

Solução dos Exercícios

1 Aula - 12/04

1. Mostre que a densidade média e a velocidade média das partículas, calculada usando uma distribuição Maxwelliana, são:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = n_0; \quad \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{k_B T}{m}$$

Solução: Como a distribuição é Maxwelliana: $f(v_x) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left\{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}\right\}$, então:

$$n = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}\right\} dv_x$$

Tomando $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$ e $y^2 = \alpha v_x^2 \implies dy = \sqrt{\alpha} dv_x$, temos que:

$$n = n_0 \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \implies n = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}$$

Portanto:

$$\boxed{n = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = n_0} \tag{1}$$

Para a segunda parte, a expressão fica:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{n_0} n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp\left\{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}\right\} dv_x$$

Novamente, tomando $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x$$

Usando o truque: $-\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha v_x^2} = v_x^2 e^{-\alpha v_x^2}$ e, como α independe de v_x , podemos comutar a integral e a derivada parcial:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\alpha} \alpha^{-3/2} = \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

Enfim, como $\alpha = \frac{m}{2K_b T}$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{k_B T}{m} \quad (2)$$

2 Aula 14/04

1. O que acontece com a velocidade de deriva ExB quando o campo magnético tende a zero enquanto o campo elétrico permanece finito? Qual é a validade da expressão da deriva ExB?

Solução: Como $|\mathbf{v}_{E \times B}| = \frac{E}{B}$, para E constante e $B \rightarrow 0$, a princípio, $|\mathbf{v}_{E \times B}| \rightarrow \infty$. Porém, quando $v \approx c$, entramos no regime relativístico em que o momento linear agora é: $\mathbf{p} = m\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, em que $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Portanto, a relação da Força de Lorentz fica:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \left(\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Logo, temos mais um termo no lado esquerdo da equação. Como todas as relações derivadas em aula não tomam o momento relativístico (ou, equivalentemente, tomam a aproximação de baixas velocidades: $\gamma \approx 1$), então elas não valem no regime relativístico e, portanto, precisam ser refeitas contabilizando o termo $m \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v}$.

Portanto, a expressão vale desde que satisfaça:

$$|\mathbf{v}_{E \times B}| = \frac{E}{B} \ll c \quad (3)$$

2. (**Exercício 2.1 - Chen**) Compute r_L for the following cases if v_{\parallel} is negligible:

- (a) A 10-keV electron in earth's magnetic field of $5 \times 10^{-5} T$.
- (b) A solar wind proton with streaming velocity 300 km/s, $B = 5 \times 10^{-9} T$.
- (c) A 1-keV He^+ ion in the solar atmosphere near a sunspot where $B = 5 \times 10^{-2} T$
- (d) A 3.5-MeV He^{++} ash particle in an DT fusion reactor ($B = 8 T$)

Solução: Esse exercício é só uma aplicação numérica da fórmula do Raio de Larmor para diversas situações em que podemos tomar $v \approx v_{\perp}$.

$$r_L = \frac{m v_{\perp}}{|q| B}$$

Pegando os valores de massa e carga das partículas do enunciado e usando as relações $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ e $K = \frac{mv^2}{2}$, os resultados que se obtém:

- (a) $r_L = 6.75 \text{ m}$
- (b) $r_L = 626 \text{ km}$
- (c) $r_L = 0.183 \text{ m}$
- (d) $r_L = 3.38 \times 10^{-2} \text{ m}$

3. **(Exercício 2.2 - Chen)** In the TFTR (Tokamak Fusion Test Reactor) at Princeton, the plasma was heated by injection of 200-keV neutral deuterium atoms, which, after entering the magnetic field, are converted to 200-keV D ions ($A = 2$) by charge exchange. These ions are confined only if $r_L \ll a$, where $a = 0.6 \text{ m}$ is the minor radius of the toroidal plasma. Compute the maximum Larmor radius in a 5-T field to see if this is satisfied.

