \cdot \cos\theta_a \\ -F_b \cdot \cos\theta_b \end{Bmatrix}$$

Direção Vertical:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{(l-a)} & b \\ l & l \\ a & \overbrace{(l-b)} \\ l & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_c \cdot \text{sen}\theta_c \\ F_d \cdot \text{sen}\theta_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_a \cdot \text{sen}\theta_a \\ -F_b \cdot \text{sen}\theta_b \end{Bmatrix}$$

A solução para esse sistema é dada por:

$$F_c \cdot \text{cos}\theta_c = \frac{\begin{vmatrix} -F_a \cdot l \cdot \text{cos}\theta_a & b \\ -F_b \cdot l \cdot \text{cos}\theta_b & (l-b) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$F_c \cdot \text{sen}\theta_c = \frac{\begin{vmatrix} -F_a \cdot l \cdot \text{sen}\theta_a & b \\ -F_b \cdot l \cdot \text{sen}\theta_b & (l-b) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$F_d \cdot \text{cos}\theta_d = \frac{\begin{vmatrix} (l-a) & -F_a \cdot l \cdot \text{cos}\theta_a \\ a & -F_b \cdot l \cdot \text{cos}\theta_b \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$F_d \cdot \text{sen}\theta_d = \frac{\begin{vmatrix} (l-a) & -F_a \cdot l \cdot \text{sen}\theta_a \\ a & -F_b \cdot l \cdot \text{sen}\theta_b \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Sendo

$$\Delta = (l-a) \cdot (l-b) - a \cdot b$$

As amplitudes e as posições das forças a serem geradas nos planos \mathcal{C} e \mathcal{D} são determinados por:

$$F_c = \sqrt{\left[F_c \cdot \text{cos}\theta_c \right]^2 + \left[F_c \cdot \text{sen}\theta_c \right]^2}$$

$$\theta_c = \text{tg}^{-1} \left[\frac{F_c \cdot \text{sen}\theta_c}{F_c \cdot \text{cos}\theta_c} \right]$$

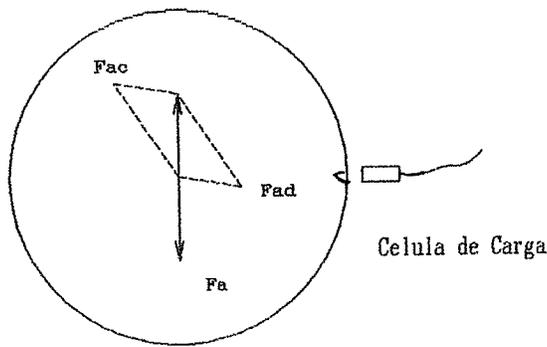
$$F_d = \sqrt{\left(F_d \cdot \cos\theta_d\right)^2 + \left(F_d \cdot \sin\theta_d\right)^2}$$

$$\theta_d = \text{tg}^{-1} \left(\frac{F_d \cdot \sin\theta_d}{F_d \cdot \cos\theta_d} \right)$$

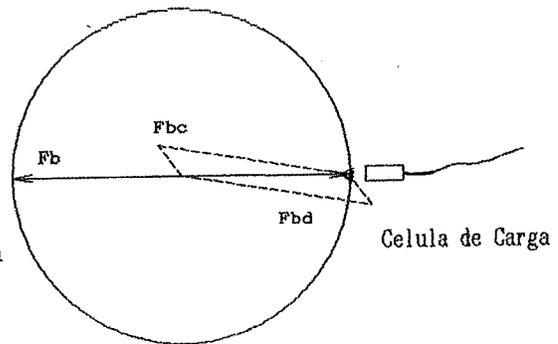
	Amplitude		Ângulo
$F_c =$	126,2 N	-	128,7 236,3
$F_d =$	212,9 N	-	19,5

As massas de correções são calculadas por:

$$m_c = \frac{F_c}{r_c \cdot \omega_{bal}^2} = 89,9 \text{ g} \quad m_d = \frac{F_d}{r_d \cdot \omega_{bal}^2} = 121 \text{ g}$$



Plano A



Plano B

ISO G 2,5

$$e \cdot \omega_{tr} = 2,5 \text{ mm/s} \quad \therefore e \cdot \frac{3600}{60} \cdot 2\pi = 2,5 \quad \therefore e = 6,6 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$m'_c \cdot r_c = m'_d \cdot r_d = \frac{M \cdot e}{2}$$

$$m'_c \cdot r_c = \frac{50000 \cdot 6,6 \times 10^{-3}}{2} = 166 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

