5. ROBUSTEZ DO DESEMPENHO

- **OBJETIVO**
  - Obter condições de desempenho na presença de erros de modelagem
- **DESEMPENHO ROBUSTO**
  - Acompanhamento de referência
  - Rejeição de perturbações
  - Rejeição do erro de medida
  - Limitação do esforço de controle
  - Erro estacionário
  - Compatibilidade do pré-filtro com a malha fechada
- **ERRO MULTIPLICATIVO**
  - Loop shaping : $|GK|$
  - H_∞ : S, T, KS
- **TEMPLATES**
  - QFT

5.1 - ACOMPANHAMENTO DO SINAL DE REFERÊNCIA

- Nominal:

$$\frac{1}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Robusto:

$$\frac{1}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

para todas as G_R permitidas

5.1.1 - INCERTEZA MULTIPLICATIVA

- G_R permitidas:

$$|\Delta_m(j\omega)| = \frac{|G_R(j\omega) - G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} \leq \ell_m(\omega)$$

- Assim:

$$G_R(j\omega) - G(j\omega) = \Delta_m(j\omega) \cdot G(j\omega) \Rightarrow$$

$$G_R(j\omega) = [1+\Delta_m(j\omega)]\, G(j\omega)$$

- Portanto:

$$\frac{1}{|1+[1+\Delta_m(j\omega)]\, G(j\omega) K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

ou: $|1+[1+\Delta_m(j\omega)]\, G(j\omega)K(j\omega)| \geq \dfrac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$

$$\left|1 + G(j\omega)K(j\omega) + \Delta_m(j\omega)\,G(j\omega)K(j\omega)\right| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

$$\left|\left[1+G(j\omega)K(j\omega)\right]\left[1 + \Delta_m(j\omega)\underbrace{\boxed{\frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)}}}_{T(j\omega)}\right]\right| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

$$\left|\left[1+G(j\omega)K(j\omega)\right]\left[1 + \Delta_m(j\omega)\,T(j\omega)\right]\right| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r) \quad (*)$$

- Mas:

  - planta nominal é uma das possíveis plantas "reais"

  - supondo $\delta_r(\omega) << 1 \quad (\omega \in \Omega_r)$

- Então:

$$\left|G(j\omega)K(j\omega)\right| >> 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Portanto:

$$T(j\omega) \simeq 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Podemos aproximar a desigualdade $(*)$:

$$\left|\left[1+G(j\omega)K(j\omega)\right]\left[1 + \Delta_m(j\omega)\right]\right| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Ou seja:

$$\left|1+G(j\omega)K(j\omega)\right|\left|1 + \Delta_m(j\omega)\right| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

MATÉRIA DATA

- Mas:

• $|1+\Delta_m(j\omega)| \geq 1-|\Delta_m(j\omega)|$ (I)

• $|\Delta_m(j\omega)| \leq \ell_m(\omega) \Rightarrow -|\Delta_m(j\omega)| \geq -\ell_m(\omega) \Rightarrow$

$1-|\Delta_m(j\omega)| \geq 1-\ell_m(\omega)$ (II)

• De (I) e (II):

$$|1+\Delta_m(j\omega)| \geq 1-\ell_m(\omega)$$

- Supondo $\ell_m(\omega) < 1$:

$$|1+\Delta_m(j\omega)| \geq 1-\ell_m(\omega) > 0$$

- Portanto, para que a última desigualdade da página anterior:

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)|\,|1+\Delta_m(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_r)$$

esteja garantida, é SUFICIENTE que:

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)|\,[1-\ell_m(\omega)] \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_r)$$

- Ou seja:

$$\boxed{|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)}} \quad (\omega \in \Omega_r)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ACOMPANHAMENTO DO SINAL DE REFERÊNCIA

• NOTAS

• Comparação com o caso nominal

Nominal:

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

Robusto:

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

Mas:

$$0 < \ell_m(\omega) < 1 \Rightarrow$$

$$0 > -\ell_m(\omega) > -1 \Rightarrow$$

$$1 > 1-\ell_m(\omega) > 0 \Rightarrow$$

$$\delta_r(\omega) > [1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\delta_r(\omega)} < \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)}$$

Conclusão:

Condição de robustez é mais severa que a nominal (como era de se esperar!)