Solução: Esse exercício é do mesmo espírito do exercício anterior. Fazemos a conversão $\text{eV} \rightarrow \text{J}$ e supomos que $v \approx v_\perp$ para que: $r_L = \frac{mv_\perp}{|q|B}$, obtemos $v_\perp \approx 4.38 * 10^6 \text{ m/s}$ e $r_L \approx 0.01 \text{ m}$. Como a condição de confinamento para os íons é: $r_L \ll a = 0.6 \text{ m}$, nesse caso, ela é satisfeita: $r_L = 0.018 \text{ m} \ll 0.6 \text{ m} = a$

Alternativamente, se não tomarmos a aproximação v_\perp , temos:

$$\frac{mv_\perp^2}{2} = kT = \frac{2E}{3} \implies v_\perp = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 1.67 \times 10^{-27}}} = 3.57 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Então:

$$r_L = \frac{mv_\perp}{|q|B} = \frac{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 3.57 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 5} \approx 0.015 \text{ m}$$

O erro cometido na aproximação é da ordem de 1%, o que é bem pequeno. Portanto, não há problemas tomar a aproximação.

Obs: Agradeço ao Lucas Amaral pelo insight da outra forma de resolver o exercício e nossa discussão.

4. **(Exercício 2.3 - Chen)** An ion engine has a 1-T magnetic field, and a hydrogen plasma is to be shot out at an $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ velocity of 1000 km/s. How much internal electric field must be present in the plasma?

Solução: Mais um exercício numérico de aplicação de fórmula. Como $|\mathbf{v}_{E \times B}| = \frac{E}{B}$, temos que:

$$10^6 = \frac{E}{1} \implies \boxed{E = 10^6 \text{ V/m}} \quad (4)$$

5. (**Exercício 2.6 - Chen**) Suppose that a so-called Q-machine has a uniform field of 0.2 T and a cylindrical plasma with $K T_e = K T_i = 0.2 \text{ eV}$. The density profile is found experimentally to be of the form:

$$n = n_0 \exp\{\exp\{-r^2/a^2\} - 1\}$$

Assume the density obeys the electron Boltzmann relation: $n = n_0 \exp\{e\phi/k T_e\}$.

- Calculate the maximum $v_{E \times B}$ if $a = 1 \text{ cm}$.
- Compare this with v_g due to the Earth's gravitational field.
- To what value can B be lowered before the ions of Potassium ($A = 39, Z = 1$) have a Larmor radius equal to a ?

Solução:

- Esse exercício apresenta uma maior dificuldade, porque não está claro como determinaremos o campo elétrico \mathbf{E} . Nós iremos encontrar a expressão para \mathbf{E} por meio do potencial elétrico ϕ , tomando $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Como temos 2 expressões para a densidade e ambas são da forma $n = n_0 \exp\{f\}$, então:

$$\exp\{-r^2/a^2\} - 1 = e\phi/k T_e \implies \phi(r) = \frac{k T_e}{e} (\exp\{-r^2/a^2\} - 1)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{k T_e}{e} (\exp\{-r^2/a^2\} - 1) \\ \mathbf{E} &= \frac{2k T_e}{e} \frac{r}{a^2} \exp\{-r^2/a^2\} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

A velocidade de deriva máxima depende do máximo do campo elétrico, então:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{E}}{dr} \right|_{r=r_{max}} = 0 &\implies \frac{2k T_e}{e} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2r_{max}^2}{a^4} \right) \exp\{-r_{max}^2/a^2\} = 0 \\ &\implies \frac{1}{a^2} - \frac{2r_{max}^2}{a^4} = 0 \implies r_{max} = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

Dessa forma:

$$\mathbf{E}(r_{max}) = \frac{2k T_e}{e} \frac{1}{a\sqrt{2}} \exp\{-1/2\} \hat{\mathbf{r}}$$

