$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ μ e Σ desconhecidos

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$

Estatística de Teste

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' S^{*-1} (\bar{X} - \mu_0)$$

Região Crítica

1) $$T^2 > \frac{(n-1)p\, F_{p,n-p}(\alpha)}{n-p}$$

Obs:

Se $p = 1$, $T^2 = \dfrac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S_*^2}$ $\qquad S_*^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$T^2 = \left(\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right)^2$ é o quadrado da estatística t

para o teste da média da distribuição normal ($N_1(\mu, \sigma^2)$, μ e σ^2 desconhecidos)

$$RC: \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{n-1}(\alpha/2) \iff \underbrace{\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right)^2}_{T^2 \text{ sob } H_0} > F_{1,n-1}(\alpha)$$

$\therefore$ $T^2 > \dfrac{(n-1)p\, F_{p,n-p}(\alpha)}{n-p}$, para $p = 1$ fica $T^2 > F_{1,n-1}(\alpha)$.

Portanto, se $p=1$, este teste é equivalente ao teste para a média da distribuição normal com variância desconhecida.

2) Se X é um vetor aleatório p-dimensional com vetor de médias μ e matriz de covariância positiva definida Σ, a distância de Mahalanobis entre X e μ é definida como

$$\Delta(X,\mu) = \sqrt{(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)}$$

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\Sigma)$ e T^2 é o quadrado da distância de Mahalanobis entre $\bar{X}$ e μ_0 com Σ substituída por S^*.

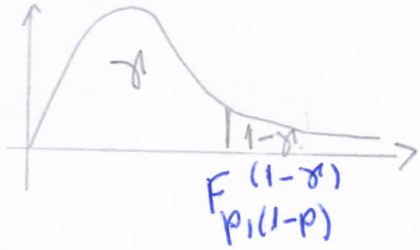
3) Verifica-se que este teste é o da Razão de Verossimilhança para $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_a: \mu \neq \mu_0$.

4) $$T^2 = \frac{(n-1)\left|\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_i-\mu_0)(\underset{\sim}{X}_i-\mu_0)'\right|}{\left|\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_i-\bar{X})(\underset{\sim}{X}_i-\bar{X})'\right|} - (n-1)$$

Região de Confiança para μ

Uma região de confiança com coeficiente de confiança γ para μ é dada pelo conjunto de todos os valores de μ tais que

$$n(\bar{X}-\mu)' S^{*-1}(\bar{X}-\mu) \leq \overbrace{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}(1-\gamma)}^{T^2_{p,n-1}}.$$



O limite dessa região é um elipsoide de centro $\bar{x}$ e a região consiste de todos os valores μ_0 de μ tais que o teste $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_a: \mu \neq \mu_0$ não rejeitaria H_0 ao nível $\alpha = 1-\gamma$ para o valor de $\bar{x}$ observado.

Exemplo

X_1 - nota de aptidão verbal $\quad n = 101 \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 55,24 \\ 34,97 \end{bmatrix}$

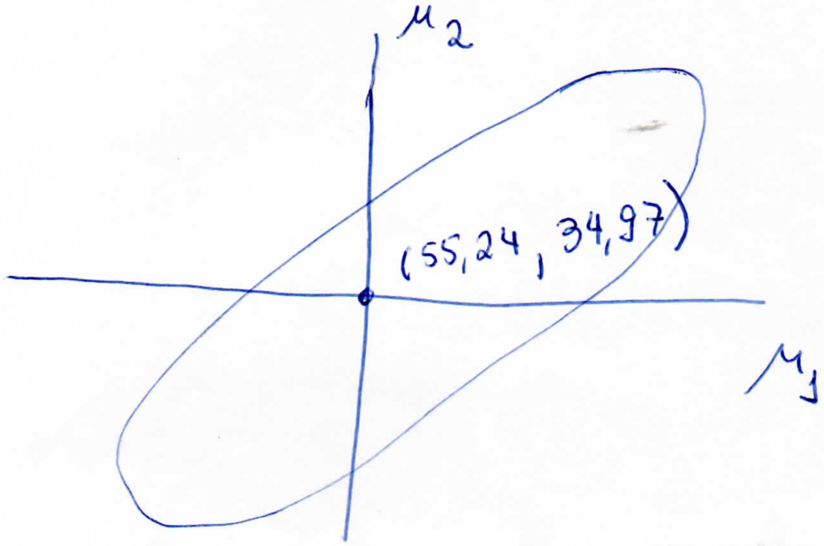
X_2 - nota de raciocínio abstrato $\quad p = 2$