• Forma é conveniente para projeto pois ℓ_m é o único conhecimento que se supõe disponível

• PARA "LOOP SHAPING"

- Partimos de

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)} \qquad (\omega\in\Omega_r)$$

- Deve valer também no caso nominal e, portanto,

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \qquad (\omega\in\Omega_r)$$

- Então, podemos aproximar:

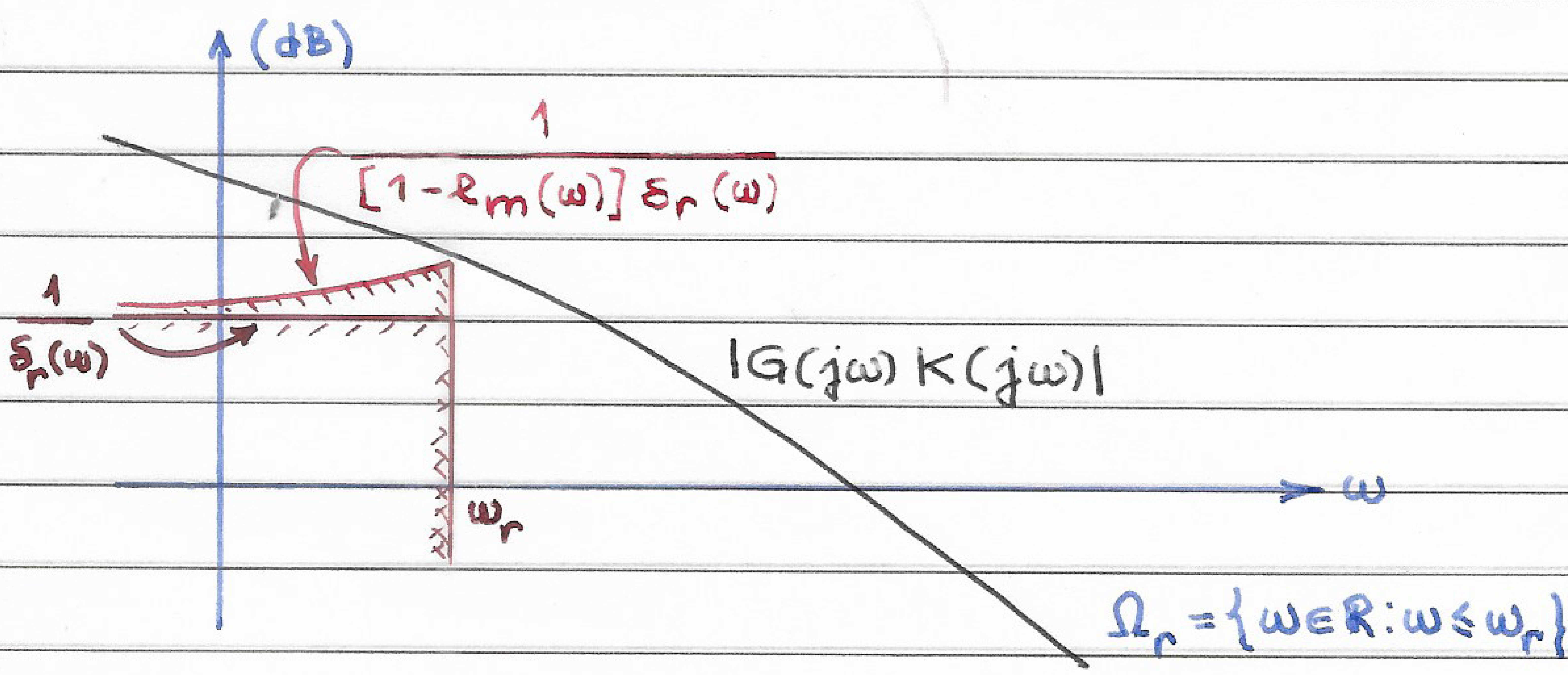
$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \simeq |G(j\omega)K(j\omega)| \qquad (\omega\in\Omega_r)$$