Tomando $K T_e = 0.2 eV$ e $a = 0.01 m$ e fazendo as contas:

$$\mathbf{E}(r_{max}) \approx 17 \hat{\mathbf{r}} \implies |\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}|_{max} = \frac{E}{B} = \frac{17}{0.2}$$

$$\boxed{|\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}|_{max} = 85 m/s} \quad (5)$$

(b) Como $\mathbf{v}_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \implies |\mathbf{v}_g| = \frac{m g}{q B}$, para um íon (próton), temos que:

$$|\mathbf{v}_g| = \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 9.8}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.2} \implies \boxed{|\mathbf{v}_g| \approx 5.11 \times 10^{-7}} \quad (6)$$

Ou seja, algo em torno de 8 ordens de grandeza distante para um íon.

(c) Para um íon de Potássio, como o raio de Larmor é dado por: $r_L = \frac{m v_{\perp}}{|q| B}$ e assumimos que $v \approx v_{\perp}$: $K = \frac{m v_{\perp}^2}{2} = K T_e$, então:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2K T_e}{m}} \implies v_{\perp} \approx 9.9 \times 10^2 m/s$$

Então:

$$r_L = \frac{m v_{\perp}}{|q| B} = 0.2 \implies B = \frac{m v_{\perp}}{0.2 |q|} \implies \boxed{B = 0.04 T} \quad (7)$$

6. **(Exercício 2.7 - Chen)** An unneutralized electron beam has density $n_e = 10^{14} m^{-3}$ and radius $a = 1 cm$ and flows along a 2-T magnetic field. If \mathbf{B} is in the +z direction and \mathbf{E} is the electrostatic field due to the beam's charge, calculate the magnitude and direction of the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift at $r = a$.

Solução: De início, vamos fazer uma suposição: O feixe de elétrons é infinito na direção $\hat{\mathbf{z}}$. Pela simetria do problema, o campo elétrico só pode depender de r : $\mathbf{E} = E(r) \hat{\mathbf{r}}$. Então, pela Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Solução dos Exercícios

em que ρ é a densidade de cargas: $\rho = -e n_e \Theta(a-r)$ e Θ é a Função Degrau. Tomando um integral volumétrica de um cilindro centrado no eixo \hat{z} , raio $R > a$ e altura L , temos que:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV' = -\frac{e n_e}{\epsilon_0} \int_V \Theta(a-r') dV'$$

Aplicando o Teorema de Gauss no lado esquerdo:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}' = -\frac{e n_e}{\epsilon_0} \int_V \Theta(a-r') dV'$$

O elemento de superfície desse cilindro é: $d\mathbf{S}' = R d\phi' dz' \hat{\mathbf{r}}$ e o elemento de volume: $dV' = r' dr' d\phi' dz'$. Como o campo elétrico só está na direção $\hat{\mathbf{r}}$ e só depende de r , então ele é constante em toda a superfície. No lado direito, usando a propriedade da integral da Função Degrau:¹

$$E(R) 2\pi R L = -\frac{e n_e}{\epsilon_0} \frac{2\pi a^2 L}{2} + E_0$$

Como o contorno é $\mathbf{E}(r \rightarrow \infty) = 0 \implies E_0 = 0$. Enfim:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e n_e a^2}{2 \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}$$

Logo, para $r = a = 0.01 \text{ m}$, $n_e = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ e $B = 2T$:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{E(a)}{2} \underbrace{(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}})}_{=-\hat{\theta}}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \approx 4520 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{\theta}} \quad (8)$$

Portanto, a única forma de mantermos um feixe de elétrons coeso/confinado numa região cilíndrica de raio a , é fazer com que estes tenham uma rotação na direção θ . Essa rotação, quando inserida na expressão da força de Lorentz, causa uma força magnética que balanceia à força elétrica repulsiva entre os elétrons.