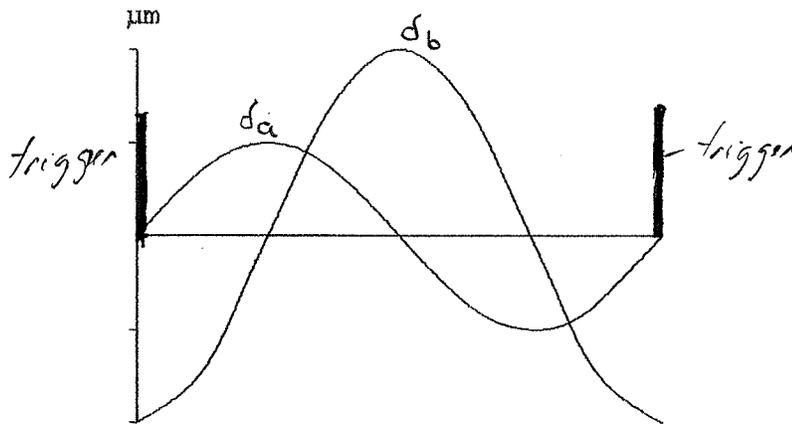
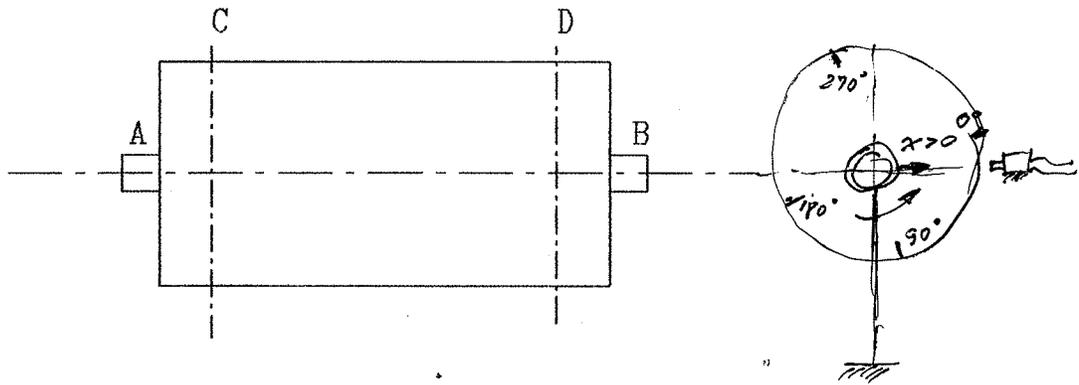
$$m'_c = 0,8 \text{ g}$$

$$m'_d = 0,7 \text{ g}$$

onde m'_c e m'_d são as massas de desbalanceamento residual admissível em cada plano.

Exercício N. 3

O rotor da figura deve ser balanceado em uma máquina de balanceamento de mancais flexíveis. No gráfico abaixo, são apresentados os sinais de deslocamento medidos nos mancais da balanceadora, em função do tempo, juntamente com o pulso de referência ("trigger"). Determinar as massas m_c e m_d para balancear o rotor.



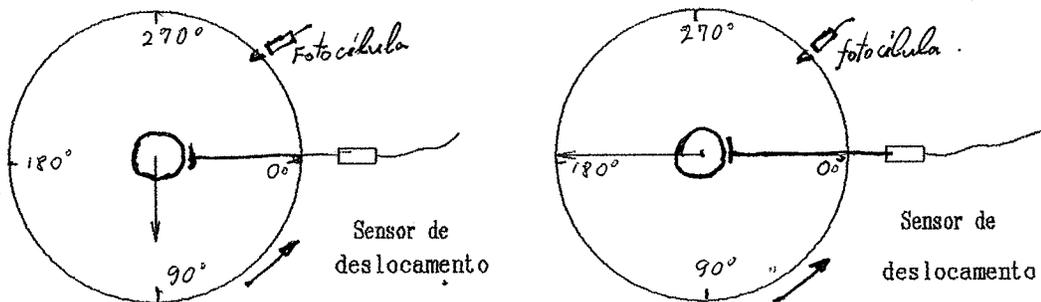
Dados:

Rotação da balanceadora:	800 rpm
Rotação de trabalho do rotor:	3.600 rpm
Peso do rotor:	50 kg
Raio de correção no plano C:	r_c mm
Raio de correção no plano D:	r_d mm
Amplitude de Deslocamento no mancal A:	δ_a μ m
Amplitude de Deslocamento no mancal B:	δ_b μ m

Solução:

As máquinas de balanceamento de mancais flexíveis tem a propriedade de não oferecer qualquer resistência ao movimento do rotor, de maneira que podemos considerar o rotor como se estivesse livre no espaço. Nessas condições, o rotor mantém seu eixo central de inércia parado enquanto o eixo geométrico descreve um movimento cíclico ao seu redor. Obviamente, a balanceadora não possui rigidez baixa em todas as direções. Na direção vertical, a balanceadora apresenta rigidez muito maior do que na direção horizontal. Dessa forma, podemos considerar o movimento cíclico do rotor em apenas uma direção.

A partir do gráfico acima, podemos notar que no instante de disparo do sinal de "trigger", a direção dos deslocamentos δ_a , δ_b são:



Mancal A

Mancal B

	Amplitude	Ângulo
Mancal A	δ_a	90°
Mancal B	δ_b	180°

Esses deslocamentos devem ser reduzidos acrescentando-se massas nos planos X e Y. Entretanto, qualquer massa acrescentada num dos planos irá provocar deslocamentos em ambos os mancais. Como já verificamos em exercícios anteriores, a inclinação do eixo central de inércia é dada por:

$$\alpha = \frac{m \cdot r \cdot z}{J_1 - J_3}$$

e o deslocamento dos mancais é dado por:

$$\delta = z_m \cdot \alpha + \frac{m \cdot r}{M}$$

onde:

z_m = corresponde à distância do ponto de colocação da massa até o baricentro;

J_1 = Momento de inércia transversal do rotor;

J_3 = Momento de inércia polar do rotor.

z = Distância do mancal até o baricentro.

