4a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

1^o. semestre de 2021

1. Se $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$, prove que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Calcule $\lim_{n\to\infty} a^n$ para os todos os valores possíveis de a (sugestão: para $a > 1$ escreva $a = (1+h)^n$, para $0 < a < 1$ escreva $a = 1/(1+h)^n$ e use a desigualdade de Bernoulli).

3. Calcule:

   (a) $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ para os todos os valores possíveis de a. (sugestão: para $a > 1$ escreva $a = (1+h_n)^n$ e use a a expansão binomial).

   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$.

4. Mostre que:

   (a) $\lim_{n\to\infty}(2n)^{1/n} = 1$.

   (b) Se $0 < a < 1$, $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$.

   (c) $\lim_{n\to\infty}(n^2/n!) = 0$.

   (d) $\lim_{n\to\infty}(2^n/n!) = 0$.

5. Calcule, caso exista $\lim_{n\to\infty} x_n$ nos casos abaixo,

   (a) $x_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+5}$,

   (b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

   (c) $x_n = (1+\frac{2}{n})^n$ (admita que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$),

   (d) $x_n = (1-\frac{2}{n})^n$,

   (e) $x_n = \text{ sen } \frac{1}{n}$,

   (f) $x_n = \frac{\text{sen n}}{n}$,

   (g) $x_n = n(1-\cos\frac{1}{n})$,

   (h) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

(i) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se} \quad n = 2k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2k+1} & \text{se} \quad n = 2k+1, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R} \end{cases}$

6. Sejam $a, b > 0$ e considere a sequência $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$. Prove que $\lim_{n\to\infty} x_n = \max\{a, b\}$.

7. Mostre que toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, admite uma subsequência monótona e use este resultado para mostrar que toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real.

8. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada e, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ e $t_n := \inf\{x_k : k \geq n\}$. Mostre que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são monótonas e convergentes. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. ($\lim_{n\to\infty} s_n$ e $\lim_{n\to\infty} t_n$ são denominados, respectivamente o **limite superior** e **limite inferior** da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

9. Suponha que toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para 0. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

10. Mostre que a sequência $x_n = \sqrt{n}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, mas não é sequência de Cauchy.

11. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **propriamente divergente** se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência não limitada, então admite uma subsequência propriamente divergente.

12. A sequência $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$ é propriamente divergente?

13. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência propriamente divergente e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n$ existe. Mostre que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.

14. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números positivos tais que $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$. Mostre que

    (a) Se $\lim x_n = +\infty$ então $\lim y_n = +\infty$

(b) Mostre que, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

15. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números positivos tais que $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = +\infty$. Mostre que

    (a) Se $\lim y_n = +\infty$ então $\lim x_n = +\infty$

    (b) Mostre que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

16. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **contrativa** se existe uma constante $0 < C < 1$ talque

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|,$$

para $n \in \mathbb{N}$

a)Mostre que toda sequência contrativa é de Cauchy (portanto convergente).

b) Mostre que a sequência definida por: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n^3+2)$ para $n \in \mathbb{N}$ é contrativa.

c) Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida em b), mostre que $r = \lim_{n\to\infty} x_n$ é raiz da equação:$x^3 - 7x + 3$.

17. Uma demonstração de que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n.$$

b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$.

c) Use $a = 1+1/(n+1)$ e $b = 1+1/n$ na parte b) para demonstrar que $\{a_n\}$ é crescente.

d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Use as partes c) e d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

18. O método babilônico para o cálculo de raí zes. Seja $a > 0$ e defina a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$.

    a) Mostre que $x_n^2 > a$, Para $n \geq 2$.

    b) Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente para $n \geq 2$.

    c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

19. Prove o Princípio dos Intervalos Encaixantes usando o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Exercícios adicionais

1. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...$

2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, ...$

3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, ...$

4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

5) $c_k = \dfrac{\sqrt{k}+1}{k-1}, \; k \geq 2$

6) $a_n = \dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

8) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

9) $a_n = \dfrac{2n}{n+1} - \dfrac{n+1}{2n}$

10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

11) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

12) $a_n = \sin n$; $b_n = \sin(n\pi)$; $c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

13) $a_n = \dfrac{2n+\sin n}{5n+1}$

14) $a_n = \dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

16) $a_n = \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

17) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n+10^n}$

18) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

20) $a_n = na^n, \; a \in \mathbb{R}$

21) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

22) $a_n = n - n^2 \sin\dfrac{1}{n}$

23) $a_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$

24) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$ onde $0 < a < b$

25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)$

26) $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

27) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

28) $a_n = \sqrt[n]{n}$

29) $a_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$

30) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n^a}, \;\; a > 0$

31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

32) $a_n = \sqrt[n]{a}, \;\; a > 0$

33) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$

34) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

35) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

36) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

37) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

38) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

2. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas. Decida se cada afirmacão abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
   (1) Se $a_n \to a$ então $|a_n| \to |a|$.
   (2) Se $|a_n| \to |a|$ então $a_n \to a$.
   (3) Se $a_n \to a$ e $a_n \leq 0$ então $a \leq 0$.
   (4) Se $a_n \to a$ e $a_n > 0$ então $a > 0$.
   (5) Se $a_n \to a$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge então $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.
   (6) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não convergem então $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.
   (7) Se $a_n \cdot b_n \to d$ então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem.
   (8) Se $a_n \cdot b_n \to 0$ então ou $a_n \to 0$ ou $b_n \to 0$

3. Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

4. Seja a sequência definida por recorrência da seguinte forma: $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Mostre que a sequência é limitada e crescente. Obtenha o seu limite.

5. (i) Diz-se que um ponto B de um segmento $\overline{OA}$ divide este segmento na *razão áurea* se $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BA}$. (Diz-se também que B divide o segmento OA em *média e extrema razão*) Denota-se por φ a razão $\frac{OA}{OB}$. Mostre que φ é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, chamado *número de ouro*.

   (ii) (*Sequência de Fibonacci*). Considere a sequência dada por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, para $n \geq 2$. Prove que a sequência $x_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ converge e que seu limite é φ .

   5) Considere a sequência $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $p_1 = q_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}$ e $q_n = p_{n-1} + q_{n-1}$. Prove que a sequência é convergente e que $\lim \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$.

6. Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências.

   1) $s_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3}$ 2) $s_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{e^r}$ 3) $s_n = \displaystyle\sum_{r=3}^{n} \frac{1}{\ln r}$

   4) $a_n = \dfrac{2.4.6....(2n)}{1.3.5....(2n-1)}$ 5) $a_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ 6) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$.