-
7. **(Exercício 2.1 - Bittencourt)** - Calculate the cyclotron frequency and the cyclotron radius for:

¹Lembrando que: $\int_0^\infty dr' r' \Theta(a-r') = \int_0^a dr' r' = \frac{a^2}{2}$

-
- (a) An electron in the Earth's ionosphere at 300 km altitude, where the magnetic flux density $B \approx 0.5 \times 10^{-4}$ tesla, considering that the electron moves at the thermal velocity (kT/m), with $T = 1000$ K, where k is Boltzmann's constant.
- (b) A 50 MeV proton in the Earth's inner Van Allen radiation belt at about 1.5 R_e (where $R_e = 6370$ km is the Earth's radius) from the center of the Earth in the equatorial plane, considering $B \approx 10^{-5}$ tesla.
- (c) A 1 MeV electron in the Earth's outer Van Allen radiation belt at about 4 R_e from the center of the Earth in the equatorial plane, where $B \approx 10^{-7}$ tesla.
- (d) A proton in the solar wind with a streaming velocity of 100 km/s, in a magnetic flux density $B \approx 10^{-9}$ tesla.
- (e) A 1 MeV proton in a sunspot region of the solar photosphere, considering $B \approx 0.1$ tesla
-

Solução: Mesma coisa que o exercício 2.1 do Chen, aplicação de fórmula da frequência ciclotrônica e raio de Larmor. Aplicando as fórmulas para cada caso:

- (a) $\Omega_c \approx 8.8 \times 10^6 s^{-1}$ e $r_L \approx 0.02$ m
- (b) $\Omega_c \approx 9.6 \times 10^2 s^{-1}$ e $r_L \approx 101$ km
- (c) $\Omega_c \approx 1.76 \times 10^4 s^{-1}$ e $r_L \approx 34$ km
- (d) $\Omega_c \approx 0.09 s^{-1}$ e $r_L \approx 10^3$ km
- (e) $\Omega_c \approx 9.6 \times 10^6 s^{-1}$ e $r_L \approx 1.4$ m
-

8. (**Exercício 2.2 - Bittencourt**) For an electron and an oxygen ion O^+ in the Earth's ionosphere, at 300 km altitude in the equatorial plane, where $B \approx 0.5 \times 10^{-4}$ tesla, calculate:

- (a) The gravitational drift velocity \mathbf{v}_g
- (b) The gravitational current density \mathbf{J}_g , considering $n_e = n_i = 10^{12} m^{-3}$.

Assume that \mathbf{g} is perpendicular to \mathbf{B} .

Solução: Vamos considerar o íon de oxigênio mais comum ($A=16$). A 300 km de altura, a aceleração da gravidade é:

$$\mathbf{g} = \frac{GM}{r^2} (-\hat{\mathbf{r}}) = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{(6.67 * 10^6)^2} (-\hat{\mathbf{r}}) \implies \mathbf{g} \approx -8.95 \hat{\mathbf{r}}$$

Solução dos Exercícios

(a) Então, no Equador, o campo magnético é $\mathbf{B} = B\hat{\theta}$. Dessa forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_g &= \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \\ (\mathbf{v}_g)_e &= -\frac{m_e \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{|e| B^2} \implies (\mathbf{v}_g)_e \approx 1.01 \times 10^{-6} \underbrace{(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})}_{=\hat{\phi}} \\ (\mathbf{v}_g)_{ion} &= \frac{A m_p \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{|e| B^2} \implies (\mathbf{v}_g)_{ion} \approx 0.03 \underbrace{(-\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})}_{=-\hat{\phi}}\end{aligned}$$

Enfim:

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{v}_g)_e &\approx 1.01 \times 10^{-6} \text{ m/s } \hat{\phi} \\ (\mathbf{v}_g)_{ion} &\approx -0.03 \text{ m/s } \hat{\phi}\end{aligned}} \quad (9)$$

(b) Como:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_g &= \frac{1}{\delta V} = \sum_k q_k (v_g)_k \\ \implies \mathbf{J}_g &= -|e| n_e (\mathbf{v}_g)_e + |e| n_i (\mathbf{v}_g)_{ion} = |e| n_e \left((\mathbf{v}_g)_{ion} - (\mathbf{v}_g)_e \right)\end{aligned}$$