$M =$ Massa total do rotor

Dessa forma, conhecendo-se a posição do baricentro, os momentos principais de inércia do rotor e medindo-se os deslocamentos nos mancais, poderíamos saber exatamente quanto de massa seria necessário nos planos de correção para balanceá-lo. Na prática, entretanto esses parâmetros não são conhecidos e precisamos calibrar a balanceadora para que o balanceamento possa ser realizado. Isto é feito acrescentando-se uma massa conhecida em cada um dos planos de correção, separadamente, e medindo-se os deslocamentos associados. Para facilitar essa operação, as máquinas balanceadoras possuem a capacidade de anular, eletronicamente, os deslocamentos originais para que os deslocamentos associados às massas de testes possam ser medidos diretamente, sem influência dos desbalanceamentos originais.

Acrescentado-se uma massa de teste m_t no plano \mathcal{E} , surgirão nos mancais os seguintes deslocamentos:

δ_{ac} - Deslocamento do mancal \mathcal{A} devido a uma massa colocada no plano \mathcal{E} .

δ_{bc} - Deslocamento do Mancal \mathcal{B} devido a uma massa colocada no plano \mathcal{E} .

Acrescentando-se uma massa de teste m_t no plano \mathcal{D} , surgirão no mancais os seguintes deslocamentos:

δ_{ad} - Deslocamento do mancal \mathcal{A} devido a uma massa colocada no plano \mathcal{D} .

δ_{bd} - Deslocamento do mancal \mathcal{B} devido a uma massa colocada no mancal \mathcal{D} .

Considerando o problema linear, isto é, as massas de testes m_c e m_d praticamente não alteram os momentos principais de inércia do rotor, podemos escrever os deslocamentos nos mancais por unidade de massa, ou seja:

$$\delta'_{ac} = \frac{\delta_{ac}}{m_t} \quad \delta'_{bc} = \frac{\delta_{bc}}{m_t} \quad \delta'_{ad} = \frac{\delta_{ad}}{m_t} \quad \delta'_{bd} = \frac{\delta_{bd}}{m_t}$$

Dessa forma, para balancear o rotor devemos acrescentar uma massa m_c no plano \mathcal{E} e uma massa m_d no plano \mathcal{D} , combinadas angularmente tal que:

$$\begin{aligned} \vec{m}_c \cdot \delta'_{ac} + \vec{m}_d \cdot \delta'_{ad} &= -\vec{\delta}_a \\ \vec{m}_c \cdot \delta'_{bc} + \vec{m}_d \cdot \delta'_{bd} &= -\vec{\delta}_b \end{aligned}$$

Escrevendo em forma matricial e decompondo na direção horizontal e vertical, temos:

Direção Horizontal:

$$\begin{bmatrix} \delta'_{ac} & \delta'_{ad} \\ \delta'_{bc} & \delta'_{bd} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_c \cdot \cos\theta_c \\ m_d \cdot \cos\theta_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta_a \cdot \cos\theta_a \\ -\delta_b \cdot \cos\theta_b \end{Bmatrix}$$

Direção Vertical:

$$\begin{bmatrix} \delta'_{ac} & \delta'_{ad} \\ \delta'_{bc} & \delta'_{bd} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_c \cdot \sin\theta_c \\ m_d \cdot \sin\theta_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta_a \cdot \sin\theta_a \\ -\delta_b \cdot \sin\theta_b \end{Bmatrix}$$

Deve-se notar que, em v'a máquina de manuais flexíveis, normalmente $\delta_{ac} < 0$ e $\delta_{bd} < 0$

A solução para esse sistema é dada por:

$$m_c \cdot \cos\theta_c = \frac{\begin{vmatrix} -\delta_a \cdot \cos\theta_a & \delta'_{ad} \\ -\delta_b \cdot \cos\theta_b & \delta'_{bd} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad m_d \cdot \cos\theta_d = \frac{\begin{vmatrix} \delta'_{ac} & -\delta_a \cdot \cos\theta_a \\ \delta'_{bc} & -\delta_b \cdot \cos\theta_b \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Direção Vertical:

$$m_c \cdot \sin\theta_c = \frac{\begin{vmatrix} -\delta_a \cdot \sin\theta_a & \delta'_{ad} \\ -\delta_b \cdot \sin\theta_b & \delta'_{bd} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad m_d \cdot \sin\theta_d = \frac{\begin{vmatrix} \delta'_{ac} & -\delta_a \cdot \sin\theta_a \\ \delta'_{bc} & -\delta_b \cdot \sin\theta_b \end{vmatrix}}{\Delta}$$

onde:

$$\Delta = \delta'_{ac} \cdot \delta'_{bd} - \delta'_{bc} \cdot \delta'_{ad}$$

A massa e a posição angular para cada plano é determinada por:

$$m_c = \sqrt{(m_c \cdot \cos\theta_c)^2 + (m_c \cdot \sin\theta_c)^2}$$

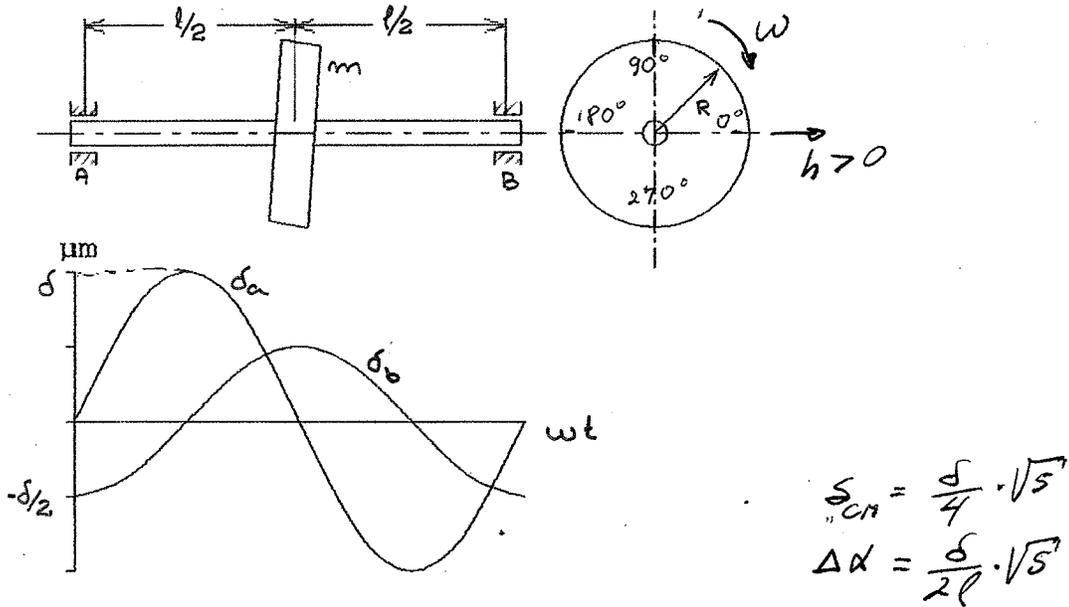
$$m_d = \sqrt{(m_d \cdot \cos\theta_d)^2 + (m_d \cdot \sin\theta_d)^2}$$

$$\theta_c = \text{tg}^{-1} \left(\frac{m_c \cdot \sin\theta_c}{m_c \cdot \cos\theta_c} \right)$$

$$\theta_d = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{m_d \cdot \operatorname{sen} \theta_d}{m_d \cdot \operatorname{cos} \theta_d} \right)$$

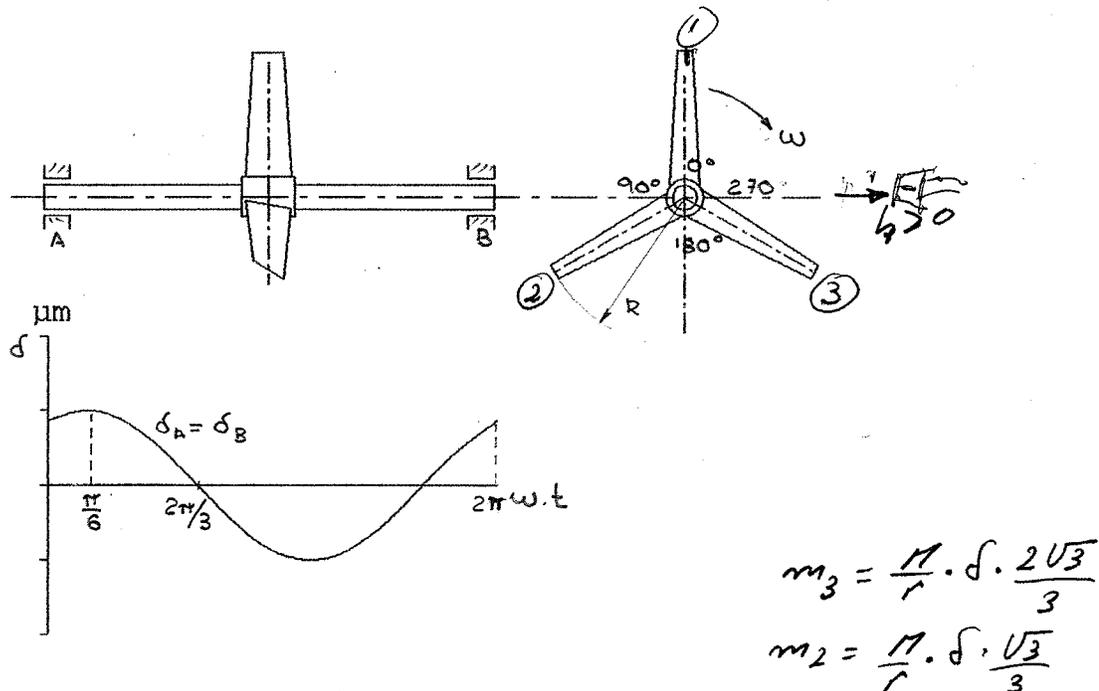
Exercício N.3

Um rotor formado de um disco homogêneo de massa m e raio r montado em um eixo de comprimento l e massa desprezível é colocado sobre uma máquina de balancear de mancais flexíveis. Dados os registros dos deslocamentos horizontais dos mancais A e B , determinar o erro de centragem do furo do disco e o erro de perpendicularismo desse furo.



