



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Balanciamento de Rotores

Versão 2.1

Autor: Prof. Dr. Francisco E. Baccaro Nigro

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica - PME
Av. Prof. Mello Moraes, 2231
São Paulo SP 05508-900 BRASIL
Tel.: 55 (0)11 3091 5561
FAX: 55 (0)11 3813 1886

Resumo

Esta apostila trata do balanceamento de rotores, concentrando-se no problema do balanceamento de rotores rígido em máquinas de balancear. São apresentados os critérios de balanceamento pela qualidade de balanceamento. Também é apresentado o conceito de velocidade crítica e é introduzido o balanceamento de rotores flexíveis. Finalmente são apresentadas os princípios das máquinas de balancear de mancais rígidos e flexíveis.

13/09/2015

1 Introdução

Colocando-se uma peça assimétrica a girar, surgem forças radiais não equilibradas, ocasionando problemas de vibrações e fadiga.

Balancear uma peça é modificar sua distribuição de massa, de modo que as forças radiais não ultrapassem certos valores, conforme o tipo de aplicação. Não se pretende tornar as forças radiais não equilibradas totalmente nulas, pois isso é impraticável e inviável economicamente.

Deve-se projetar as peças já balanceadas. O balanceamento é realizado para compensar variações de geometria que ocorrem durante a fabricação ou de densidade dos materiais.

Processa-se balanceamento em quaisquer componentes rotativos, e tanto mais quanto maior for a rotação do sistema em estudo. Inicialmente suporemos os componentes rotativos como corpos rígidos.

2 O princípio do balanceamento

Vamos imaginar um sólido de eixo de rotação horizontal com simetria axial, exceto por um ponto de massa m localizado uma distância r do eixo de rotação, conforme mostrado na figura 1.

Note-se que o sistema de eixos indicado é fixo na peça. O conjunto gira com velocidade angular ω , originando uma força de inércia radial.

$$F_c = m \cdot r \cdot \omega^2 \quad (1)$$

Para balancear o sistema devemos retirar a massa m ou adicionar uma outra massa m' , radialmente oposta, de modo a compensar a força radial, isto é:

$$m \cdot r = m' \cdot r' \quad (2)$$

Uma maneira de se realizar o balanceamento de uma peça como a indicada na figura, é apoiá-la em mancais de baixo conjugado de atrito, de modo que o eixo de rotação seja

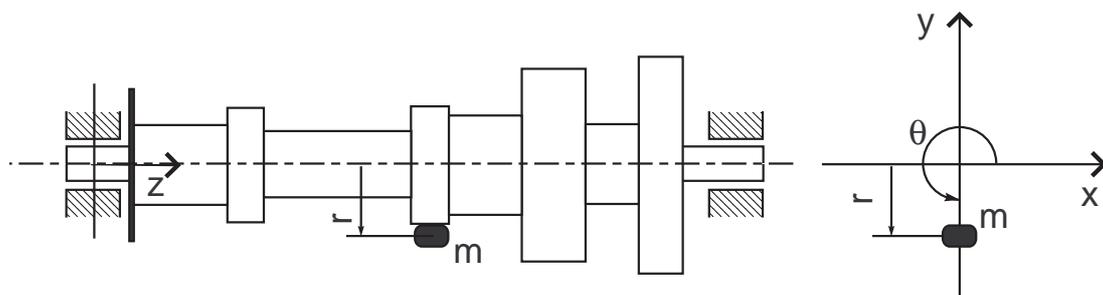


Figura 1: Rotor com desbalanceamento estático

horizontal. Colocando-se o sistema a girar, ele irá diminuindo de rotação até ficar oscilando em torno de uma posição de equilíbrio. Ao cessar a oscilação, teremos a posição da massa não equilibrada na parte inferior do sistema; coloca-se então uma massa na posição superior ou retira-se na posição inferior; esta é a análise que se faz para o *balanceamento estático*.

Já o sistema apresentado abaixo está balanceado estaticamente, porém, não apresenta equilíbrio de momentos. Diz-se que o mesmo está *desbalanceado dinamicamente*.

Notemos que o balanceamento tem por finalidade minimizar os esforços dinâmicos nos mancais. Para um rotor rígido, são necessários dois planos de balanceamento. Plano de balanceamento é o plano onde são feitas as correções de balanceamento pela adição ou retirada de massas do sistema. São escolhidos planos de balanceamento distantes e tais que possibilitem a colocação ou retirada de massas de balanceamento bem afastadas do eixo, resultando em massas de pequeno valor.

3 Sistema geral

Seja um corpo rígido que gira com velocidade ω constante em torno de um eixo fixo z . Tomando como polo de momento o ponto O fixo indicado na figura, obtemos:

$$\vec{M}_O = \frac{d}{dt} [\vec{H}_O] \quad (3)$$

Exprimindo a equação do momento angular no sistema de eixos $\{O, x, y, z\}$ solidário ao corpo, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (4)$$

onde:

$$J_{xy} = \int_M x \cdot y \, dm \quad J_{xz} = \int_M x \cdot z \, dm \quad J_{zz} = \int_M (x^2 + y^2) \, dm$$

$$\vec{H}_O = -J_{xy} \cdot \omega \cdot \vec{e}_x - J_{yz} \cdot \omega \cdot \vec{e}_y + J_{zz} \cdot \omega \cdot \vec{e}_z \quad (5)$$

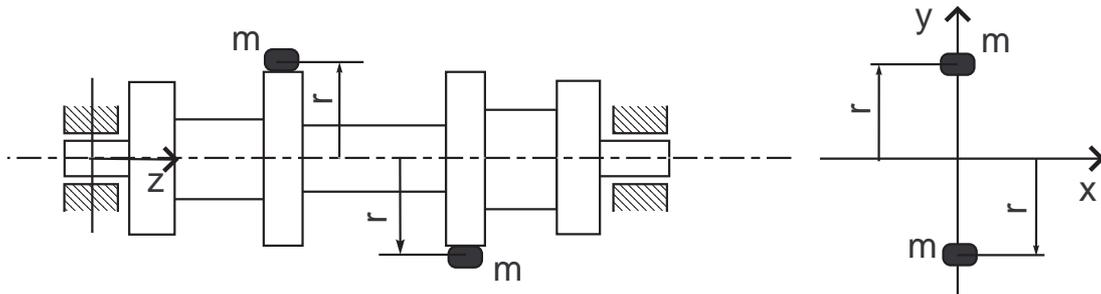


Figura 2: Rotor com desbalanceamento dinâmico

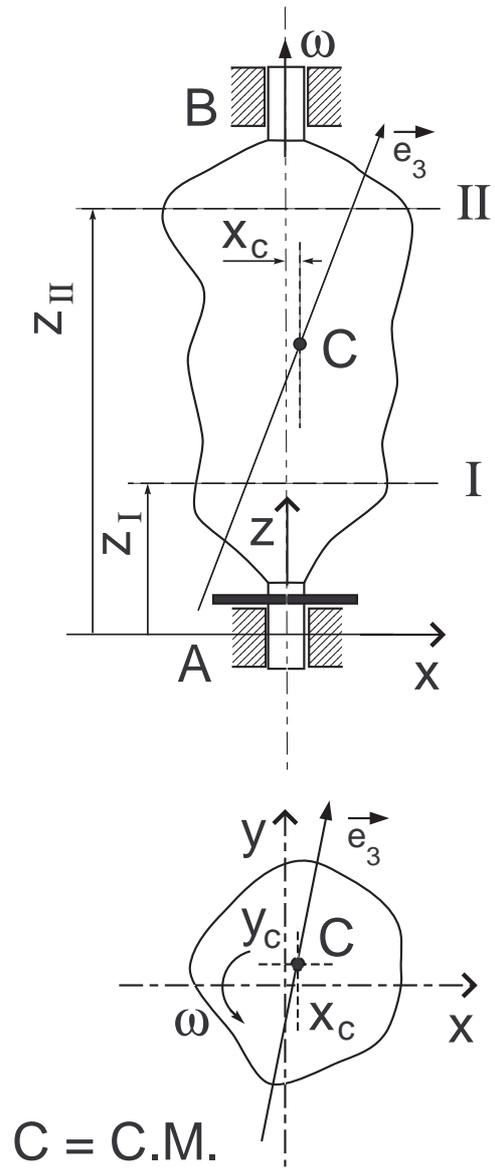


Figura 3: Rotor Vertical em Mancais Rígidos

Derivando em relação ao tempo, com ω constante e lembrando que o sistema de eixos é solidário ao corpo, vem:

$$\vec{M}_O = -J_{xz} \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_y + J_{yz} \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_x \quad (6)$$