- Consequentemente:

$$\boxed{|G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)}} \qquad (\omega\in\Omega_r)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ACOMPANHAMENTO DO SINAL DE REFERÊNCIA ("LOOP SHAPING")

- Graficamente:



• PARA H_∞

- É imediato:

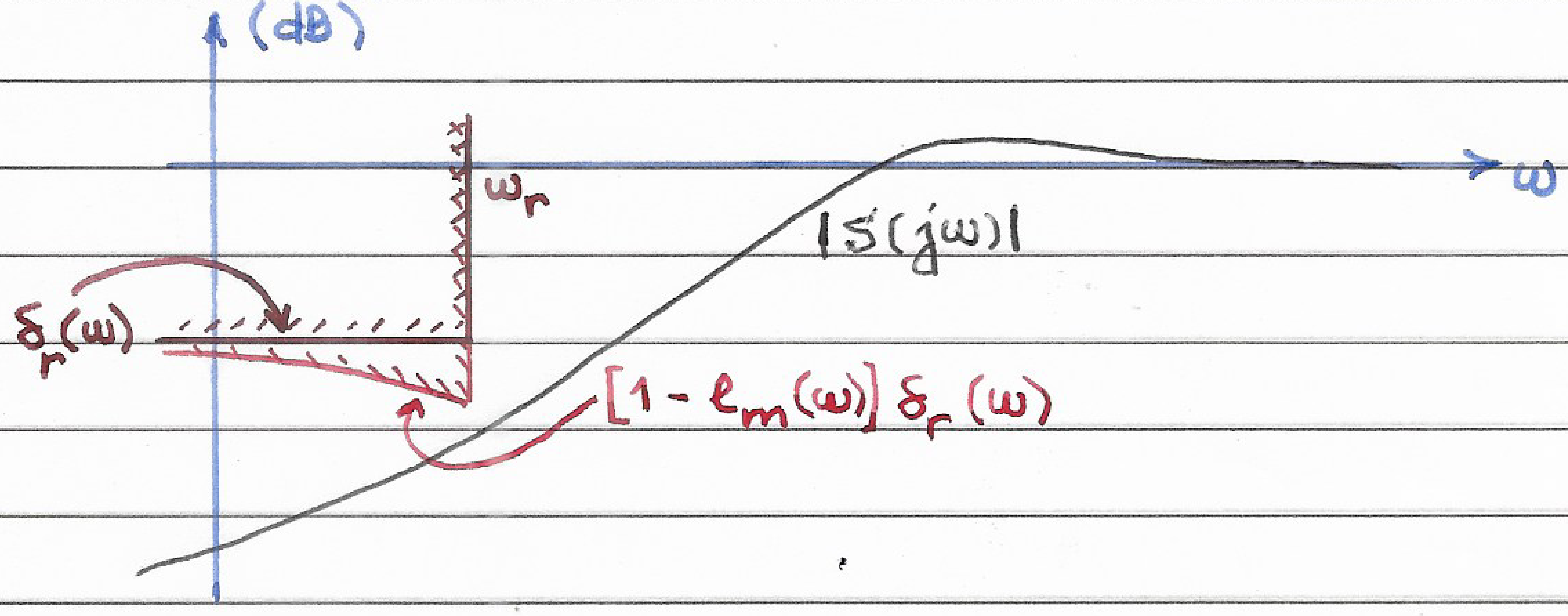
$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| = \frac{1}{|S(j\omega)|} \geq \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_r)$$

- Portanto:

$$\boxed{|S(j\omega)| \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ACOMPANHAMENTO DO SINAL DE REFERÊNCIA (H_∞)

- Graficamente:



• NOTA

- Ver nas Notas de Aula (pg. 59) a obtenção da Condição de Robustez do Acompanhamento do Sinal de Referência usando argumentos geométricos (mais intuitivo!)

