Gabarito: T1 - Turma PN

1) Dados os pontos $P(2,3,0)$, $Q(4,0,1)$ e $R(0,1,2)$ no $\mathbb{R}^3$, determine:

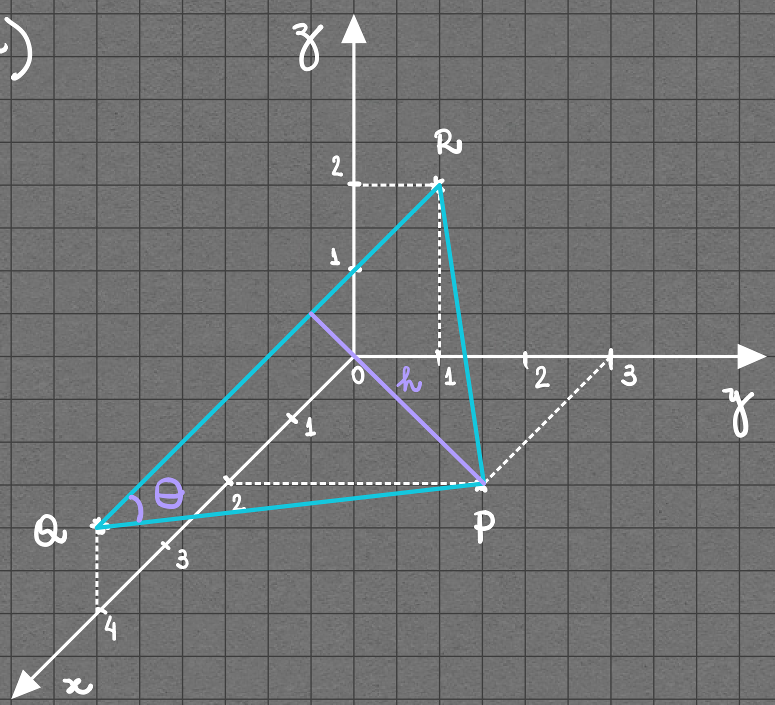
a) O esboço do triângulo PQR no espaço $\mathbb{R}^3$.

b) O comprimento do lado PQ.

c) A medida do ângulo entre os lados QP e QR.

d) A altura do triângulo PQR, relativa ao vértice P.

a)



h ... altura relativa ao vértice P

θ ... ângulo entre os lados QP e QR

b) O comprimento do lado PQ, p, é o módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$:

$$p = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = Q - P \\ \quad = (4,0,1) - (2,3,0) \\ \therefore \ \overrightarrow{PQ} = (2,-3,1) \end{cases}$$

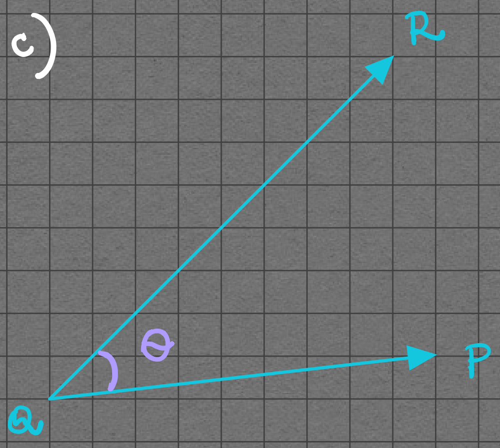
Assim:

$$p = \sqrt{(2,-3,1)\cdot(2,-3,1)}$$

$$= \sqrt{4+9+1} \quad \therefore \quad p = \sqrt{14}$$

... comprimento de PQ

c)



$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = |\vec{QP}|\,|\vec{QR}| \cos\theta$$

$$\vec{QP} = P - Q = (2,3,0) - (4,0,1)$$

$$\vec{QP} = (-2,3,-1)$$

$$\vec{QR} = R - Q = (0,1,2) - (4,0,1)$$

$$\vec{QR} = (-4,1,1)$$

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = (-2,3,-1) \cdot (-4,1,1) = 10$$

$$|\vec{QP}| = \sqrt{\vec{QP} \cdot \vec{QP}} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{QR}| = \sqrt{\vec{QR} \cdot \vec{QR}} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

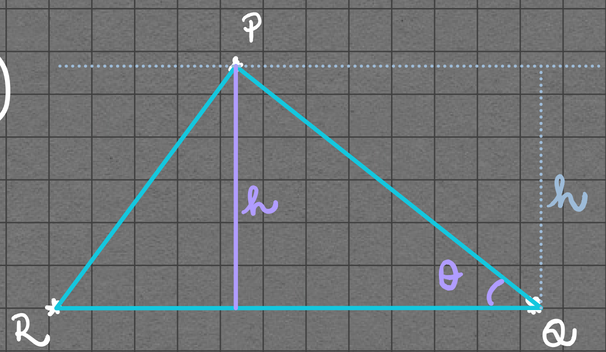
Desta forma:

$$\cos\theta = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{QR}}{|\vec{QP}|\,|\vec{QR}|} = \frac{10}{\sqrt{14}\,\sqrt{18}} = \frac{5}{3\sqrt{7}}$$

Logo:

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{3\sqrt{7}}\right)$$

d)



h ... módulo da projeção do vetor $\vec{QP}$ na direção vertical.

Portanto:

$$h = |\vec{QP}| \operatorname{sen}\theta$$

$$|\vec{QP}| = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{3\sqrt{7}}$$

Sabe-se que:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \frac{25}{63} = \frac{38}{63} \quad \therefore \quad \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{38}}{3\sqrt{7}}$$

Assim:

$$h = \sqrt{14}\,\frac{\sqrt{38}}{3\sqrt{7}} \qquad \therefore\ h = \frac{2\sqrt{19}}{3}$$

2) Decomponha o vetor $\vec{c} = (1,3,2)$ como soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tal que $\vec{a}$ é LD com o vetor $(0,1,3)$ e $\vec{b}$ é ortogonal a $(0,1,3)$.

$\vec{c}$ ... soma de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ $\longrightarrow$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (1)

$\vec{a}$ LD com $(0,1,3)$ $\longrightarrow$ $\vec{a} = k(0,1,3)$

$$\therefore\ \vec{a} = (0,k,3k)$$

$\vec{b} \perp (0,1,3)$ $\longrightarrow$ $\vec{b}\cdot(0,1,3) = 0$, $\vec{b} = (x,y,z)$

$$(x,y,z)\cdot(0,1,3) = 0$$

$$y + 3z = 0$$

$$y = -3z \quad \therefore\ \vec{b} = (x,-3z,z)$$

Substituindo $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ na eq. (1):

$$(1,3,2) = (x,-3z,z) + (0,k,3k)$$

$$(1,3,2) = (x, -3z+k, z+3k)$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -3z + k = 3 \\ z + 3k = 2 \end{cases}$$ cuja solução é $$\begin{cases} x = 1 \\ k = 9/10 \\ z = -7/10 \end{cases}$$

Substituindo x, k e z nos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tem-se:

$$\vec{a} = \left(0, \frac{9}{10}, \frac{27}{10}\right)$$

$$\vec{b} = \left(1, \frac{21}{10}, -\frac{7}{10}\right)$$

Portanto:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left(0, \frac{9}{10}, \frac{27}{10}\right) + \left(1, \frac{21}{10}, -\frac{7}{10}\right)$$