O teorema do movimento do baricentro fornece:

$$\vec{F} = M \cdot \frac{d^2}{dt^2} (x_c \cdot \vec{e}_x) + M \frac{d^2}{dt^2} (y_c \cdot \vec{e}_y)$$

ou ainda:

$$\vec{F} = -M \cdot x_c \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_x - M \cdot y_c \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_y \quad (7)$$

Para que as forças radiais nos mancais sejam nulas, é necessário que M_O e F sejam iguais a zero. Portanto: $J_{xz} = J_{yz} = 0$ e $x_c = y_c = 0$, ou seja, *o eixo de rotação deve ser um eixo central de inércia para que o sólido esteja balanceado.*

Suponhamos agora, que temos um corpo rígido desbalanceado, com características de inércia J_{xz} , J_{yz} , x_c , y_c e M conhecidas, e que desejamos balanceá-lo adicionando duas massas m_I e m_{II} localizadas em dois planos de balanceamento z_I e z_{II} , em raios r_I e r_{II} , com posições angulares θ_I e θ_{II} . Neste caso, os produtos de inércia do corpo modificado referentes ao eixo de rotação deverão se anular, e a posição de seu centro de massa deverá cair sobre o eixo. Portanto:

$$\bar{J}_{xz} = \int_{M+m_I+m_{II}} x \cdot z \, dm = \int_M x \cdot z \, dm + m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I \cdot z_I + m_{II} \cdot r_{II} \cdot \cos \theta_{II} \cdot z_{II} = 0 \quad (8)$$

analogamente:

$$\bar{J}_{yz} = \int_{M+m_I+m_{II}} y \cdot z \, dm = \int_M y \cdot z \, dm + m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I \cdot z_I + m_{II} \cdot r_{II} \cdot \sin \theta_{II} \cdot z_{II} = 0 \quad (9)$$

Para a posição do centro de massa, podemos escrever:

$$(M + m_I + m_{II}) \cdot \bar{x}_c = \int_M x \, dm + m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I + m_{II} \cdot r_{II} \cdot \cos \theta_{II} = 0 \quad (10)$$

analogamente

$$(M + m_I + m_{II}) \cdot \bar{y}_c = \int_M y \, dm + m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I + m_{II} \cdot r_{II} \cdot \sin \theta_{II} = 0 \quad (11)$$

Evidentemente as equações (8) a (11) são válidas também se o sistema é formado de massas discretas, bastando substituir as integrais por somatórias. Vale mencionar, também, que as mesmas equações são válidas quando o polo de momento, pertencente ao eixo de rotação, não está no plano do mancal. Basta que a origem do eixo z coincida com o polo.

A solução das equações (8) a (11) acima permite calcular as incógnitas $m_I \cdot r_I$, $m_{II} \cdot r_{II}$, θ_I e θ_{II} . Note-se que temos liberdade de escolha dos raios para retirada ou adição de massa.

A solução do sistema obtida em duas etapas: inicialmente resolvemos o sistema linear nas incógnitas auxiliares $m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I$, $m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I$, $m_{II} \cdot r_{II} \cdot \cos \theta_{II}$ e $m_{II} \cdot r_{II} \cdot \sin \theta_{II}$; em seguida obtemos as incógnitas originais.

$$\begin{bmatrix} z_I & 0 & z_{II} & 0 \\ 0 & z_I & 0 & z_{II} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I \\ m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I \\ m_{II} \cdot r_{II} \cdot \cos \theta_{II} \\ m_{II} \cdot r_{II} \cdot \sin \theta_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int x \cdot z \, dm \\ -\int y \cdot z \, dm \\ -\int x \, dm \\ -\int y \, dm \end{Bmatrix} \quad (12)$$

No caso mais geral, os termos independentes são quaisquer e a solução do sistema exige que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero. Portanto:

$$\begin{vmatrix} z_I & 0 & z_{II} & 0 \\ 0 & z_I & 0 & z_{II} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = z_I \cdot (z_I - z_{II}) + z_{II} \cdot (z_{II} - z_I) = (z_{II} - z_I)^2 \neq 0 \quad (13)$$

ou ainda, $(z_I - z_{II}) \neq 0$, o que mostra a necessidade de dois planos de balanceamento para o caso geral.

Uma vez calculadas as incógnitas auxiliares, vamos dizer $m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I = \alpha$, e $m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I = \beta$, obtemos:

$$\tan \theta_I = \frac{\beta}{\alpha} \quad (14)$$

e

$$m_I \cdot r_I = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (15)$$

É digno de nota que a escolha do ângulo θ_I (ou $\theta_I + \pi$), que satisfaz a equação (14), depende da discussão do sinal da equação $m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I = \alpha$, quando se considera que podemos estar colocando massa ($m_I > 0$), ou retirando massa ($m_I < 0$).

Exemplo 1 (Virabrequim) *Projeto de rotor balanceado*

Para exercitar a aplicação do equacionamento desenvolvido, vamos resolver o seguinte problema:

Seja dado um virabrequim de um motor de quatro cilindros e dois tempos, como mostrado na figura 4, e que deve ter seus contra-pesos dimensionados, de modo a minimizar os esforços dinâmicos nos mancais. Para facilitar a solução consideremos o modelo físico formado de massas discretas apresentado na figura. Note-se que as massas equivalentes supostas concentradas nos mancais de biela englobam também a massa do pé das bielas, e que não é necessário nos preocuparmos com as massas centralizadas no eixo de rotação.

Escolhidos os planos de balanceamento I e II, vamos aplicar as equações (8) a (11), considerando que o polo de momento coincide com o plano I. Neste caso, vem:

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot z_i \cdot m_i = m \cdot r \cdot \left[\frac{5a}{2} \cos 0 + \frac{a}{2} \cos \pi \right] = -m_I \cdot r_I \cdot 2a \cdot \cos \theta_I$$