Exercício N.4

Um rotor de massa M e raio externo r é montado em um eixo de massa pequena, sobre uma máquina de balancear de mancais flexíveis, como indicado na figura a seguir.



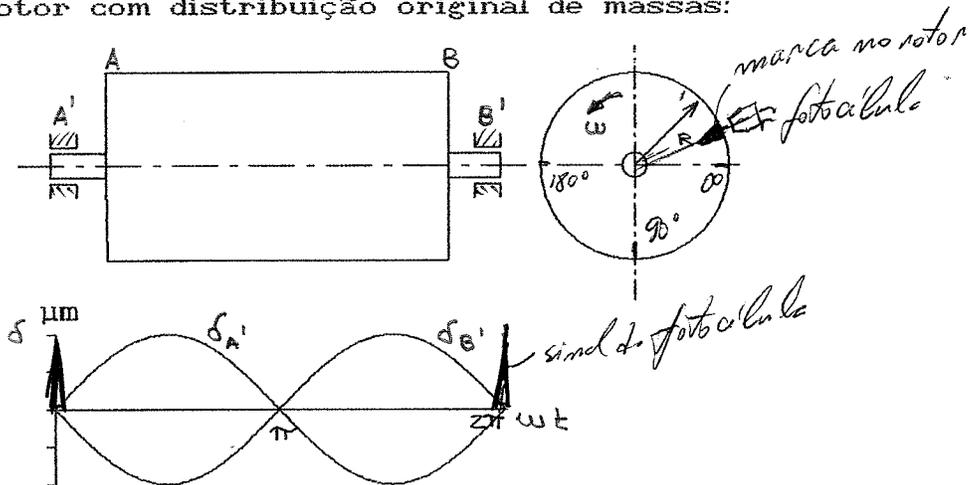
Os sinais de amplitude de vibração medidos nos mancais A e B são indicados na figura acima. Determinar o valor e posição das massas a serem retiradas para realizar o balanceamento do rotor.

Exercício N.5

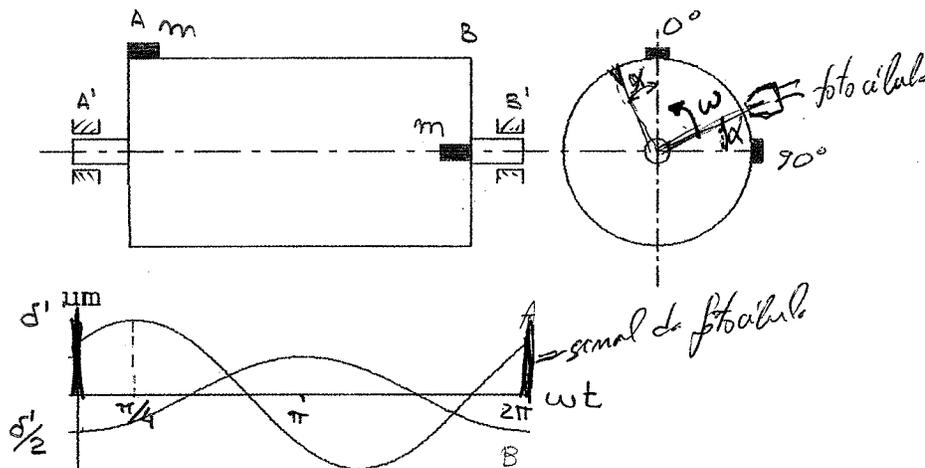
Para realizar o balanceamento ~~do rotor~~ de um rotor, foram feitas as seguintes medições:

em uma máquina de mancos flexíveis

a) Rotor com distribuição original de massas:



b) Rotor com massas m colocadas a 90° , nos planos de balanceamento.



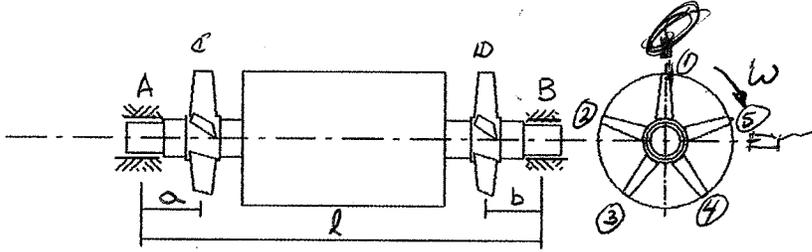
$$m_A = \frac{-2 \cdot m}{\left(\frac{2 + \delta'}{\delta} - \sqrt{2}\right)} \text{ a } 90^\circ$$

$$m_B = m - \frac{\delta'}{\delta} \cdot \frac{m}{\left(2 + \frac{\delta'}{\delta} - \sqrt{2}\right)} \text{ a } 90^\circ$$

Podem-se as massas m_a e m_b e suas posições angulares a serem colocadas nos planos A e B , respectivamente, para balancearem o rotor original.