Como $(v_g)_e \ll (v_g)_{ion}$, então:

$$\boxed{\mathbf{J}_g \approx e n_e (\mathbf{v}_g)_{ion} \approx -4.8 \times 10^{-9} \text{ A } \hat{\phi}} \quad (10)$$

9. **(Exercício 2.3 - Bittencourt)** - Consider a particle of mass m and charge q moving in the presence of constant and uniform electromagnetic fields given by $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}}$ and $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Assuming that initially ($t = 0$) the particle is at rest at the origin of a Cartesian coordinate system, show that it moves on the cycloid:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{E_0}{B_0} \left[t - \frac{1}{\Omega_c} \sin(\Omega_c t) \right] \\ y(t) &= \frac{E_0}{B_0 \Omega_c} [1 - \cos(\Omega_c t)]\end{aligned}$$

Plot the trajectory of the particle in the $z = 0$ plane for $q > 0$ and for $q < 0$, and consider the cases when $v_\perp > v_{E \times B}$, $v_\perp = v_{E \times B}$, and $v_\perp < v_{E \times B}$, where v_\perp denotes the particle cyclotron motion velocity and $v_{E \times B}$ is the electromagnetic drift velocity.

Solução dos Exercícios

Solução: Partindo da relação da Força de Lorentz em coordenadas cartesianas:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B_0 \quad (11)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} (E_0 - v_x B_0) \quad (12)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \implies v_z = v_0 = 0; \quad (13)$$

Tomando mais uma derivada temporal na primeira equação:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{q B_0}{m} \frac{dv_y}{dt} \implies \frac{d^2 v_x}{dt^2} = - \left(\frac{q B_0}{m} \right)^2 v_x + \frac{q^2 B_0}{m^2} E_0$$

Resolvendo a parte homogênea:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{q B_0}{m} \right)^2 v_x = 0 \implies (v_x)_{homog} = A \sin(\Omega_c t + \phi) + B$$

em que $\Omega_c = \frac{qB}{m}$. A parte não-homogênea resulta em: $(v_x)_{inhomog} = \frac{E_0}{B_0}$. Então:

$$v_x(t) = A \sin(\Omega_c t + \phi) + \frac{E_0}{B_0} \quad (14)$$

Usando a equação (11) para obter v_y :

$$v_y = \frac{1}{\Omega_c} \frac{dv_x}{dt} \implies v_y(t) = A \cos(\Omega_c t + \phi) \quad (15)$$

Aplicando as condições de contorno:

$$v_y(0) = 0 \implies A \cos(\phi) = 0 \implies \phi = \pi/2$$

$$v_x(0) = 0 \implies A \sin(\pi/2) + \frac{E_0}{B_0} = 0 \implies A = -\frac{E_0}{B_0}$$

Então:

$$v_x(t) = \frac{E_0}{B_0} [1 - \sin(\Omega_c t + \pi/2)] = \frac{E_0}{B_0} [1 - \cos(\Omega_c t)]$$

$$v_y(t) = -\frac{E_0}{B_0} \cos(\Omega_c t + \pi/2) = \frac{E_0}{B_0} \sin(\Omega_c t)$$

Como $v_i = \frac{dx_i}{dt}$, então:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E_0}{B_0} [1 - \cos(\Omega_c t)] \implies x(t) = \frac{E_0}{B_0} \left[t - \frac{1}{\Omega_c} \sin(\Omega_c t) \right] + x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{E_0}{B_0} \sin(\Omega_c t) \implies y(t) = -\frac{E_0}{B_0 \Omega_c} \cos(\Omega_c t) + y_0$$

Como a condição de contorno é $x(0) = y(0) = 0 \implies x_0 = 0; y_0 = \frac{E_0}{B_0 \Omega_c}$, então temos a seguinte equação de órbita:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{E_0}{B_0} \left[t - \frac{1}{\Omega_c} \sin(\Omega_c t) \right] \\ y(t) &= \frac{E_0}{B_0 \Omega_c} [1 - \cos(\Omega_c t)] \end{aligned}} \quad (16)$$

Obs: O exercício comenta sobre fazer análises de v_{\perp} em relação a $v_{E \times B}$, mas nesse exercício v_{\perp} está determinado pelas condições de contorno da velocidade, em que: $v_{\perp} = v_{E \times B} = \frac{E_0}{B_0}$.