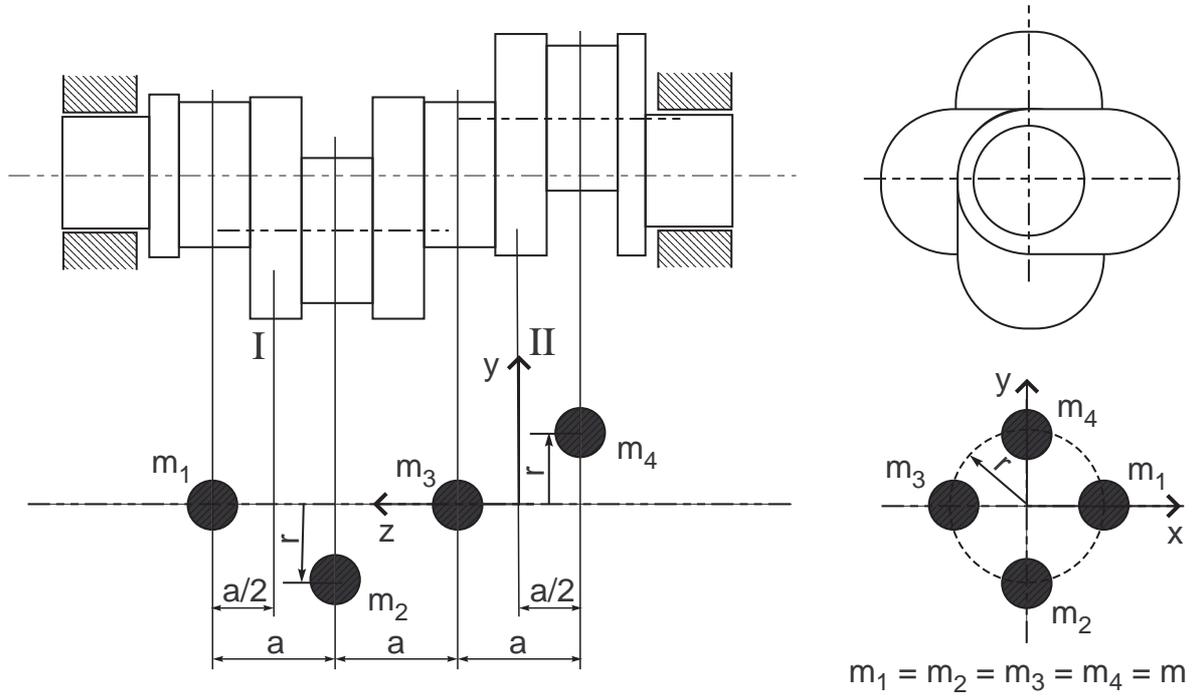


Figura 4: Virabrequim com binário de desbalanceamento

$$\sum_{i=1}^n y_i \cdot z_i \cdot m_i = m \cdot r \cdot \left[\frac{3a}{2} \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) - \frac{a}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = -m_I \cdot r_I \cdot 2a \cdot \sin \theta_I$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i = 0 = -m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I - m_{II} \cdot r_{II} \cos \theta_{II}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i = 0 = -m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I - m_{II} \cdot r_{II} \sin \theta_{II}$$

Destas equações obtemos:

$$m_I \cdot r_I \cdot 2a \cdot \cos \theta_I = -2a \cdot m \cdot r \quad (16)$$

$$m_I \cdot r_I \cdot 2a \cdot \sin \theta_I = -2a \cdot m \cdot r \quad (17)$$

$$m_I \cdot r_I \cdot \cos \theta_I + m_{II} \cdot r_{II} \cdot \cos \theta_{II} = 0 \quad (18)$$

$$m_I \cdot r_I \cdot \sin \theta_I + m_{II} \cdot r_{II} \cdot \sin \theta_{II} = 0 \quad (19)$$

Das equações (16) e (17) vem: $\tan \theta_I = -1$

Deveremos adicionar massa ao sistema; desse modo $m_i > 0$. Analisando a equação (16), para que $m_I \cdot r_I$ resulte um número positivo, é necessário que $\cos \theta_I$ seja negativo. Portanto,

$$\theta_I = \frac{3\pi}{2} \quad (20)$$

Caso fosse possível retirar massa do sistema, teríamos $m_I < 0$, resultando em $\theta_I = \frac{\pi}{2}$.

Como a cada massa do sistema corresponde uma radialmente oposta, é óbvio que se $\theta_I = \frac{3\pi}{2}$, então $\theta_{II} = \frac{-\pi}{2}$. Esta mesma conclusão pode ser tirada das equações (18) e (19).

A massa a ser adicionada no plano I é:

$$m_I \cdot r_I = \sqrt{2} \cdot m \cdot r$$

Notemos que, no problema dado existe distribuição simétrica de massa em relação ao eixo z , tornando o sistema estaticamente balanceado. As massas adicionadas deverão ser tais que:

$$m_I \cdot r_I = m_{II} \cdot r_{II} \quad \text{e portanto:} \quad m_{II} \cdot r_{II} = \sqrt{2} \cdot m \cdot r$$

4 Classes de balanceamento

Já vimos que as peças rotativas devem ser projetadas equilibradas, de modo que o balanceamento prático é realizado por meio de pequenas alterações da distribuição de massa do corpo. Além disso, já afirmamos que o balanceamento é realizado até um certo nível, o qual depende do tipo de aplicação e da velocidade de rotação da peça. Com isso podemos manter as vibrações e as solicitações dinâmicas dentro de limites adequados ao funcionamento da máquina. Vale mencionar que não existe uma relação direta entre o desbalanceamento residual e o nível de vibração da máquina, o qual depende de muitos fatores como, por exemplo, a massa da carcaça e da fundação, a rigidez dos mancais e da fundação, a ocorrência de ressonâncias, etc. De qualquer maneira, existem níveis admissíveis de desbalanceamento residual, compatíveis com a boa prática de projeto de máquinas. A norma ISO 1940 trata da qualidade de balanceamento de rotores rígidos. Para tanto, são definidos diversos graus de qualidade de balanceamento, que são denotados pela letra G seguida de um número variável entre 0,4 e 4000, numa série normalizada de razão geométrica $\simeq 2,5$. Cada uma dessas classes de balanceamento estabelece uma faixa de desbalanceamento residual permissível, da seguinte maneira:

$$\text{Classe ISO G } n \longleftrightarrow n(\text{ mm/s }) \geq e \cdot \omega \quad (21)$$

onde e é a excentricidade residual do centre de massa, e ω é a máxima velocidade angular de trabalho da peça. Nesta situação, desbalanceamento residual admissível em cada plane fica:

$$m \cdot r = M \cdot \frac{e}{2} \quad (22)$$

Tal especificação supõe que o desbalanceamento estático tem maior importância que o desbalanceamento de momento. Caso isso não aconteça, como é a situação com rotores com discos em balanço, nos quais a distância entre os planos de balanceamento é maior que a distância entre mancais, o desbalanceamento residual admissível em cada plano é reduzido conforme a razão entre essas distâncias.

Exemplo 2 (Classe de Balanceamento) *Cálculo do desbalanceamento residual*

Como exemplo, consideremos um rotor de bomba com classe G 6,3 que deve ser balanceado em dois planos entre mancais, sabendo-se que sua máxima velocidade de trabalho é 3600 rpm, e sua massa 40 kg. Pedese determinar o desbalanceamento residual permissível em cada um dos planos de balanceamento.

$$\omega = 2\pi \frac{3600}{60} \simeq 280 \text{ rad/s} \quad e = \frac{6,3}{380} \simeq 0,017 \text{ mm}$$

$$m \cdot r = M \frac{e}{2} = 4000 \frac{0,017}{2} \simeq 340 \text{ g}\cdot\text{mm}$$

A título de ilustração, vamos descrever alguns tipos de máquinas que se enquadram em algumas classes.

G 4000	virabrequins de motores marítimos lentos
G 250	virabrequins de motores diesel rápidos com 4 cilindros
G 40	rodas de automóveis; eixos de transmissão
G 6,3	ventiladores; volantes; rotores de bombas
G 2,5	turbinas a gás e a vapor; acionamento de máquinas-ferramentas
G 0,4	fusos de retificadoras de alta precisão; giroscópios

É importante mostrar porque o desbalanceamento específico admissível e varia inversamente à rotação do rotor. Para tanto, consideremos dois rotores similares de tamanhos diferentes, nos quais a única solicitação é devida ao desbalanceamento.

