

Lista de exercícios - Relações, funções e suas equações

17 de maio de 2021

1. Dados os conjuntos

$$A = \{1, 3, 4\} \quad B = \{-2, 1\} \quad C = \{-1, 0, 2\},$$

represente pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

a) $A \times B$

d) $C \times A$

b) $B \times A$

e) $B \times B$

c) $A \times C$

f) $C \times C$

2. Sejam A, B, C conjuntos tais que $A \subset B \subset C$. Estabeleça as relações de inclusão entre os conjuntos $A \times A, A \times B, A \times C, B \times A, B \times B, B \times C, C \times A, C \times B$ e $C \times C$.

3. Seja A um conjunto tal que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subseteq A \times A$. Suponha que $A \times A$ tenha 9 elementos. Encontre todos os elementos do conjunto A^2 .

4. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja $R \subseteq A \times A$ a relação binária dada por

$$R = \{(a, b) \in A \times A : \text{mdc}(a, b) = 2\}.$$

a) Encontre todos os elementos de R e represente R no plano cartesiano.

b) Encontre o domínio e a imagem de R .

5. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 5\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} : -2 \leq y \leq 3\}$. Considere as relações $R, S \subseteq A \times B$ definidas por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow 2 \text{ divide } (x - y)$$

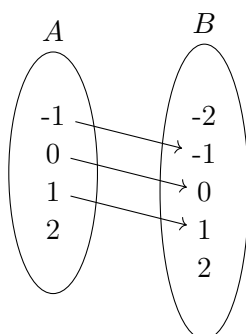
$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (x - 1)^2 = (y - 2)^2.$$

a) Encontre todos os elementos de R e S e represente as relações no plano cartesiano.

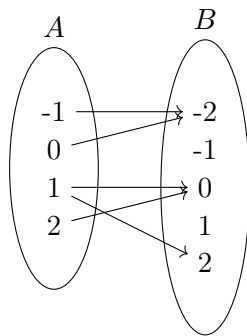
b) Encontre o domínio e a imagem das relações R e S .

6. Sejam $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Estabeleça se cada uma das relações abaixo define ou não uma função de A em B . Justifique.

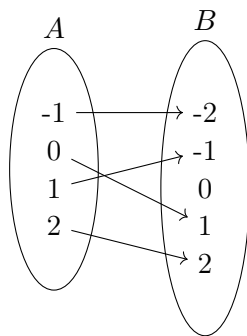
a) Relação 1



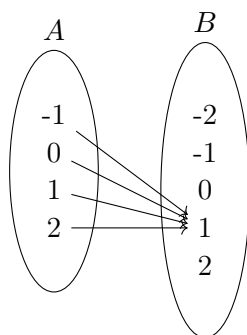
b) Relação 2



c) Relação 3



d) Relação 4



7. Encontre o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$

d) $p(x) = \sqrt{x-1}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$

e) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

h) $t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

f) $r(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$

i) $u(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x-3}$

8. Sejam $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \frac{4x-1}{2}$ definidas em \mathbb{R} . Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

a) $f(x) \geq g(x)$

b) $g(x) < h(x)$

c) $f(x) \geq h(x)$

9. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes inequações:

a) $(3x + 3) \cdot (5x - 3) > 0$

c) $(5 - 3x) \cdot (7 - 2x) \cdot (1 - 4x) \leq 0$

b) $(5x + 2) \cdot (2 - x) \cdot (4x + 3) > 0$

10. Resolva o sistema

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$$
$$xy = 12.$$

11. Determine os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

12. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

13. Sejam $ax^2 + bx + c$ função quadrática e $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ suas raízes. Mostre que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

14. Dentre todos os números reais cuja soma é 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

15. Resolva em \mathbb{R} as inequações:

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

b) $-x^2 + x + 6 > 0$

d) $x^2 + 3x + 7 > 0$

16. Resolva a inequação $(x^2 - x - 2) \cdot (-x^2 + 4x - 3) > 0$ em \mathbb{R} .

Gabarito

1. a) $A \times B = \{(1, -2), (1, 1), (3, -2), (3, 1), (4, -2), (4, 1)\}$

b) $B \times A = \{(-2, 1), (1, 1), (-2, 3), (1, 3), (-2, 4), (4, 1)\}$

c) $A \times C = \{(1, -1), (1, 0), (1, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 2), (4, -1), (4, 0), (4, 2)\}$

3. $A \times A = \{(1, 1), (1, 4), (1, 2), (4, 1), (4, 4), (4, 2), (2, 1), (2, 4), (2, 2)\}$

4. a) $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)\}$

b) $D(R) = Im(R) = \{2, 4, 6\}$

6. a) Não é função

b) Não é função

c) É função

d) É função

7. a) $D(f) = \mathbb{R}$

d) $D(p) = [1, \infty)$

g) $D(g) = \mathbb{R}$

8. a) $[-\frac{1}{5}, \infty)$

9. a) $(\frac{3}{5}, \infty) \cup (-\infty, -1)$

14. Os números (4, 4) somam 8 e maximizam o produto.