10. **(Exercício 2.4 - Bittencourt)** In general the trajectory of a charged particle in crossed electric and magnetic fields is a cycloid. Show that, if $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$, and $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}}$, then for $v_0 = E_0/B_0$ the path is a straight line. Explain how this situation can be exploited to design a mass spectrometer.

Solução: Novamente, descrevendo a relação da Força de Lorentz em coordenadas cartesianas para campos $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}}$:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} v_y B_0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m} (E_0 - v_x B_0) \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Se $v = v_0 \hat{\mathbf{x}}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= \frac{q}{m} v_y B_0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m} (E_0 - v_0 B_0) \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Caso inicialmente $v_0 = \frac{E_0}{B_0}$, então $\frac{dv_y}{dt} = 0 \implies \frac{dv_0}{dt} = 0$. Com isso, as velocidades são constantes e o trajeto é uma linha reta.

O interesse disso num espectrômetro de massa é selecionar uma partícula de interesse. Por exemplo, caso eu tenha um conjunto de partículas diversas com cargas elétricas

Solução dos Exercícios

não-nulas e eu quero selecionar um tipo de partícula, eu ajusto a intensidades dos campos de forma que

$$v_0 = \frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Sabendo previamente a massa dessa partícula, eu ajusto um acelerador de partículas de forma que todas elas saiam com energia E . Dessa forma, as partículas que não tiverem a massa da partícula de interesse terão $v \neq v_0$ e, portanto, $\frac{dv_y}{dt} \neq 0$. Assim, essas outras partículas farão uma trajetória curva e somente a partícula de interesse que sai com $v = v_0$ fará uma trajetória retilínea. Assim, eu consigo descobrir se uma determinada partícula faz parte de um experimento. Isso pode ser melhor explorado, colocando alvos em diversas posições de forma que partículas com determinadas razões q/m atinjam.

3 Aula 19/04

1. Mostre que partículas podem escapar da garrafa magnética pelos "gargalos" caso o ângulo de ataque no centro do dispositivo, α_0 , seja:

$$\alpha_0 < \sin^{-1} \left[\left(\frac{B_0}{B_m} \right)^{1/2} \right] = \sin^{-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v} \right) \Big|_{z=0}$$

Solução: Vimos na aula de 14/04, que o módulo do momento magnético é:

$$|\mathbf{m}| = \frac{W_{\perp}}{B_0} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B_0} = \frac{m v^2 \sin^2 \alpha}{2 B_0}$$

lembrando que α é o ângulo de ataque da partícula na órbita. Como $|\mathbf{m}|$ é conservado, então:

$$|\mathbf{m}_0| = |\mathbf{m}|$$

em que $|\mathbf{m}_0|$ é o momento magnético num ponto da garrafa sem ser os gargalos, e $|\mathbf{m}|$ é o momento no gargalo. Então:

$$\frac{m v^2 \sin^2 \alpha_0}{2 B_0} = \frac{m v^2 \sin^2 \alpha}{2 B} \implies \sin^2 \alpha_0 = \frac{B_0}{B} \sin^2 \alpha$$

Como queremos que haja reflexão no gargalo, então $v_{\parallel} = 0 \implies \alpha = \pi/2$. Logo:

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{B_0}{B} \implies \boxed{\alpha_0 = \sin^{-1} \left[\left(\frac{B_0}{B} \right)^{1/2} \right]} \quad (17)$$

Solução dos Exercícios

Muito bem, para B_0 e B definidos, caso o ângulo de ataque inicial seja $\alpha' < \alpha_0$ isso implica em um $\alpha'' < \pi/2$, ou seja, a partícula ainda possui velocidade paralela ao campo não-nula ($v_{\parallel} = v \cos \alpha'' \neq 0$) e, portanto, ela atravessa o gargalo da garrafa.