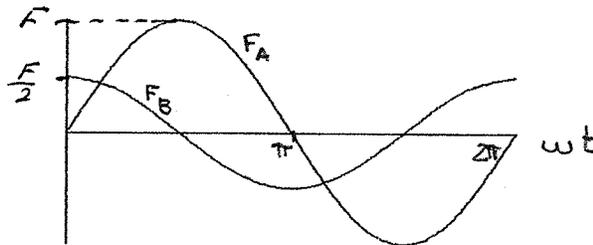
Exercício N.6

O rotor de um gerador elétrico, representado na figura, deve ser balanceado nos planos dos ventiladores. Quando o conjunto foi colocado a girar com velocidade ω , sobre uma máquina de balancear de mancais rígidos, obteve-se o seguinte registro para as forças medidas nos mancais A e B. Pede-se o valor das massas a serem retiradas dos ventiladores para balancear o rotor.



$$a = \frac{l}{5}$$

$$b = \frac{l}{3}$$



$$m_{C3} = 0,874 \frac{F}{R\omega^2}$$

$$m_{C2} = 1,061 \frac{F}{R\omega^2}$$

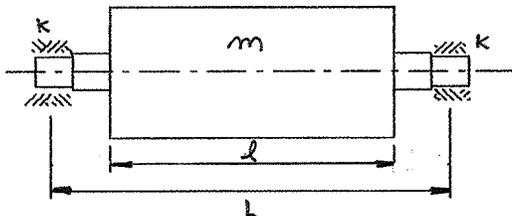
$$m_{D1} = 0,776 \frac{F}{R\omega^2}$$

$$m_{D5} = 0,263 \frac{F}{R\omega^2}$$

Exercício N. 7

Um Rotor cilíndrico homogêneo, rígido de raio r , comprimento l e massa m é instalado sobre dois mancais flexíveis como mostrado na figura. Sabendo-se que a rigidez dos mancais é K , pede-se para estimar as velocidades críticas do rotor.

Dados: $I_{cz} = \frac{m \cdot r^2}{2}$; $I_{cx} = I_{cy} = m \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$



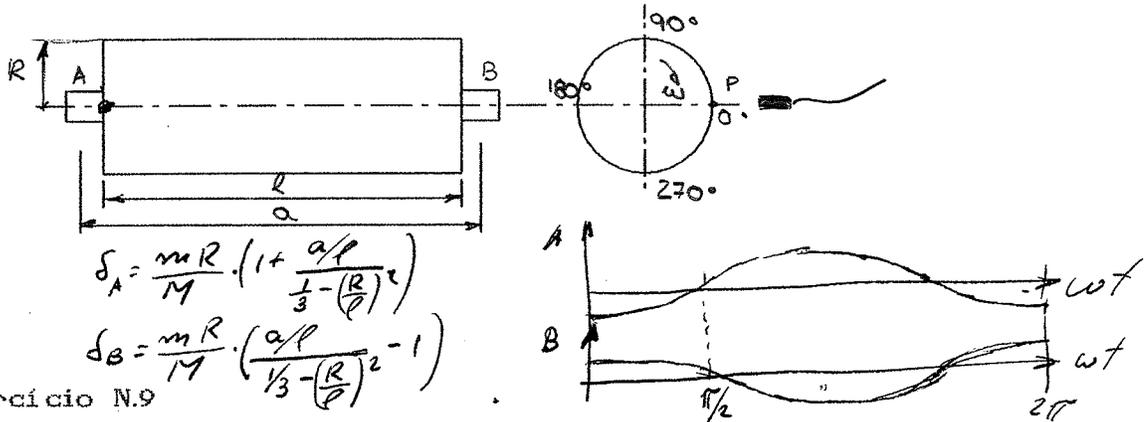
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2KL^2}{m \cdot \left(\frac{l^2}{3} - r^2 \right)}}$$