Região de confiança para $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ - Conjunto dos valores μ_1 e μ_2 tais que

$$101\begin{bmatrix}55{,}24-\mu_1 & 34{,}97-\mu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}01319 & -0{,}01400\\ -0{,}01400 & 0{,}02321\end{bmatrix}\begin{bmatrix}55{,}24-\mu_1\\ 34{,}97-\mu_2\end{bmatrix}\leq$$

$$\leq \frac{100.2.4{,}98}{99}$$

$$\Rightarrow 1{,}319(\mu_1-55{,}24)^2-2{,}8(\mu_1-55{,}24)(\mu_2-34{,}97)$$
$$+2{,}321(\mu_2-34{,}97)^2\leq 10$$



Para verificar se um particular valor μ_0 de μ pertence à região de confiança, calcula-se o quadrado da distância $n(\bar{x}-\mu_0)'S^{*-1}(\bar{x}-\mu_0)$ e se for menor ou igual a $\frac{(n-1)p}{n-p}F_{p,n-p}(1-\gamma)$, este valor pertence à região.

Intervalos de Confiança para as Componentes de μ

a) $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ $\quad \Sigma$ e μ desconhecidos

$$\bar{X} \sim N_p\left(\mu, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

$\ell' = (\ell_1 \; \ell_2 \dots \ell_p)$ vetor de constantes conhecidas

σ^2 unidimensional

$$\ell'\bar{X} \sim N_1\left(\ell'\mu, \frac{\ell'\Sigma\ell}{n}\right)$$

σ^2 e estimado por $\ell' S^* \ell$ $\quad \hat{\sigma}^2 = \ell' S^* \ell$

$$t = \frac{\ell'\bar{X} - \ell'\mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} = \frac{\ell'\bar{X} - \ell'\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\ell'\bar{X} - \ell'\mu}{\frac{\sqrt{\ell' S^* \ell}}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

IC para $\ell'\mu$

$$P\left(-t_c \leq \frac{\ell'\bar{X} - \ell'\mu}{\frac{\sqrt{\ell' S^* \ell}}{\sqrt{n}}} \leq t_c\right) = \gamma \iff$$

$$P\left(\ell'\bar{X} - t_c \frac{\sqrt{\ell' S^* \ell}}{\sqrt{n}} \leq \ell'\mu \leq \ell'\bar{X} + t_c \frac{\sqrt{\ell' S^* \ell}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

$$IC: \left[l'\bar{X} - t_c \frac{\sqrt{l'S^*l}}{\sqrt{n}} \; ; \; l'\bar{X} + t_c \frac{\sqrt{l'S^*l}}{\sqrt{n}} \right]$$

$t_c \mid P(-t_c \leq t \leq t_c) = \gamma \quad t \sim$ t-student $n-1$ gl

Obs:

Se $l' = (1 \; 0 \; 0 \ldots 0)$, $l'\mu = \mu_1$ e o intervalo se reduz ao IC para a média da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 desconhecido:

$$\bar{X}_1 - t_c \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \bar{X}_1 + t_c \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

Se aplicássemos o procedimento para todas as médias obteríamos

$$\bar{X}_2 - t_c \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \bar{X}_2 + t_c \sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

$$\vdots$$

$$\bar{X}_p - t_c \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \leq \mu_p \leq \bar{X}_p + t_c \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}$$

$$s_{jj} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \qquad j = 1, 2 \ldots p$$

Cada um deles com coeficiente de confiança γ.