Caso agora, caso o ângulo de ataque inicial seja $\alpha' > \alpha_0$, em tese, teríamos que ter $\sin^2 \alpha'' > 1$, o que não é possível. O que acontece é que a reflexão acontece antes do gargalo, assim a partícula ainda continua confinada.

Enfim, o confinamento das partículas acontece caso o ângulo de ataque satisfaça a relação: $\alpha' \geq \alpha_0$.

2. Mostre que as derivas de curvatura e gradiente do campo magnético podem ser combinadas (que suposição deve ser feita?):

$$\mathbf{v}_{CG} = -\frac{m}{q B_0^3} \left(v_{0,\parallel}^2 + \frac{v_{0,\perp}^2}{2} \right) (\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0)$$

Solução: Como a deriva do ∇B e da curvatura de \mathbf{B} é:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\nabla B} &= -\frac{m v_{0,\perp}^2}{2q B_0^3} \nabla B_0 \times \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{v}_{curv} &= -\frac{m v_{0,\parallel}^2}{q B_0^4} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{CG} &= \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_{curv} \\ &= -\frac{m}{q B_0^3} \left[\frac{v_{0,\perp}^2}{2} \nabla B_0 + v_{0,\parallel}^2 (\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \right] \times \mathbf{B}_0 \end{aligned}$$

Supondo que o campo magnético seja irrotacional no espaço, então pela identidade $(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - \frac{1}{2} \nabla B_0^2 = 0 \implies (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} \nabla B_0^2$. Então, $\nabla B_0 = (\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$:

$$\boxed{\mathbf{v}_{CG} = -\frac{m}{q B_0^3} \left[\frac{v_{0,\perp}^2}{2} + v_{0,\parallel}^2 \right] \nabla B_0 \times \mathbf{B}_0} \quad (18)$$

3. Suponha que o campo magnético terrestre possa ser aproximado pelo campo de um

Solução dos Exercícios

dipolo com $B_0 = 3.12 \times 10^{-5} T$:

$$B_r = -2 B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \cos \theta$$

$$B_\theta = -B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \sin \theta$$

$$R_E = 6370 \text{ km}$$

Descreva a trajetória de cargas à $h = 300 \text{ km}$ e calcule a densidade de corrente.

Solução: A partícula sofrerá um drift composto pelo ∇B e pela curvatura do campo, logo usaremos a fórmula do último exercício. Como $B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2}$, então:

$$B(h, \theta) = B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

$$\nabla B = \hat{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta}$$

$$= -\frac{3 B_0}{R_E} \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^4 \left[\left(\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \right) \hat{r} + \left((3 \cos^2 \theta + 1)^{-1/2} \cos \theta \sin \theta \right) \hat{\theta} \right]$$

em que $r = R_E + h \implies \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial h}$. Enfim:

$$\nabla B = -\frac{3 B_0}{R_E} \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^4 (3 \cos^2 \theta + 1)^{-1/2} \left[(3 \cos^2 \theta + 1) \hat{r} + \cos \theta \sin \theta \hat{\theta} \right]$$

Então:

$$\nabla B \times \mathbf{B} = \frac{3 B_0^2}{R_E} \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^7 (3 \cos^2 \theta + 1)^{-1/2} \left[(3 \cos^2 \theta + 1) \sin \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta \right] \hat{\phi}$$

$$\implies \mathbf{v}_{CG} = -\frac{3m B_0^2}{q R_E B^3} \left[\frac{v_{0,\perp}^2}{2} + v_{0,\parallel}^2 \right] \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^7 (3 \cos^2 \theta + 1)^{-1/2} \left[(\cos^2 \theta + 1) \sin \theta \right] \hat{\phi}$$