A solicitação é:

$$F = M \cdot e \cdot \omega^2 \simeq \rho \cdot [L]^3 \cdot e \cdot \omega^2$$

O momento fletor em uma seção crítica é representado por:

$$M_f \simeq F \cdot [L] \simeq \rho \cdot [L]^4 \cdot e \cdot \omega^2$$

A tensão máxima fica:

$$\sigma = \frac{M_f}{W} \simeq \rho \cdot [L]^4 \cdot e \cdot \omega^2 \cdot [L]^{-3} \simeq \rho \cdot [L] \cdot \omega \cdot e \cdot \omega$$

Portanto, se os dois rotores são feitos do mesmo material e conseqüentemente suportam a mesma tensão máxima e tem a mesma densidade, devemos ter:

$$[L] \cdot \omega \cdot e \cdot \omega \simeq [L] \cdot \omega \cdot [L] \cdot \omega = \text{cte}$$

Conclui-se que máquinas semelhantes, dimensionadas para suportar esforços dinâmicos, tem velocidades semelhantes. Logicamente, a aceleração da máquina menor é maior, e seu deslocamento é menor. For exemplo, quando comparamos um motor alternativo de pistão de um navio, com aquele de um aéro-modelo, notamos que a velocidade média do pistão é aproximadamente a mesma ($\simeq 9 \text{ m/s}$), apesar da escala de comprimento ser centenas de vezes maior no motor de navio. Analogamente, se compararmos um cachorro com um cavalo, que são aproximadamente geometricamente semelhantes, e constituídos dos mesmos materiais, notamos que ambos tem a mesma velocidade máxima, apesar do cavalo ter pernas muito mais compridas e do cachorro ser muito mais rápido (maior aceleração).

5 Velocidade crítica de rotores

Até este ponto consideramos os rotores como corpos rígidos. No entanto, à medida que aumentamos a rotação, as forças de inércia vão se tornando cada vez mais significativas, e provocando deformações no rotor. O modelo físico mais simples que representa um rotor flexível, é apresentado na figura 5. O eixo é flexível e de massa desprezível e o disco de massa m está colocado no plano de simetria do sistema.

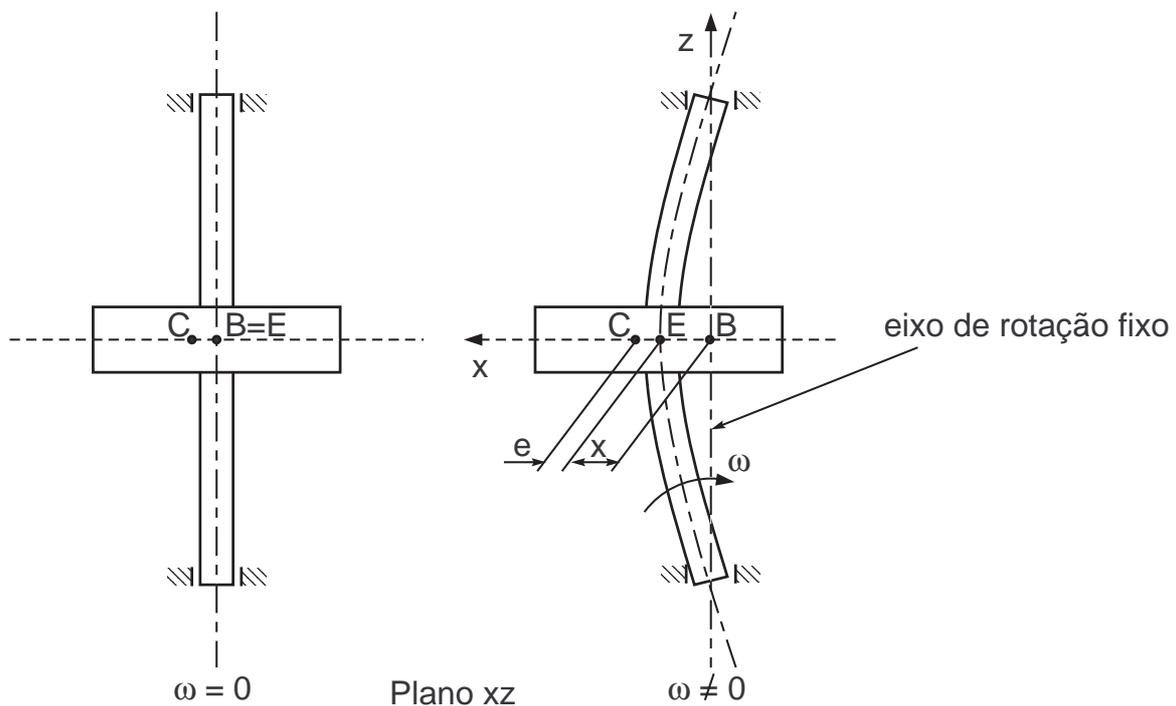


Figura 5: Vista frontal (plano xz) do rotor flexível desbalanceado

Os seguintes pontos são definidos no plano transversal do centro de massa do disco:

- C - centro de massa do disco
- E - centro geométrico do disco
- B - centro dos mancais

Aplicando uma força radial no rotor parado obteremos uma flecha tal que:

$$F_e = k \cdot x \quad (23)$$

A força radial de inércia devida a rotação do eixo desbalanceado será:

$$F_c = m \cdot (x + e) \cdot \omega^2 \quad (24)$$

Colocando em um gráfico, a força radial devida a rotação e a força elástica em função da flecha do eixo, obtemos duas retas cuja intersecção fornece o ponto de equilíbrio dinâmico, conforme pode ser visto na figura 7.

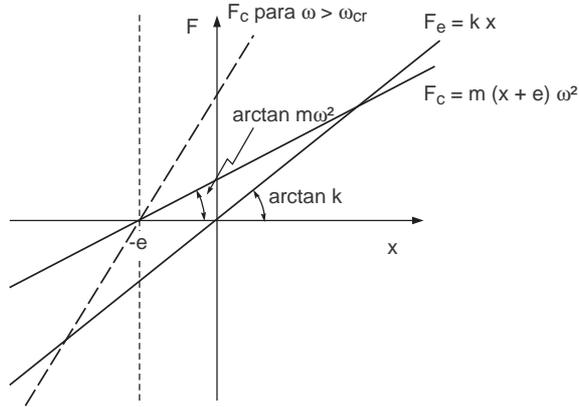


Figura 7: Equilíbrio entre força centrífuga e força elástica

A figura 8 ilustra a posição relativa dos pontos C , E e B , centro de massa, centro geométrico do disco e centro dos mancais, respectivamente. À medida que aumentamos ω a reta referente a F_c vai se aproximando da vertical, até que no limite o cruzamento se dá para $x = -e$; quando isto acontece, $C \equiv B$ e o corpo gira em torno do centro de massa. Neste caso, as forças de inércia controlam o comportamento do sistema.

Deve-se notar que quando $\omega \ll \omega_{cr}$, as forças elásticas é que determinam o comportamento do sistema, e o resultado é coerente com nossa intuição. O mesmo não ocorre para $\omega \gg \omega_{cr}$, onde nossa intuição normalmente falha. Embora o valor da velocidade crítica coincida, no modelo analisado, com a frequência natural de vibração lateral do sistema, os fenômenos são distintos e não devem ser confundidos.

O que foi discutido para um eixo flexível e mancais rígidos, vale também para o caso de rotor rígido montado em mancais flexíveis. A figura 10 ilustra o sistema mais simples que considera a flexibilidade dos mancais. Neste caso, devido à uniformidade da rigidez dos mancais e a simetria do problema, a rigidez equivalente vista pelo rotor vale $2 \cdot k_m$.

A velocidade crítica fica:

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_m}{m}} \quad (29)$$

Analogamente ao sistema com eixo flexível, quando $\omega \ll \omega_{cr}$, às forças elásticas dominam o comportamento do sistema, e o centro de massa descreve uma circunferência externa àquela descrita pelo centro do eixo. Quando $\omega \gg \omega_{cr}$, o centro de massa descreve uma circunferência interna àquela descrita pelo centro do eixo, de modo que quando $\omega/\omega_{cr} \rightarrow \infty$, o centro de massa permanece estacionário no espaço enquanto o centro geométrico do eixo descreve uma circunferência de raio e em torno dele. Como veremos adiante, existem máquinas de balanceamento que se utilizam dessa propriedade.

