Exercício 6

De acordo com o desenvolvimento feito em aula:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu(\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\partial_\nu(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\beta\mu}) + \frac{1}{2}\partial_\mu(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\beta\nu}) + O(h^2)$$

Pelo enunciado: $\eta_{\mu\nu} = diag(-1,+1,+1,+1)$ e $h_{\mu\nu} = diag(-A,B,B,B)$, onde A e B não dependem de $t = x^0$. Logo:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu(A+3B) + \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_j h^j{}_\mu) + \frac{1}{2}\partial_\mu(\partial_j h^j{}_\nu) + O(h^2)$$

P/ $\mu=\nu=0$:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 A + O(h^2)$$

Além disso:

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla^2(A+3B) - \frac{1}{2}\nabla^2(A+3B) + \partial_i\partial_j h^{ij} + O(h^2)$$

$$= -\nabla^2(A+3B) + \nabla^2 B = -\nabla^2(A+2B) + O(h^2)$$

Logo:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{1}{2}\cancel{\nabla^2 A} + \frac{1}{2}[-\cancel{\nabla^2 A} - 2\nabla^2 B] + O(h^2) = -\nabla^2 B + O(h^2)$$

Logo, pelas Eq. de Einstein nas diferentes formas:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \overset{\mu=\nu=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\nabla^2 A \approx 8\pi G(T_{00} + \tfrac{1}{2}(-T_{00} + \cancelto{0}{T^j{}_j})) \approx 4\pi G\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 A \approx 8\pi G\rho}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \overset{\mu=\nu=0}{\Rightarrow} -\nabla^2 B \approx 8\pi G\rho. \quad \boxed{\nabla^2 B \approx -8\pi G\rho}$$

Então, $\nabla^2(A+B) \approx 0$, em todo o espaço-tempo. Além disso, sabemos que no infinito, A e B $\to 0$ (espaço plano). Logo, temos uma Eq. de Laplace $\nabla^2(A+B) = 0$ com a condição de contorno $A+B=0$ no infinito. Logo:

$$A + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -A}$$

P/ encontrar, por exemplo, A, temos:

$$\nabla^2 A = 8\pi G\rho \Leftrightarrow \int_V d^3x\, \nabla^2 A = 8\pi G\int_V d^3x\, \rho = 8\pi G M \Leftrightarrow$$

$$\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{\nabla}A = 8\pi G M$$

se V englobar toda a região em que $\rho \neq 0$. Escolhendo V como sendo a esfera com raio r e usando a simetria do sistema (esférica), temos:

$$4\pi r^2(\hat{r}\cdot\vec{\nabla}A) = 8\pi G M \Leftrightarrow \hat{r}\cdot\vec{\nabla}A = \frac{2GM}{r^2} \Leftrightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{2GM}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{2GM}{r} \Rightarrow \boxed{B = -A = \frac{2GM}{r}}$$