Exercício N.8

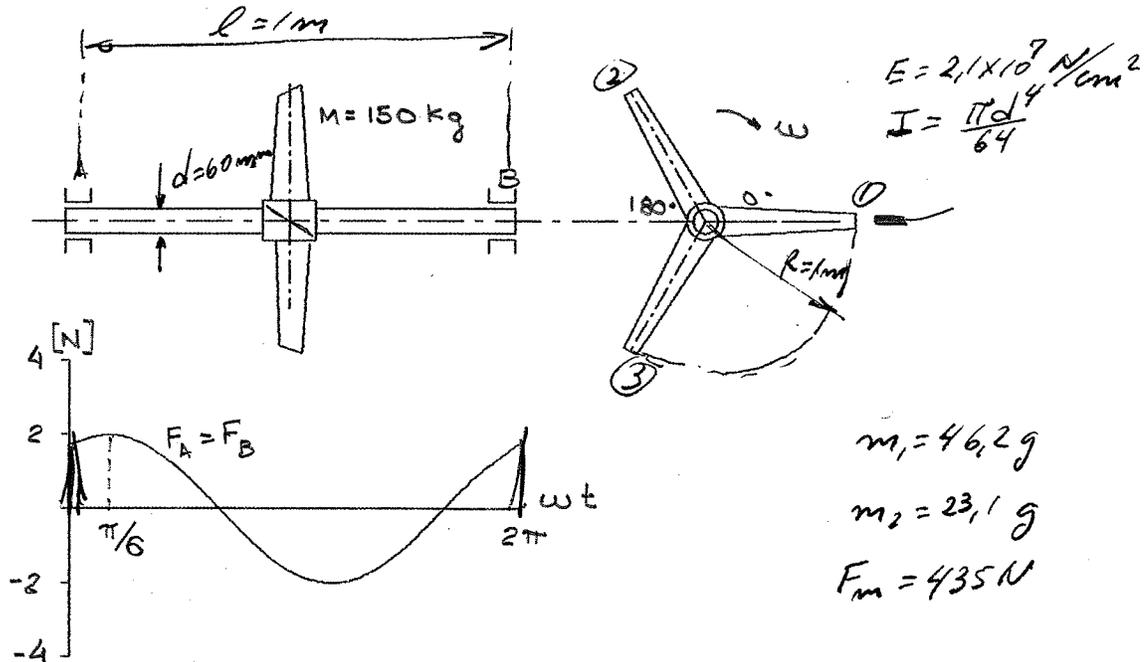
homogêneo

O rotor padrão cilíndrico indicado na figura é utilizado para verificar a precisão de uma máquina de balancear de mancais flexíveis, com distância entre centros a . Para isso coloca-se uma massa m ($m \ll M$) conhecida no ponto P do rotor padrão e comparam-se as amplitudes medidas nos mancais A e B da máquina com as amplitudes teóricas. Pede-se para calcular as amplitudes teóricas para a geometria dada e fazer um gráfico do deslocamento dos mancais em função da posição angular do rotor.



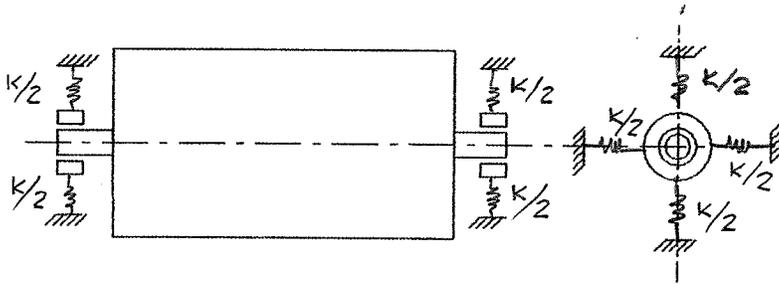
Exercício N.9

O ventilador indicado na figura, com eixo de massa desprezível, é montado sobre uma máquina de balancear de mancais rígidos e posto a girar a 95,5 rpm, obtendo o seguinte gráfico par a força nos mancais, em função da posição angular do eixo. Determinar as massas a serem retiradas na pás para balancear o rotor. Se o rotor fosse montado no ventilador e posto a girar a 1146 rpm, qual seria a força máxima dinâmica em cada um dos mancais.



Exercício N.10

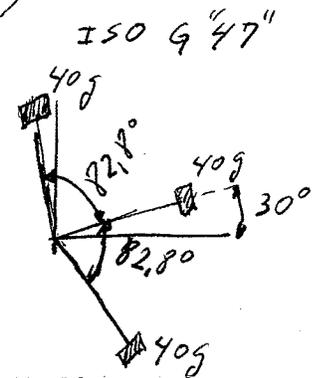
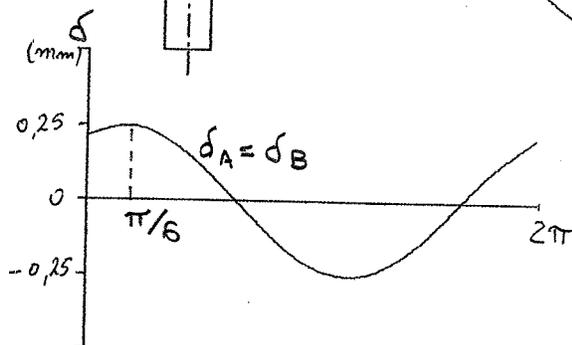
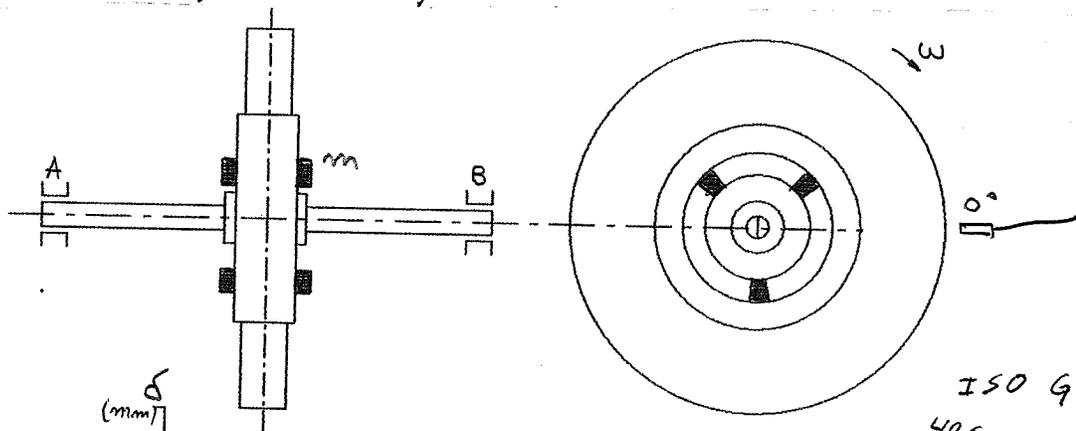
Um rotor cilíndrico simétrico é montado em um par de mancais flexíveis como indicado na figura. Sabendo-se que a massa do rotor é m e que seus momentos de inércia são iguais a I_p (polar) e I_t (transversal), pede-se para calcular as velocidades críticas do conjunto rotor/mancais.