Os resultados obtidos para os modelos simples devem ser estendidos a rotores com massa distribuída ao longo do comprimento. Neste caso, teremos várias velocidades

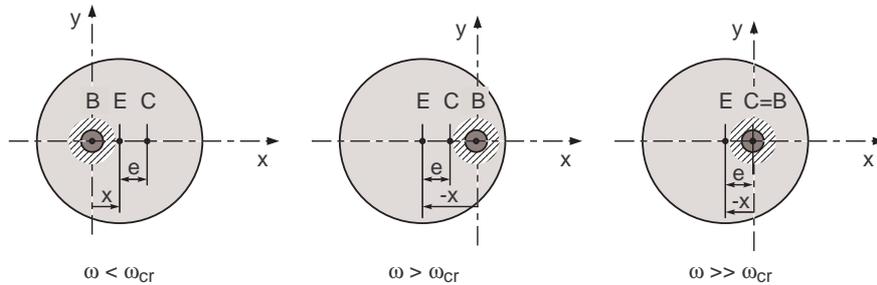


Figura 8: Posição relativa dos pontos C , E e B

críticas possíveis com as correspondentes configurações da linha elástica, como mostrado na figura 11.

Evidentemente, para uma velocidade ω constante, diferente da velocidade crítica, a configuração da linha elástica depende do desbalanceamento distribuído ao longo do rotor, podendo assumir uma curva espacial.

Para complementar a discussão apresentada, devemos mencionar que as velocidades críticas de rotores reais dependem, além da distribuição de massa e rigidez ao longo do rotor, da rigidez dos mancais, de efeitos giroscópicos, etc. Cumpre lembrar que existe uma literatura extensa sobre dinâmica de rotores, pela sua importância no projeto e utilização de máquinas rotativas de alta velocidade, como as turbo-máquinas.

6 Balanceamento de rotores flexíveis

Já mostramos que rotores reais se deformam pelo efeito das forças de inércia e podem apresentar velocidades críticas. Um rotor pode ser considerado rígido, se sua velocidade de trabalho é muito menor que sua primeira velocidade crítica. Evidentemente, quando a velocidade de rotação se aproxima ou ultrapassa a primeira crítica, devemos considerar a elasticidade do rotor. A norma *ISO 11342* trata dos métodos de balanceamento de rotores flexíveis, classificando-os em cinco categorias que podem requerer procedimentos diferentes de balanceamento. Para um primeiro contato com o assunto apresentaremos um único método de balanceamento. Para mostrar o comportamento da distribuição de massa em um rotor flexível, consideremos o seguinte.

Suponhamos inicialmente um rotor rígido que tenha sido balanceado em dois planos, como apresentado na figura 12.

Quando aumentamos a rotação, o efeito da flexibilidade se faz sentir, alterando as distâncias dos centros de massa de cada seção até o eixo dos mancais, conforme apresentado na figura 13. Isto torna as forças de inércia não compensadas, e portanto o rotor desbalanceado.

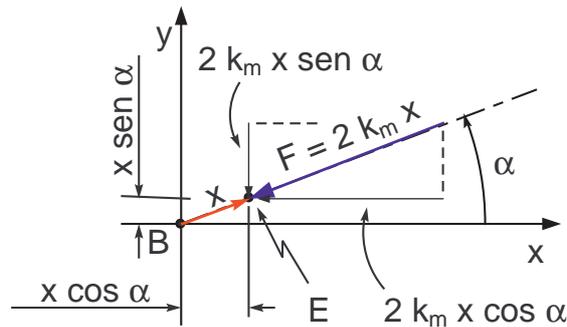


Figura 9: Rigidez equivalente de mancal axissimétrico

Portanto, aparentemente, são necessários infinitos planos de balanceamento para corrigir a distribuição de massa em cada seção, o que é impraticável.

Na realidade, o balanceamento é feito em um número j de planos conforme a rotação do eixo. Para uma velocidade de trabalho no campo da primeira velocidade crítica, o eixo assume a configuração do primeiro modo (ver figura 11), sendo necessários três planos de balanceamento; genericamente, para velocidade de trabalho no campo da n -ésima velocidade crítica, são necessários $n + 2$ planos de balanceamento.

O procedimento para balancear um rotor que trabalhe no campo da primeira velocidade crítica, por exemplo, é descrito a seguir.

Inicialmente balanceia-se o rotor em uma velocidade bem abaixo da crítica, como corpo rígido, utilizando-se os planos *I* e *II* das extremidades. Eleva-se a velocidade de rotação até um valor próximo da primeira crítica, quando o eixo assume a configuração do primeiro modo, mostrado na figura 13. Faz-se o balanceamento de modo a diminuir a flecha do eixo, adicionando ou retirando massa no plano central *III*, e compensando essa massa nos planos *I* e *II* das extremidades, de modo a não alterar o balanceamento como corpo rígido. Desta maneira, quando a velocidade for reduzida, o corpo continuará balanceado.

7 Métodos e Máquinas de balanceamento

Um corpo girando em torno de um eixo central de inércia não está sujeito a forças dinâmicas externas. Nesta situação, o eixo geométrico descreve uma superfície de revolução em torno do eixo de inércia. Se impusermos uma restrição ao movimento do eixo geométrico através de mancais, de modo que o eixo central de inércia seja forçado a descrever uma superfície de revolução ao redor dele, resultarão esforços nos mancais. Os dois

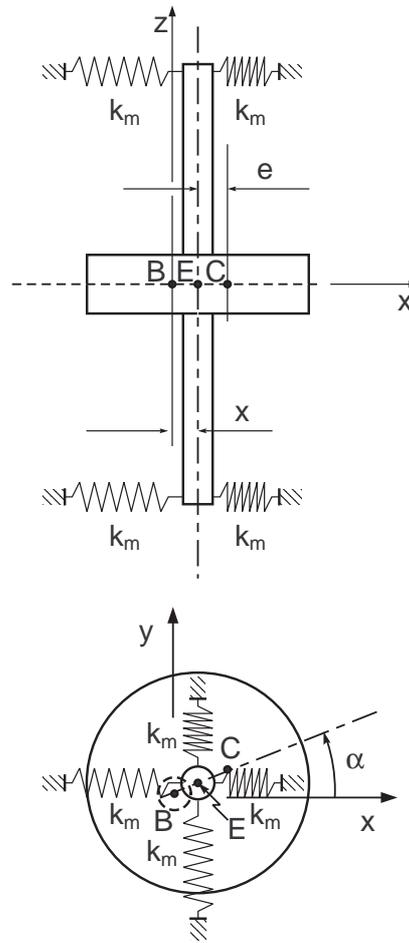


Figura 10: Eixo rígido com disco centrado sobre mancais flexíveis

tipos básicos de máquinas de balanceamento dinâmico operam conforme esses dois casos limites. A seguir faremos uma rápida classificação e descrição dos métodos e máquinas de balanceamento.

7.1 Balanceamento estático – método gravitacional

O balanceamento estático pelo método gravitacional consiste em colocar a peça livre para girar em torno de um eixo horizontal e observar a posição em que se dá o equilíbrio após cessar a rotação. Com colocação ou retirada de massa num processo iterativo, obtém-se o balanceamento estático quando a peça adquirir equilíbrio indiferente. A massa é colocada na posição superior ou retirada da inferior quando o corpo cessa de girar. A figura 14 apresenta um dispositivo simples para balancear.

