Exercício 7

a) As Eqs. de Maxwell no gauge de Lorenz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) são dadas por

$$\Box A^\mu = -j^\mu = -(\rho, \vec{j}),$$

enquanto que as equações de Einstein linearizadas implicam

$$\Box \bar{h}_0{}^\mu = -16\pi G\, T_0{}^\mu = 16\pi G(\rho, \vec{\Pi}).$$

Por outro lado, a eq. de movimento de uma carga no campo eletromagnético é dada, no regime de baixas velocidades:

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = \left(\frac{q}{m}\right)\left[E^j + (v\times B)^j\right] = \left(\frac{q}{m}\right)\left[-\partial^j A^0 + \left(v^k \partial^j A_k - v^k \partial_k A^j\right)\right], \quad \mathbb{E} = -\nabla A^0, \quad \mathbb{B} = \nabla\times A,$$

enquanto a eq. de movimento de uma partícula livre no espaço-tempo de gravitação linearizada, no regime de baixas velocidades (vide notas de aula):

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = \frac{1}{4}\partial^j \bar{h}_{00} + v^k\left(\partial^j \bar{h}_{0k} - \partial_k \bar{h}_0{}^j\right)$$

Logo, motivado pelo termo independente da velocidade, mas mantendo a convenção de orientação dos campos gravitoelétrico $\mathbb{E}_g$ e gravitomagnético $\mathbb{B}_g$ da análoga eletromagnética ($\mathbb{E}_g$ apontando para fora de massas e $\mathbb{B}_g$ satisfazendo a regra da mão direita em relação à corrente de massa), podemos definir

$$A_g^\mu := -\frac{\bar{h}_0{}^\mu}{4}, \quad E_g^j = -\partial^j A_g^0, \quad B_g^j = \epsilon^{jkl}\partial_k (A_g)_l,$$

de modo que

$$\Box A_g^\mu = -4\pi G(\rho, \vec{\Pi})$$

Logo, dados os campos elétrico e magnético gerado por uma distribuição de carga, ρ, e corrente, $\vec{j}$, podemos obter os campos $\mathbb{E}_g$ e $\mathbb{B}_g$ fazendo $\rho \mapsto 4\pi G\rho$, $\vec{j} \mapsto 4\pi G\vec{\Pi}$ (além de $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$). Então, no caso dado:

$$\mathbb{E} = \frac{Q\,\hat{r}}{4\pi r^2} \longmapsto \mathbb{E}_g = \frac{GM\,\hat{r}}{r^2}$$

$$\mathbb{B} = -\frac{\mu_0 Q R^2 \vec{\Omega}}{20\pi r^3} \longmapsto \boxed{\mathbb{B}_g = -\frac{GMR^2\vec{\Omega}}{5r^3}}$$

b) Dados os campos $\mathbb{E}_g$ e $\mathbb{B}_g$, então a eq. de movimento de uma partícula é:

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = \partial^j\left(-\frac{\bar{h}_0{}^0}{4}\right) - 4v^k\left[\partial^j\left(-\frac{\bar{h}_{0k}}{4}\right) - \partial_k\left(-\frac{\bar{h}_0{}^j}{4}\right)\right] \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbb{E}_g - 4\,\mathbf{v}\times\mathbb{B}_g$$

Logo, para um corpo em queda vertical num laboratório no equador da Terra, supondo uma velocidade típica de queda da ordem de alguns m/s (já que $v \simeq \sqrt{2gR} \lesssim 10\,\text{m/s}$), além da "aceleração gravitacional" usual ($\vec{g} = -\mathbb{E}_g$), há também uma "aceleração lateral" dada por $-4\,\mathbf{v}\times\mathbb{B}_g$. Assim a razão pedida vale

$$\frac{4|v||\mathbb{B}_g|}{|\mathbb{E}_g|} \simeq \frac{4|v|\cancel{G}MR^2\Omega r^2}{5r^3\cancel{GM}} = \frac{4|v|(R\Omega)}{5}\left(\frac{R}{r}\right) \simeq \frac{4|v|(R\Omega)}{5} \lesssim 10^{-14}$$

lembre que temos que recuperar c p/ obter o valor numérico!