Solução - Prova 1

1. Em que condição podemos escrever as derivas de curvatura e gradiente numa forma combinada proporcional à $\boldsymbol{\nabla} B \times \boldsymbol{B}$?

Solução: Como a deriva de curvatura é proporcional a $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$, pela identidade vetorial:

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$$

Para $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, em que $\boldsymbol{\nabla} B^2 = 2B\boldsymbol{\nabla} B$, podemos reescrever como:

$$2B\boldsymbol{\nabla} B = 2\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) + 2(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \implies (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\nabla} B - \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$$

Então, para que possamos escrever em termos do gradiente, a condição necessária é que $\boldsymbol{\nabla} \times B = 0$.

---

2. Considere um plasma de hidrogênio, com elétrons e íons a uma temperatura igual a $k_B T_e = k_B T_i = 1\, keV$ e comprimento de Debye igual a 1 mm. Qual é a densidade do plasma em m^{-3}? Dê sua resposta em notação científica.

Solução: O comprimento de Debye do plasma para um plasma com mais de um tipo de carga/íons é:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0\, k_B\, T}{\sum\limits_k q_k^2\, n_k}}$$

Como estamos tratando somente com íons e elétrons, e estamos supondo condição de quasineutralidade $n_e = n_i = n_0$: o cálculo fica:

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0\, k_B\, T}{2n_0\, e^2} \implies n_0 = \frac{\epsilon_0\, k_B\, T}{2\lambda_D^2\, e^2}$$

Colocando os valores:

$$n_0 = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 10^3 \times 1.60 \times 10^{-19}}{2 \times (10^{-3})^2 \times (1.60 \times 10^{-19})^2} \approx 2.77 \times 10^{16}\, m^{-3}$$

---

3. A deriva devido à curvatura do campo magnético é paralela ao campo pois ela é proporcional a velocidade paralela da carga. (Verdadeiro ou Falso)

Solução: Falso, pois quem dita a direção é o termo $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$, não a velocidade paralela.

---

4. Em um tokamak, o campo magnético toroidal pode ser aproximado por

$$B_\phi = \frac{R_0\, B_0}{R}$$

em que B_0 é o campo magnético em R_0. Calcule a deriva combinada de gradiente e curvatura de um elétron com energia de $300\, eV$ localizado no centro do tokamak TCABR. Assuma que $v_\perp^2 = 2v_{||}^2$. Fatores geométricos do TCABR: $R_0 = 0,610\, m$ e $B_0 = 1,20\, T$.

Solução: Usando a fórmula da deriva combinada para o campo e condições dadas:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{CG} &= -\frac{m}{q\,B^3}\left[\frac{v_{0,\perp}^2}{2} + v_{0,||}^2\right] \boldsymbol{\nabla} B \times \boldsymbol{B} \\
&= -\frac{2m\,v_{||}^2}{-e}\left(\frac{R}{B_0\,R_0}\right)^3 \left(-\frac{B_0\,R_0}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}\right) \times \left(\frac{B_0\,R_0}{R}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= -\frac{2m\,v_{||}^2}{e\,B_0\,R_0}\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

Como a energia térmica é $\frac{3}{2}k\,T$, então $kT = 200\, eV$. Transformando no produto $m\,v_{||}^2$ e fazendo as contas, chega-se em $v_{CG} = 546.4\, m/s$

---

5. Considere um feixe cilíndrico de elétrons de raio $a = 1,0\, mm$, densidade de elétrons $n_e = 2.0 \times 10^{18}\, m^{-3}$, alinhado com um campo magnético de $2.5\, T$ ao longo do eixo do cilíndro (direção $\hat{\boldsymbol{z}}$), e de baixa velocidade tal que $J_z \approx 0$. Qual é a velocidade de deriva dos elétrons, em m/s, necessária para balancear a repulsão eletrostática entre elétrons na superfície do feixe.

Solução: Podemos modelar o feixe cilindrico como um fio infinito de raio $a = 0.001\, m$, em que a densidade de cargas é: $\rho(r) = -e\, n_e\, \Theta(a - r)$. Pela Lei de Gauss: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Supondo uma superfície externa ao fio de raio $R > a$ de um cilindro com altura H, temos que:

$$\begin{aligned}
\int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}\, dV &= -\frac{e\,n_e}{\epsilon_0}\int \Theta(a - r)\, dV \\
\int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS} &= -\frac{e\,n_e}{\epsilon_0}\int \Theta(a - r)\, dV
\end{aligned}$$

Pela simetria do problema, o campo elétrico é da forma $\boldsymbol{E} = E(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Portanto, sobre a superfície do cilindro, o campo elétrico é constante:

$$\int \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dS} = E(R)\,2\pi\,R\,H = -\frac{e\,n_e}{\epsilon_0}\pi\,a^2\,H$$
$$E(R) = -\frac{e\,n_e\,a^2}{2\epsilon_0\,R}$$

em que, na integral do lado direito usamos a propriedade da função Θ. Então, para $E(R=a)$, temos que:

$$\boldsymbol{E}(R=a) = -\frac{e\,n_e\,a}{2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}} \implies E(a) = 1.81\times 10^7\,V/m$$

Como a deriva $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \implies v_{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}} = E/B$. Logo:

$$v_{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}} = \frac{1.81\times 10^7}{2.5} \approx 7.2\times 10^6\,m/s$$

---

6. O campo magnético em um plasma de hidrogênio varia de $0.5\,T$ a $1.5\,T$ em $50\,\mu s$. Nesse caso, o momento magnético dos elétrons e dos íons podem ser considerados como invariantes adiabáticos. (Verdadeiro ou Falso).