Exercício N.11

Deseja-se balancear o rebolo de uma retificadora sobre uma máquina de balancear de mancais flexíveis. Quando o rebolo é posto a girar obtém-se a seguinte curva de amplitude de deslocamento nos mancais A e B. Calcular a classe de balanceamento em que se encontra o rotor.

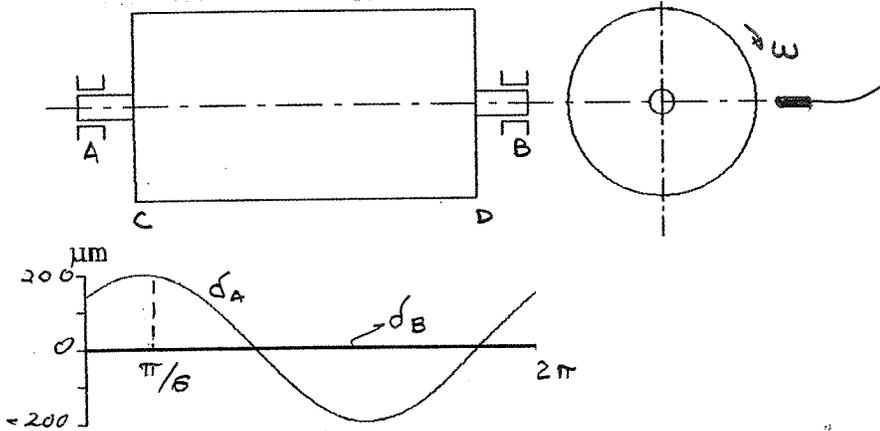
Sabendo-se que o rebolo funciona a 1800 r.p.m. e que sua massa é $M = 20 \text{ kg}$,



Sabendo-se que o balanceamento é feito por seis massas $m = \frac{20}{50} \text{ g}$, que podem ser deslocadas num canal de raio $r = 100 \text{ mm}$, pede-se para determinar uma posição das massas que balanceie o rebolo.

Exercício N. 12

O rotor indicado na figura está sendo balanceado em uma máquina de balancear de mancais flexíveis que fornece amplitudes de vibração nas mancais A e B, conforme gráfico abaixo. Sabendo-se que uma massa de calibração de 10 g. colocada no plano C provoca uma amplitude $\delta = 0,6$ mm no mancal A e 0,2 mm no mancal B, no sentido oposto e que 10 g. colocada no plano D provoca uma amplitude $\delta = 0,6$ mm no mancal B e 0,2 mm no mancal A, no sentido oposto, determinar as massas m_c e m_d e suas posições angulares θ_c e θ_d , para os planos C e D, respectivamente, para balancear o rotor.

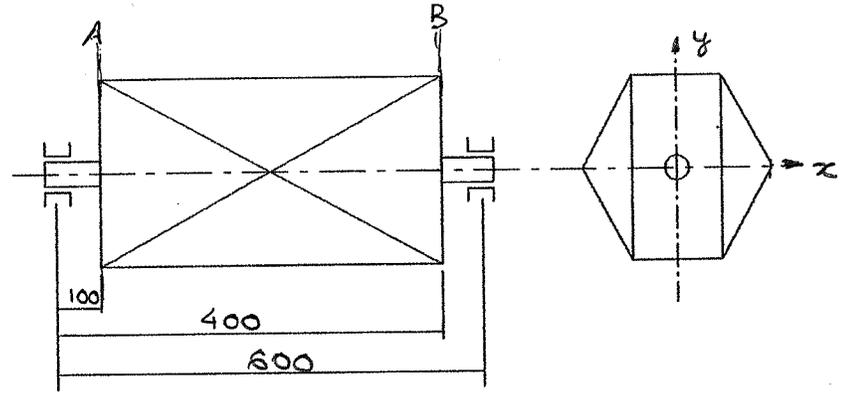


$$m_c = 2,4g \quad \theta_c = 30^\circ$$

$$m_d = 0,8g \quad \theta_d = 30^\circ$$

Exercício N. 13

Determinar o produto de inércia I_{yz} do rotor abaixo, sabendo-se que o mesmo foi balanceado com a seguinte configuração de massas de correção e posição angular.



$m_{a1} = 3 \text{ g};$	$R_{a1} = 100 \text{ mm};$	$\theta_{a1} = 30^\circ$
$m_{a2} = 4 \text{ g};$	$R_{a2} = 120 \text{ mm};$	$\theta_{a2} = 120^\circ$
$m_{a3} = 1 \text{ g};$	$R_{a3} = 100 \text{ mm};$	$\theta_{a3} = 60^\circ$
$m_{b1} = 20 \text{ g};$	$R_{b1} = 130 \text{ mm};$	$\theta_{b1} = 180^\circ$
$m_{b2} = 5 \text{ g};$	$R_{b2} = 110 \text{ mm};$	$\theta_{b2} = 290^\circ$
$m_{b3} = 2 \text{ g};$	$R_{b3} = 100 \text{ mm};$	$\theta_{b3} = 225^\circ$

$$R \left\{ J_{y3} = 198 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{mm}^2 \right.$$