No entanto, esse procedimento não fornece a probabilidade de todos os intervalos conterem os μ_j, $j = 1, 2 \ldots n$ simultaneamente e só é indicado quando se deseja construir um único intervalo.

b) Intervalos de confiança baseados no T^2 de Hotelling

Se $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2 \ldots \underset{\sim}{X}_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N_p(\mu, \Sigma)$ então, simultaneamente, para todo l, os intervalos

T^2 de Hotelling

$$\left[l'\bar{X} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)\, l'S^* l} \;,\; l'\bar{X} + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)\, l'S^* l} \right]$$

contém $l'\mu$ com probabilidade $1-\alpha$.

$F_{p,n-p}(\alpha)$ - quantil de ordem $1-\alpha$ da distribuição $F_{p,n-p}$

Tomando $l_1' = (1, 0, 0 \ldots 0)$ $l_2' = (0, 1, \ldots 0) \ldots$

$l_p' = (0, 0, 0 \ldots 1)$

$$\left\{ \bar{X}_1 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} < \mu_1 < \bar{X}_1 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}, \right.$$

$$\bar{X}_2 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} < \mu_2 < \bar{X}_2 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}},$$

$$\vdots$$

$$\left. \bar{X}_p - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} < \mu_p < \bar{X}_p + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \right\}$$

vale com probabilidade $1-\alpha$.

(Observar que $l' S^* l = s_{jj}$ para $l = (0, 0 \ldots \overset{j}{1} \ldots 0)'$)

Esses intervalos são obtidos através do Princípio da União e Interseção.

Para obter intervalos de confiança para diferenças de médias, tomar $l' = (1, -1, 0 \ldots 0)$.

$$l'\mu = \mu_1 - \mu_2 \qquad l'\bar{X} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

$$l' S^* l = (1 \;\; -1 \;\; 0 \ldots 0) \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [s_{11} - s_{21} \quad s_{12} - s_{22} \cdots s_{1p} - s_{2p}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = s_{11} - 2s_{12} + s_{22}$$

I C para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \right. ,$$

$$\left. \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \right]$$

e assim, sucessivamente ...

I C para $\mu_{p-1} - \mu_p$

$$\left[\bar{X}_{p-1} - \bar{X}_p - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,(n-p)}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{s_{p-1\,p-1} - 2s_{p-1\,p} + s_{pp}}{n}} \right. ,$$

$$\left. \bar{X}_{p-1} - \bar{X}_p + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{s_{p-1\,p-1} - 2s_{p-1\,p} + s_{pp}}{n}} \right]$$

com coeficiente de confiança global $1-\alpha$.

Obs. - Esses intervalos só fazem sentido quando as variáveis são "do mesmo tipo".

Exemplo

Escores (notas) de $n = 87$ alunos

X_1 - nota de História

X_2 - Aptidão Verbal

X_3 - Ciência

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 527,74 \\ 54,69 \\ 25,13 \end{bmatrix} \quad S^* = \begin{bmatrix} 5691,34 & 600,51 & 217,25 \\ 600,51 & 126,05 & 23,37 \\ 217,25 & 23,37 & 23,11 \end{bmatrix}$$

Intervalos de confiança simultâneos para μ_1, μ_2 e μ_3 com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$.