7.2 Balanceamento centrífugo ou dinâmico

O balanceamento centrífugo ou dinâmico consiste em se girar o corpo a uma dada velocidade, a fim de se determinar o desbalanceamento devido a não distribuição uniforme

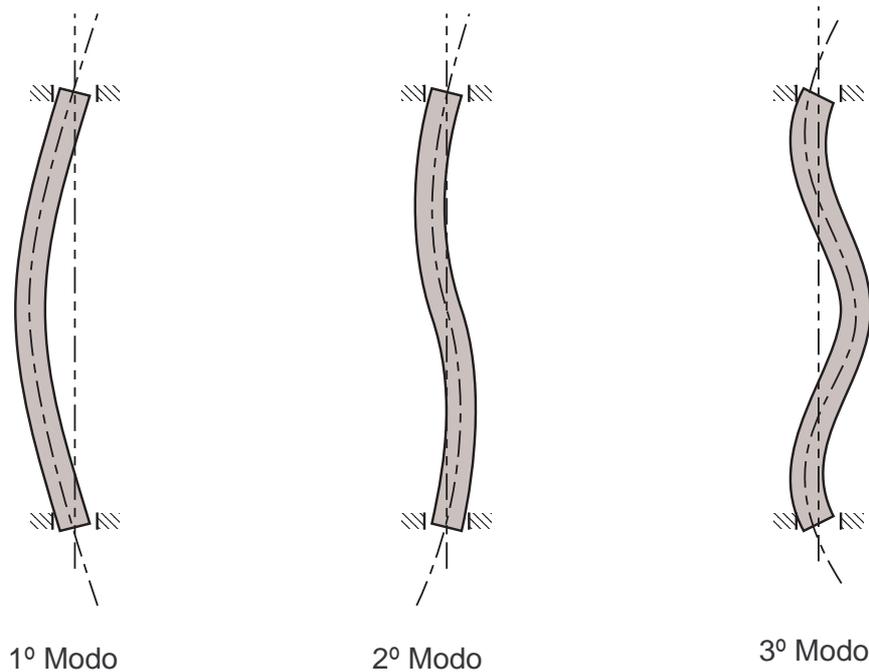


Figura 11: Velocidades críticas de rotores flexíveis

de massa em relação ao eixo de rotação do corpo. Existem dois tipos de máquinas de balancear.

7.2.1 Máquina de balancear de mancais flexíveis

Na figura 15 é apresentado um croqui de uma balanceadora de mancais flexíveis em operação. O corpo se comporta como se estivesse livre no espaço; o eixo central de inércia fica fixo e os mancais se movimentam. Medem-se deslocamentos ou velocidades dos mancais, conforme esquematizado na figura 16. A velocidade de rotação deve ser bem maior que a velocidade crítica do conjunto rotor-mancais, sendo que para tanto, os mancais são bastante flexíveis e $\omega_{cr} \rightarrow 0$. Aproximando-se um giz do rotor em movimento, conforme indicado na figura 17, pode-se determinar a posição angular do ponto C , centro de massa. Note-se que deve ser colocada massa nesse ponto para balancear o sistema.

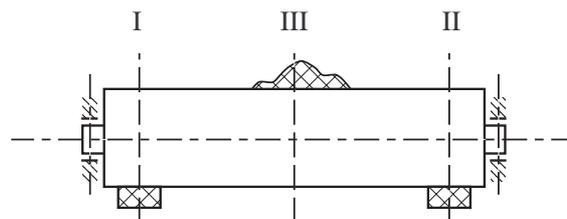


Figura 12: Rotor rígido balanceado em dois planos

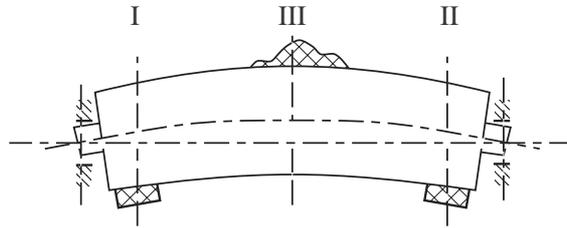


Figura 13: Rotor flexível desbalanceado devido à deformação do eixo

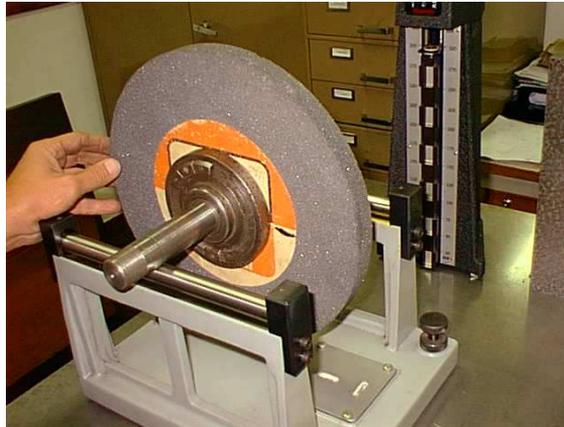


Figura 14: Dispositivo para balanceamento estático

7.2.2 Máquina de balancear de mancais rígidos

Na figura 18 é apresentado um croqui de uma balanceadora de mancais rígidos. Neste tipo de máquina, o corpo gira em torno do eixo geométrico, e são medidas as forças nos mancais, conforme esquematizado na figura 19. A velocidade de rotação deve ser muito menor que a velocidade crítica do conjunto rotor-mancais, de modo a se evitar deflexões no rotor. Pela figura 20, podemos ver que deve ser retirada massa do ponto C (marcado por um giz aproximado do rotor girando), a fim de se balancear o sistema. As forças nos mancais são obtidas por meio de transdutores de cristais piezelétricos ou extensômetros.

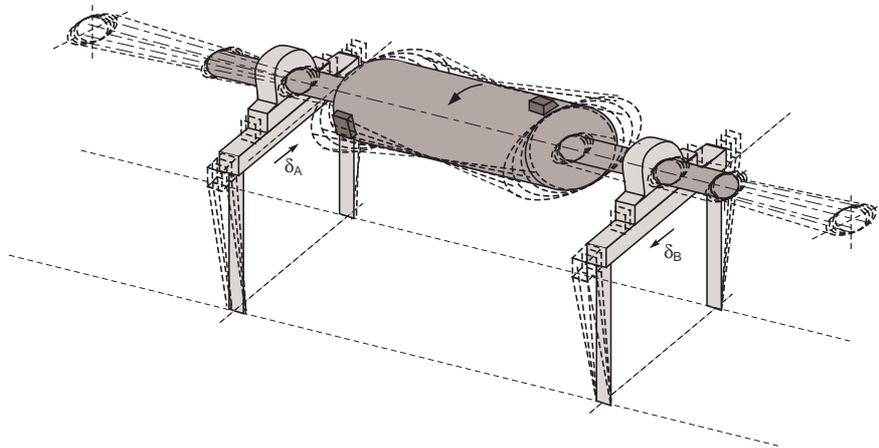


Figura 15: Croqui de uma balanceadora de mancais flexíveis

8 Exercícios Resolvidos

8.1 Exercício

Seja um rotor simétrico de massa M perfeitamente balanceado, como mostrado na figura abaixo. Um sistema de referência que tenha um eixo coincidente com o eixo de rotação do rotor e centrado no seu baricentro constitui um sistema de eixos centrais de inércia, ou seja:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad J_1 = J_2 \quad (30)$$

A adição de uma massa m ($m \ll M$) numa das extremidades do rotor, altera a simetria do rotor no plano Oyz , assim como provoca uma translação do seu baricentro. Determinar a posição e as direções dos novos eixos centrais de inércia.

8.1.1 Solução

A posição e as direções dos eixos centrais de inércia serão calculadas utilizando como referência os eixos centrais de inércia do rotor simétrico.