5.1.2 - INCERTEZA REPRESENTADA POR TEMPLATES

- Nominal:

$$\frac{1}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Robusto:

$$\frac{1}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

para todas as G_R permitidas

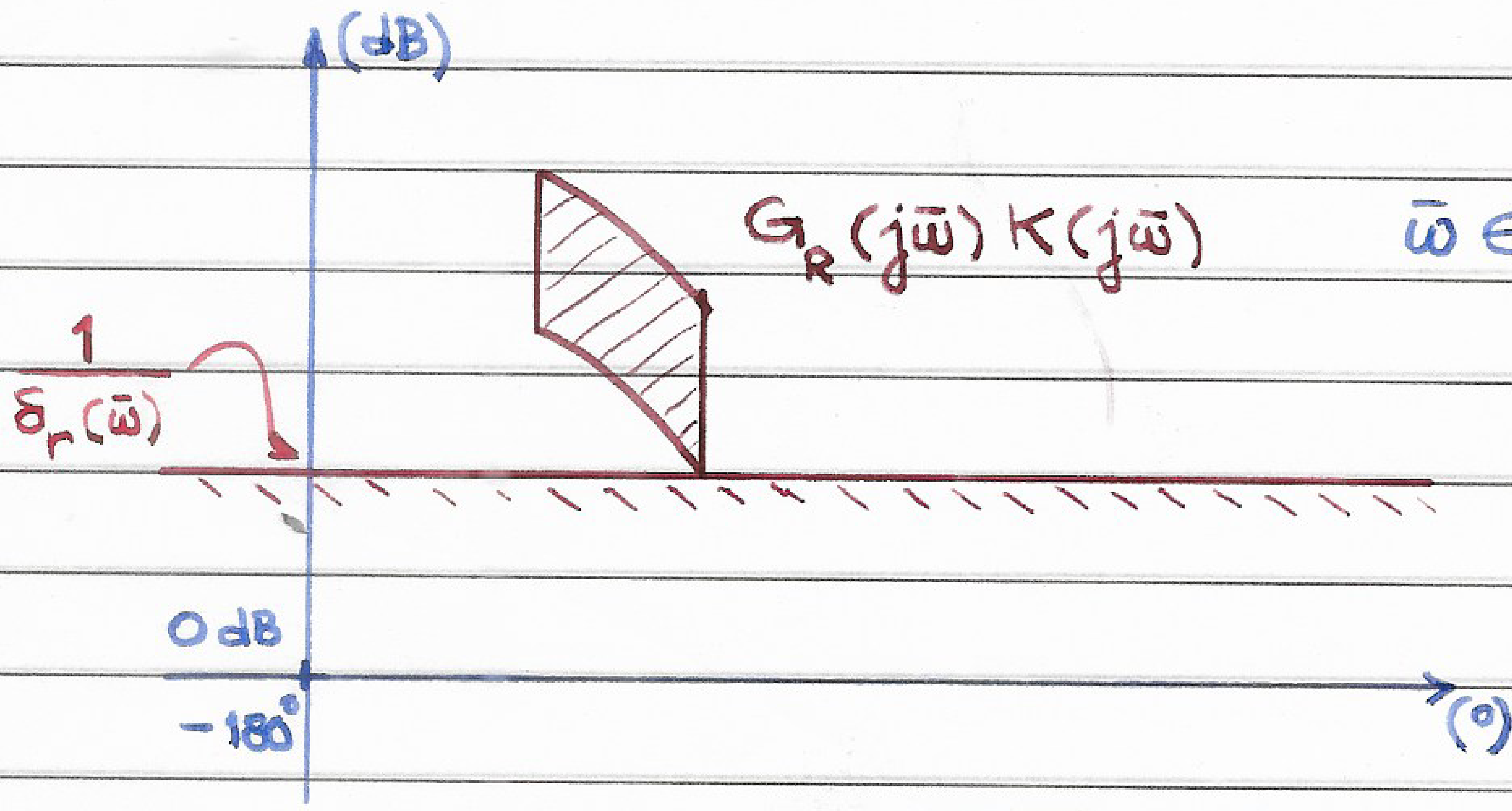
- Considerando $\delta_r(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_r)$:

$$|1+G_R(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \gg 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Aproxima-se:

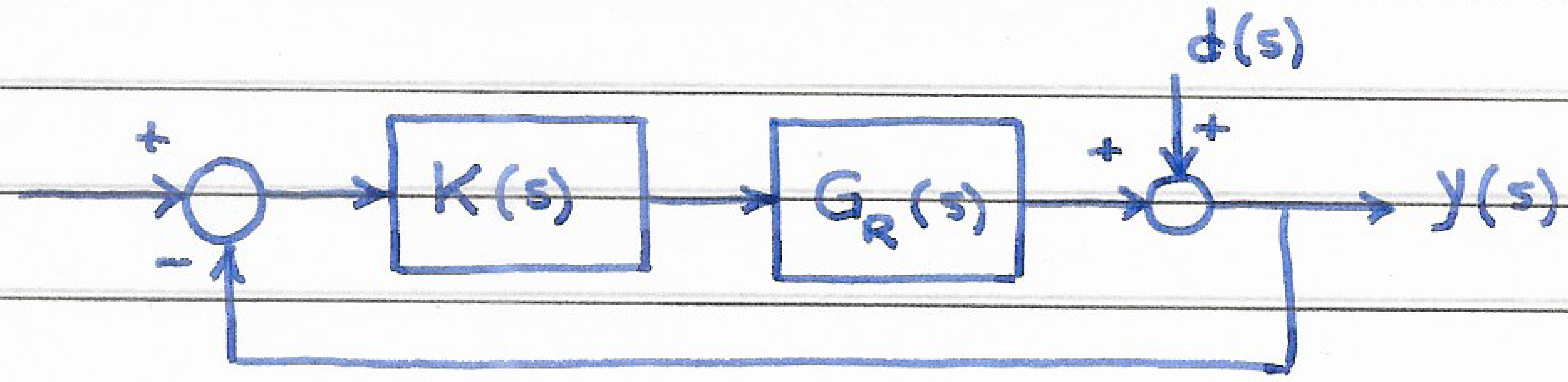
$$|G_R(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \gg 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Graficamente:



CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ACOMPANHAMENTO DO SINAL DE REFERÊNCIA (TEMPLATES)

5.2 - REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES



$$\frac{|y(j\omega)|}{|d(j\omega)|} \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d) \quad (\forall\, G_R \text{ admissível})$$

$$\frac{|y(j\omega)|}{|d(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

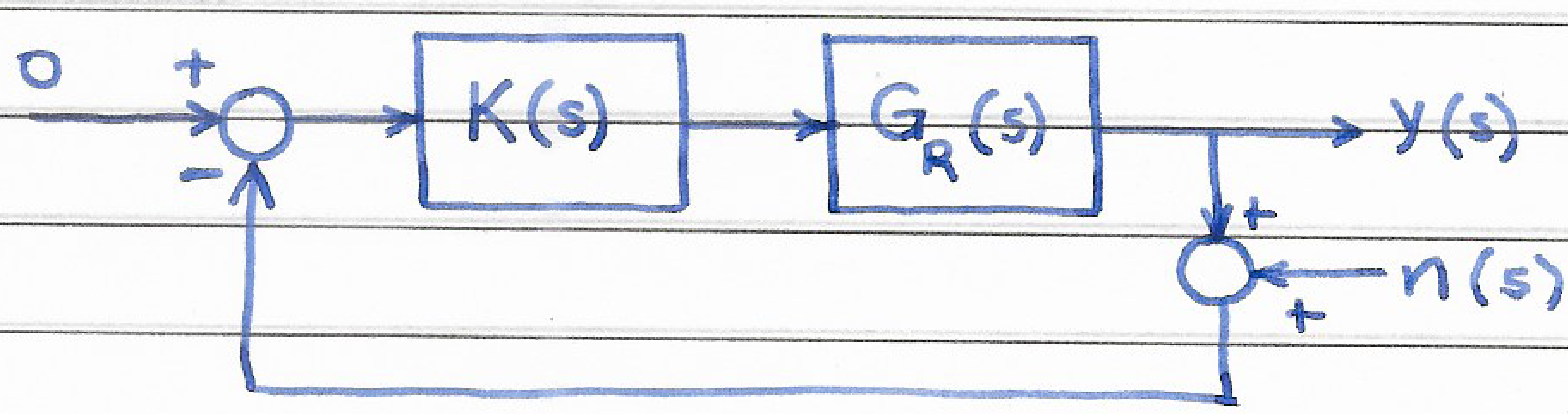
- Esta condição tem exatamente a mesma forma daquela vista p/ o acompanhamento do sinal de referência, a saber,