$p = 3 \quad n = 87 \quad F_{3,84}(0,05) = 2,7$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha) = \frac{3(87-1)}{87-3} F_{3,84}(0,05) = \frac{3 \cdot 86}{84} \cdot 2,7 = 8,29$$

IC p/ μ_1

$$\left[527,74 - \sqrt{8,29}\sqrt{\frac{5691,34}{87}} \, , \, 527,74 + \sqrt{8,29}\sqrt{\frac{5691,34}{87}}\right]$$

$$[504,45 \, , \, 551,03]$$

IC p/ μ_2

$$\left[54,69 - \sqrt{8,29}\sqrt{\frac{126,05}{87}} \quad 54,69 + \sqrt{8,29}\sqrt{\frac{126,05}{87}}\right]$$

$$[51,22 \, , 58,16]$$

IC p/ μ_3

$$\left[25,13 - \sqrt{8,29}\sqrt{\frac{23,11}{87}} \, , \, 25,13 + \sqrt{8,29}\sqrt{\frac{23,11}{87}}\right] = [23,65 \, ; 26,61]$$

$$[23,65 \, , 26,61]$$

Princípio da União e Interseção

O teste $H_0: \mu = \mu_0$ para $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, μ e Σ desconhecidos
$H_a: \mu \neq \mu_0$

com estatística T^2 de Hotelling é obtido pelo método da RVG.

Pode no entanto ser construído pelo princípio da União e Interseção:

$Y = a'X \sim N(a'\mu, a'\Sigma a)$ para todo a' vetor linha p-dimensional, $a' \neq 0$.

$$\mu = \mu_0 \iff a'\mu = a'\mu_0 \quad \forall a$$

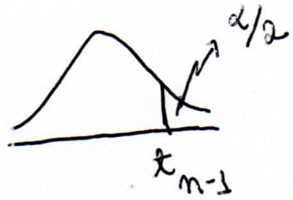
Podemos testar $\mu = \mu_0$ testando $H_0: a'\mu = a'\mu_0 \quad \forall a$

↳ teste p/o vetor de médias de Y

Teste t univariado

$$t = \frac{\bar{Y} - a'\mu_0}{\sqrt{\frac{a'S^*a}{n}}} \qquad \underbrace{\hat{Var}(\bar{Y}) = \hat{Var}(a'\bar{X})}_{\text{verificar}} = \frac{a'S^*a}{n}$$

R.A. $$\left| \frac{a'\bar{X} - a'\mu_0}{\sqrt{\frac{a'S^*a}{n}}} \right| \leq t_{n-1}(\alpha/2)$$



$$\iff t^2 = \left(\frac{a'\bar{X} - a'\mu_0}{\sqrt{\frac{a'S^*a}{n}}} \right)^2 \leq t^2_{n-1}(\alpha/2) \quad \forall a$$

$$\Longleftrightarrow \max_a \left(\frac{a'\bar{X} - a'\mu_0}{\sqrt{\frac{a'S^*a}{n}}} \right)^2 \leq t^2_{n-1}\left(\alpha/2\right)$$

$$\max_a \underbrace{\frac{n a'(\bar{X}-\mu_0)(\bar{X}-\mu_0)'a}{a'S^*a}}_{h(a)} \leq t^2$$

Lema (Johnson e Wishern, lema (2.50))

$B_{p\times p}$ p.d. e d vetor $p\times 1$ $\Rightarrow \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{(x'd)^2}{x'Bx} = d'B^{-1}d$

Tomando $x = a$ $d = \bar{X}-\mu_0$ e $B = S^*$

$\max h(a) = n(\bar{X}-\mu_0)' S^{*-1}(\bar{X}-\mu_0) \Rightarrow$

RA: $\underbrace{n(\bar{X}-\mu_0)' S^{*-1}(\bar{X}-\mu_0)}_{\text{Estatística } T^2 \text{ de Hotelling para testar } \mu=\mu_0} \leq K$

Sob H_0, $\dfrac{n-p}{(n-1)p} T^2 \sim F$ $\quad P(T^2 \geq K) = \alpha \Longleftrightarrow$

$$P\left(\frac{n-p}{(n-1)p} T^2 \geq \underbrace{\frac{n-p}{(n-1)p} K}_{F_c}\right) = \alpha$$