- Determinação da translação do baricentro:

Inicialmente será considerada uma translação pura do sistema de eixos $Gxyz$ para o sistema $G'x'y'z'$. Por definição de baricentro temos:

$$M_T \vec{r}_G = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \text{sendo} \quad \vec{r}_i = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (31)$$

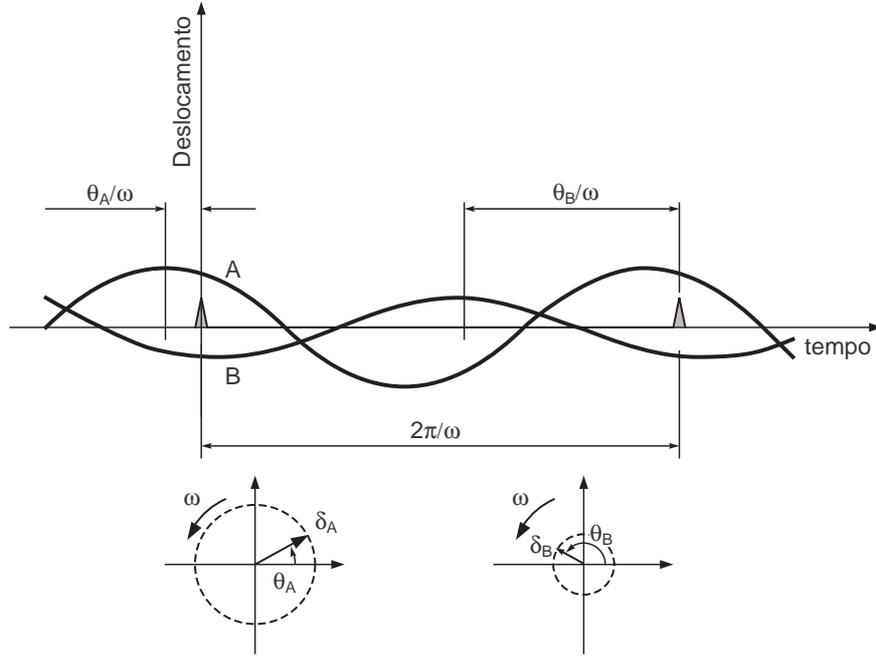


Figura 16: Resposta ao desbalanceamento em máquina de balancear de mancais flexíveis

$$\begin{aligned}
 \text{Direção X: } (M + m) x_G &= M \cdot 0 + m R \Rightarrow x_G = \frac{m R}{(M + m)} \\
 \text{Direção Y: } (M + m) y_G &= M \cdot 0 + m \cdot 0 \Rightarrow y_G = 0 \\
 \text{Direção Z: } (M + m) z_g &= M \cdot 0 + m L \Rightarrow z_G = \frac{m L}{(M + m)}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Devido a adição da massa m , o tensor original de inércia altera-se para:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= J_1 + m (y^2 + z^2) = J_1 + m (0 + L^2) \simeq J_1 \\
 J_{yy} &= J_2 + m (x^2 + z^2) = J_2 + m (R^2 + L^2) \simeq J_2 \\
 J_{zz} &= J_3 + m (y^2 + x^2) = J_3 + m (0 + R^2) \simeq J_3
 \end{aligned} \tag{34}$$

Pois $M \gg m$

$$\begin{aligned}
 J_{xy} &= 0 + m R \cdot 0 = 0 \\
 J_{xz} &= 0 + m R L = m R L \\
 J_{yz} &= 0 + m \cdot 0 \cdot L = 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

Assim:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & -m R L \\ 0 & J_2 & 0 \\ -m R L & 0 & J_3 \end{bmatrix} \tag{36}$$

O tensor de inércia para o sistema $G'x'y'z'$ utilizando a propriedade de translação do baricentro, fica:

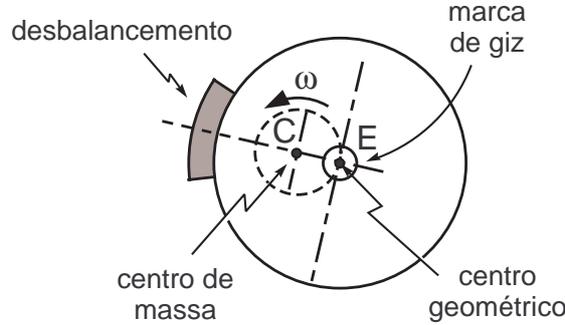


Figura 17: Em mancais flexíveis o giz marca a direção angular oposta ao centro de massa

$$J = J' + M_T d^2 \quad (37)$$

Assim:

$$\begin{aligned} J'_{xx} &= J_{xx} - (M + m)(y_G^2 + z_G^2) = J_{xx} \simeq J_1 \\ J'_{yy} &= J_{yy} - (M + m)(x_G^2 + z_G^2) = J_{yy} \simeq J_2 \\ J'_{zz} &= J_{zz} - (M + m)(x_G^2 + y_G^2) = J_{zz} \simeq J_3 \end{aligned} \quad (38)$$

$$J'_{xz} = J_{xz} - (M + m)x_G z_G \simeq J_{xz} = mRL \quad (39)$$

pois $y_G = 0$; x_G e z_G são muito pequenos.

Obtendo portanto: $[J'] = [J]$

- Determinação das direções principais de inércia:

O tensor de inércia é um operador linear que aplicado a um versor \vec{e} , transforma-o num vetor $J\{\vec{e}\}$. Na direção principal de inércia, o vetor $J\{\vec{e}\}$, possui a mesma direção do versor \vec{e} , divergindo apenas em módulo, ou seja:

Sendo:

$$J\{\vec{e}\} = \mathbf{J} \cdot \vec{e} \quad (40)$$

na direção principal de inércia, temos:

$$\mathbf{J} \cdot \vec{e} = \lambda \vec{e} \quad \implies \quad [\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \vec{e} = \vec{0} \quad (41)$$

O que se resume num problema de auto-valor, sendo o versor \vec{e} , o auto-vetor associado. Dessa forma, os valores de λ constituirão os momentos principais de inércia, calculados no baricentro do sistema de eixos $G'x'y'z'$. Os auto-vetores associados a cada autovalor fornecerão as componentes para cada direção central de inércia, em relação ao sistema original.

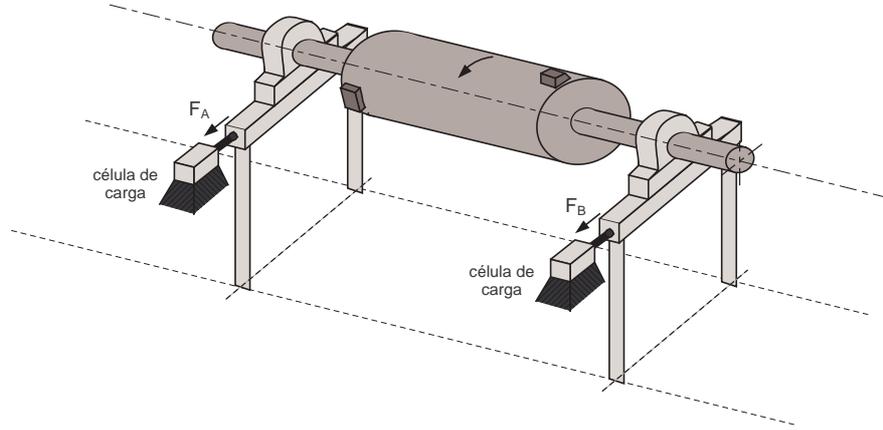


Figura 18: Croqui de uma balaceadora de mancais rígidos

Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} (J_1 - \lambda) & 0 & -mRL \\ 0 & (J_1 - \lambda) & 0 \\ -mRL & 0 & (J_3 - \lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (42)$$

A solução trivial, ou seja, $e_x = e_y = e_z = 0$, obviamente não interessa, logo, para que o sistema tenha solução devemos impor que o determinante da matriz quadrada seja nulo. Assim, temos:

$$(J_1 - \lambda) \left[(J_1 - \lambda)(J_3 - \lambda) - (mRL)^2 \right] = 0 \quad (43)$$

Este polinômio é chamado *Polinômio Característico do problema de auto-valor*. Suas raízes constituirão, assim, os três momentos principais de inércia, sendo associado a cada raiz um auto-vetor, dando assim, as três direções centrais de inércia para o rotor com a massa adicionada.