$$\frac{1}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Portanto, valem todos os resultados da seção 5.1, basta usar:

  - δ_d em lugar de δ_r
  - Ω_d " " " Ω_r

5.3 - REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA



- Objetivo:

$$\frac{|y(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = \frac{|G_R(j\omega)K(j\omega)|}{|1 + G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$(\forall G_R \text{ admissível})$

- Da mesma maneira que no caso nominal:

$$\left| \frac{1 + G_R(j\omega)K(j\omega)}{G_R(j\omega)K(j\omega)} \right| \geq \frac{1}{\delta_n(\omega)} \gg 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

tipicamente

$$\left| \frac{1}{G_R(j\omega)K(j\omega)} + 1 \right| \geq \frac{1}{\delta_n(\omega)} \gg 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

Aproximadamente:

$$\frac{1}{|G_R(j\omega)K(j\omega)|} \geq \frac{1}{\delta_n(\omega)} \gg 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

Ou seja:

$$\boxed{|G_R(j\omega)K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \ll 1} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$(\forall G_R \text{ admissível})$

MATÉRIA DATA 12.11

5.3.1 - INCERTEZA MULTIPLICATIVA

• LOOP SHAPING

- $|G_R(j\omega)\,K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$

para toda $G_R(j\omega)$ tal que

$$|\Delta_m(j\omega)| \leq \ell_m(\omega) \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

em que

$$\Delta_m(j\omega) = \frac{G_R(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)}$$

- Mas:

$$G_R(j\omega) = [1 + \Delta_m(j\omega)]\,G(j\omega)$$

- Assim:

$$\big|[1 + \Delta_m(j\omega)]\,G(j\omega)\,K(j\omega)\big| \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$$|1 + \Delta_m(j\omega)|\,|G(j\omega)\,K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \quad (*) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

- Porém:

$$|1 + \Delta_m(j\omega)| \leq 1 + |\Delta_m(j\omega)| \leq 1 + \ell_m(\omega) \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

- Portanto, para que $(*)$ se verifique, é suficiente que

$$[1 + \ell_m(\omega)]\,|G(j\omega)\,K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$$\boxed{|G(j\omega)\,K(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{1 + \ell_m(\omega)}} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA (LOOP SHAPING)

- **NOTAS**

- No caso nominal:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

e, no caso robusto:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{1+\ell_m(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

Portanto, o efeito da incerteza no modelo foi apenas modificar o 2º membro, tornando-o mais restritivo (o que era de se esperar!)

- Condição escrita na forma adequada para projeto:

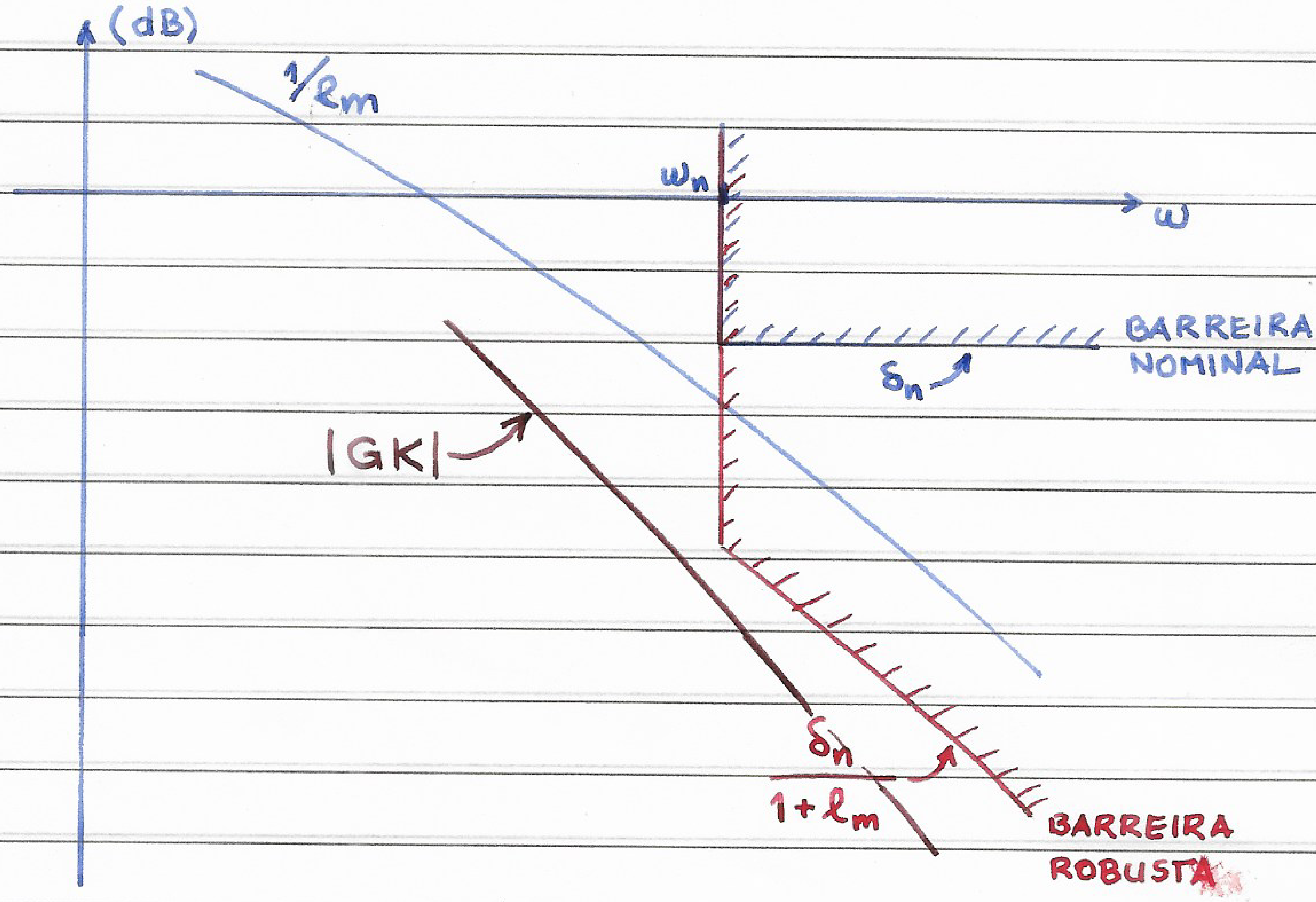
  - $G(j\omega)K(j\omega)$: malha nominal
  - $\delta_n(\omega)$: especificação
  - $\ell_m(\omega)$: informação sobre o erro de modelagem

- Forma aproximada:

  - Em geral $\ell_m(\omega) \gg 1$ para $\omega \in \Omega_n \Rightarrow$

$$\boxed{|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{\ell_m(\omega)}} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

- Graficamente (Loop Shaping)



- H_∞

– Para Loop Shaping:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \le \frac{\delta_n(\omega)}{1+l_m(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

– Para $\omega \in \Omega_n$, normalmente $l_m(\omega) \gg 1$.

Além disso, também em geral $\delta_n(\omega) \ll 1$.

Assim: $\dfrac{\delta_n(\omega)}{1+l_m(\omega)} \ll 1$

e, portanto,

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$