Solução: Verdadeiro. Aqui, basta comparar as frequências ciclotrônicas com a frequência do campo magnético. Como o campo cresce e supomos que o crescimento é gradual, se a condição for satisfeita inicialmente, ela sempre será por todo crescimento e no topo.

Enfim:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{50\times 10^{-6}} \approx 1.26\times 10^4\,s^{-1}$$
$$(\Omega_c)_e = \frac{e\,B_0}{m_e} = \frac{1.6\times 10^{-19}\times 0.5}{9.11\times 10^{-31}} \approx 8.78\times 10^{10}\,s^{-1}$$
$$(\Omega_c)_i = \frac{e\,B_0}{m_i} = \frac{1.6\times 10^{-19}\times 0.5}{1.67\times 10^{-27}} \approx 4.79\times 10^{7}\,s^{-1}$$

Como a validade dos invariantes adiabáticos são para $\omega << \Omega_c$, ela é satisfeita para íons e elétrons desde o início até o fim do aumento de campo.

---

7. Considere um plasma de hidrogênio confinado por uma configuração de espelhos magnéticos em que o campo magnético axial dentro do sistema é dado por:

$$B(z) = B_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_m}\right)^2\right]$$

onde $B_0 = 0.3\,T$, $z_m = 0.5\,m$. Considere um elétron de energia igual à $800\,eV$, sendo que $v_{\perp,0} = 2v_{||,0}$ no centro do sistema. Verifique se esse elétron permanece confinado no sistema e, em caso afirmativo, calcule o valor de $v_\perp$ nos gargalos dos espelhos?

---

*Solução:*Como $v_{\perp,0} = 2v_{||,0}$, então a energia é:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_{\perp,0}^2 + v_{||,0}^2) = \frac{m}{2}(v_{\perp,0}^2 + \frac{1}{4}v_{\perp,0}^2) = \frac{5mv_{\perp,0}^2}{8}$$
$$\implies \frac{mv^2}{2} = \frac{5mv_{\perp,0}^2}{8} = 800 \times 1.6 \times 10^{-19}$$
$$\implies v_{\perp,0} = \sqrt{\frac{8 \times 800 \times 1.6 \times 10^{-19}}{5 \times 9.11 \times 10^{-31}}} \approx 1.50 \times 10^7\,m/s \implies v = \sqrt{\frac{5}{4}} v_{\perp,0} = 1.67 \times 10^7\,m/s$$

O elétron fica confinado caso o ângulo de ataque $\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{v_{\perp,0}}{v_{||,0}}\right] > \alpha_{min} = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{B(0)}{B(z_m)}}\right]$. Com os dados, temos que:

$$\alpha = \tan^{-1} 2 = 1.10\,\text{rad}$$
$$\alpha_{min} = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = 0.78\,\text{rad}$$

Ou seja, como o ângulo de ataque é maior que o ângulo mínimo, o elétron fica confinado e é refletido quando $v_{||} = 0$, logo, no gargalo, temos que $v_\perp = 1.67 \times 10^7\,m/s$

---

8. Considere um plasma cilíndrico de hidrogênio com raio r_0, temperatura T constante, e cuja densidade varie com o raio:

$$n(r) = n_0 \exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2}\right]$$

Considerando ainda que circule pelo plasma uma corrente I, qual é a expressão para a velocidade diamagnética na borda do plasma?

Solução - Prova 1

Solução: Como a velocidade diamagnética é dada por:

$$\boldsymbol{v}_D = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p \times \boldsymbol{B}}{q\,n\,B^2}$$

Como $\boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{\nabla}(nkT) = kT\boldsymbol{\nabla} n$ e $\boldsymbol{\nabla} n = -\frac{2r\,n_0}{r_0^2}\exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2}\right]\hat{\boldsymbol{r}}$, então:

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{kT}{q\,B^2}\frac{\frac{2r\,n_0}{r_0^2}\exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2}\right]}{n_0\exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2}\right]}(\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})$$

Um campo magnético de uma corrente que passa num plasma cilindrico pode ser modelada como um campo magnético que flui por um fio: $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\,I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, então:

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{2\pi\,rkT}{\mu_0\,q\,I}\frac{2r}{r_0^2}\underbrace{(\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\phi})}_{=\hat{\boldsymbol{z}}}$$

Na borda do plasma, $r = r_0$:

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{4\pi\,rkT}{\mu_0\,q\,I}\hat{\boldsymbol{z}}$$