Uma das raízes para esse polinômio é obtida quando a expressão contida entre o primeiro par de parênteses for nula, ou:

$$\lambda_1 = J_1 \quad (44)$$

Substituindo λ_1 , no sistema acima, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -mRL \\ 0 & 0 & 0 \\ -mRL & 0 & (J_3 - J_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (45)$$

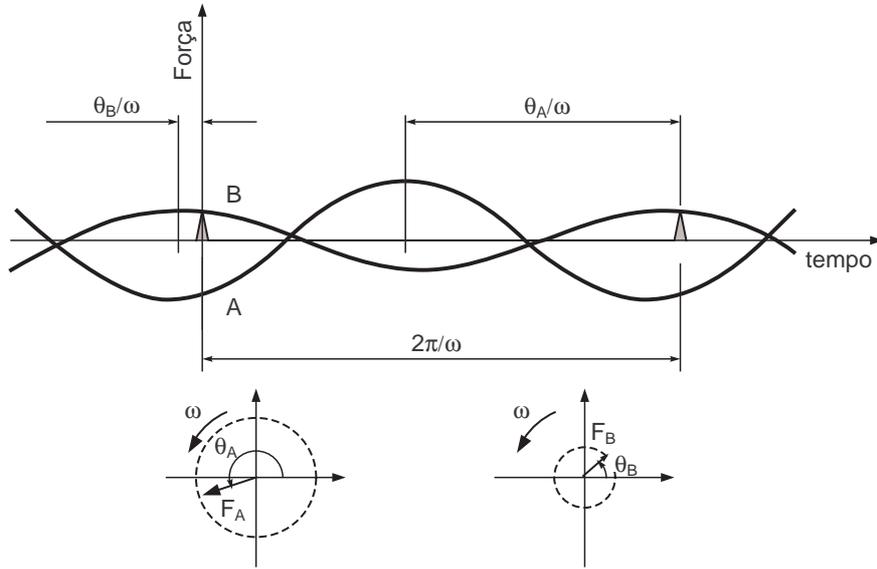


Figura 19: Resposta ao desbalanceamento em máquina de balancear de mancais rígidos

A partir desse sistema de equações, podemos calcular o auto-vetor associado a esse autovalor, ou seja, as componentes da direção do eixo central de inércia associada ao momento de inércia J_1 .

Como foi imposto que o determinante da matriz quadrada fosse nulo, esse sistema tornou-se *linearmente dependente*, tornando o problema de autovetor *indeterminado*, ou seja, não haverá apenas uma solução, mas um conjunto de soluções que satisfazem ao sistema. Entretanto, todas as soluções encontradas devem satisfazer a todas as equações do sistema acima, assim o conjunto de soluções associado ao momento de inércia J_1 , será:

$$\begin{aligned} -mLR e_{z1} = 0 & \longleftrightarrow e_{z1} = 0 \Rightarrow e_{x1} = 0 \\ 0 e_{y1} = 0 & \longleftrightarrow e_{y1} = \forall \end{aligned}$$

Com esse resultado, temos que a direção do eixo central de inércia associado ao momento de inércia J_1 é dada pelas seguintes componentes:

$$\boxed{e_{x1} = 0; \quad e_{y1} = \forall; \quad e_{z1} = 0}$$

As demais raízes são conseguidas anulando-se a expressão contida entre o segundo par de parênteses, assim:

$$\left[(J_1 - \lambda)(J_3 - \lambda) - (mRL)^2 \right] = 0$$

Sendo o termo $(mRL)^2$ muito pequeno, podemos assumir que as raízes λ_2 e λ_3 , que satisfazem a essa expressão são da mesma ordem de grandeza de J_1 e J_3 , a menos de um valor Δ muito pequeno, ou seja para $\lambda_2 = J_1 - \Delta$, temos:

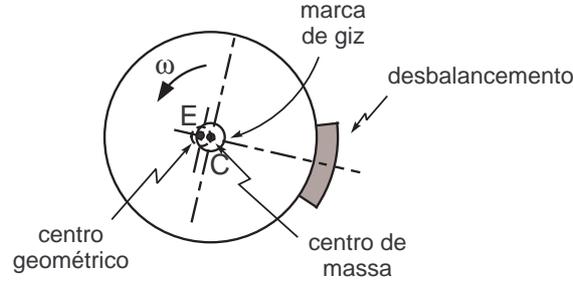


Figura 20: Em mancais rígidos o giz marca a direção angular do centro de massa

$$[J_1 - (J_1 - \Delta)][J_3 - (J_1 - \Delta)] - (mRL)^2 = 0$$

Desprezando o termo de segunda ordem, temos:

$$\Delta = \frac{-(mRL)^2}{J_1 - J_3}$$

Assim, temos que:

$$\lambda_2 = J_1 + \frac{-(mRL)^2}{J_1 - J_3} \quad (46)$$

Calculando os autovetores associados a esse autovalor, temos:

$$\begin{bmatrix} -\frac{-(mRL)^2}{J_1 - J_3} & 0 & -mRL \\ 0 & -\frac{-(mRL)^2}{J_1 - J_3} & 0 \\ -mRL & 0 & J_3 - J_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{Bmatrix} = 0$$

Como podemos verificar, a primeira e a terceira equações são linearmente dependentes, de maneira que podemos utilizar apenas uma delas, juntamente com a segunda equação desse sistema para encontrarmos os autovetores associados a esse autovalor. Novamente, não teremos apenas uma solução mas um conjunto de soluções, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{-(mRL)^2}{J_1 - J_3} e_{y2} &= 0 & \Rightarrow & e_{y2} = 0 \\ -mRL e_{x2} - (J_1 - J_3) e_{z2} &= 0 & \Rightarrow & e_{z2} = -\frac{-(mRL)^2}{J_1 - J_3} e_{x2} \end{aligned}$$

Com esses resultados, obtemos as componentes da direção do eixo central de inércia associado ao momento de inércia λ_2 :

$$\boxed{e_{x2} = 1; \quad e_{y2} = 0; \quad e_{z2} = -\gamma}$$

com:

$$\gamma = \frac{mRL}{J_1 - J_3} \quad (47)$$

A terceira raiz do polinômio característico é dada por:

$$\lambda_3 = J_3 - \Delta$$

$$[J_1 - (J_3 - \Delta)][J_3 - (J_3 - \Delta)] - (mRL)^2 = 0$$

Desprezando o termo de segunda ordem, temos:

$$\Delta = \frac{(mRL)^2}{J_1 - J_3}$$

Assim, temos que:

$$\lambda_3 = J_3 - \frac{(mRL)^2}{J_1 - J_3}$$

Calculando os autovetores associados a esse autovalor, temos:

$$\begin{bmatrix} J_1 - J_3 & 0 & -mRL \\ 0 & J_1 - J_3 & 0 \\ -mRL & 0 & \frac{(mRL)^2}{J_1 - J_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \\ e_{z3} \end{Bmatrix} = 0$$

O conjunto de soluções que fornece a direção do eixo central de inércia associado a esse autovalor é dado por:

$$\begin{aligned} J_1 - J_3 e_{y3} = 0 & \Rightarrow e_{y3} = 0 \\ (J_1 - J_3) e_{x3} - mRL e_{z3} = 0 & \Rightarrow e_{x3} = -\frac{(mRL)^2}{J_1 - J_3} e_{z3} \end{aligned}$$

Com esses resultado, obtemos as componentes da direção do eixo central de inércia associado ao autovalor λ_3 :

$$\boxed{e_{x3} = \gamma; \quad e_{y3} = 0; \quad e_{z3} = 1}$$

Concluindo, se adicionarmos uma massa $m \ll M$, a um rotor simétrico, no plano xz, provocamos um deslocamento do centro de massa dado por: $x_G = \frac{mR}{M}$ e $z_G = \frac{mL}{M}$, e uma inclinação do eixo central de inércia que coincide com o eixo de rotação de $\gamma = \frac{mRL}{J_1 - J_3}$.