Finalmente:

$$\boxed{\mathbf{v}_{CG} = -\frac{3m}{q R_e B_0} \left[\frac{v_{0,\perp}^2}{2} + v_{0,\parallel}^2 \right] \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^{-2} (3 \cos^2 \theta + 1)^{-2} \left[(\cos^2 \theta + 1) \sin \theta \right] \hat{\phi}}$$

(19)

Então as cargas derivam no sentido de rotação da Terra, em que elétrons derivam para o Leste, enquanto os íons para o Oeste. Como a Terra funciona como uma garrafa magnética em que os gargalos são os pólos, a trajetória das partículas é um movimento

Solução dos Exercícios

longitudinal entre os pólos combinado com uma deriva latitudinal para o Leste, para elétrons, e para o Oeste, para íons.

Vamos aqui supor 2 pontos: $v_{0,\perp} = v_{0,\parallel} = v_0$ para as 2 espécies e que estamos no Equador ($\theta = \pi/2$), ou seja, toda dependência angular se torna 1.

$$\mathbf{v}_{CG} = -\frac{9m v_0^2}{2q R_e B_0} \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^{-2} \hat{\phi}$$

Usando os dados de energia para os íons e elétrons do exercício 2.8 do Chen: íons de 1 eV e elétrons de 30 keV, em que a $v_{\parallel} = v_{\perp} = v_0 \implies v^2 = 2v_0^2$.

$$(v_0^2)_{ion} = \frac{E_{ion}}{m_{ion}} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{m_{ion}}$$

$$(v_0^2)_e = \frac{E_e}{m_e} = \frac{3 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{m_e}$$

Então a velocidade de deriva fica:

$$(\mathbf{v}_{CG})_e = \frac{27 \times 1.6 \times 10^{-15}}{2e R_e B_0} \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^{-2} \hat{\phi}$$

$$(\mathbf{v}_{CG})_{ion} = -\frac{9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{2e R_e B_0} \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^{-2} \hat{\phi}$$

Colocando o resto das informações:

$$(\mathbf{v}_{CG})_e \approx 744.75 \text{ m/s } \hat{\phi} \qquad (\mathbf{v}_{CG})_{ion} = -0.02 \text{ m/s } \hat{\phi}$$

Portanto, a corrente gerada será de:

$$\mathbf{J}_{CG} = \frac{1}{\delta V} (-e (\mathbf{v}_{CG})_e + e (\mathbf{v}_{CG})_{ion})$$

Como $\frac{1}{\delta v} = n = 1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$, então:

$$\boxed{\mathbf{J}_{CG} = -10^{12} \times 1.6 \times 10^{-19} (744.75 + 0.02) \hat{\phi} \approx -1.2 \times 10^{-4} \text{ A/m}^2 \hat{\phi}} \quad (20)$$

4. **(Exercício 2.8 - Chen)** Suppose the earth's magnetic field is $3 \times 10^{-5} \text{ T}$ at the equator and falls off as $1/r^3$, as for a perfect dipole. Let there be an isotropic population of 1-eV protons and 30-keV electrons, each with density $n = 10^7 \text{ m}^{-3}$ at $r = 5$ earth radii in the equatorial plane.

Solução dos Exercícios

- (a) Compute the ion and electron ∇B drift velocities
 (b) Does an electron drift eastward or westward?
 (c) How long does it take an electron to encircle the Earth?
 (d) Compute the ring current density in A/m^2

Solução:

- (a) Sabendo que a deriva ∇B é dada por:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{m v_{\perp}^2}{2q} \frac{\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^3}$$

Como o campo no Equador é $3 \times 10^{-5} T$ e decai com $1/r^3$, então:

$$\mathbf{B}_0(r) = \frac{3 \times 10^{-5}}{\left(\frac{r}{R}\right)^3} \hat{\boldsymbol{\theta}} \implies B_0(r) = \frac{3 \times 10^{-5}}{\left(\frac{r}{R}\right)^3} \implies \nabla B_0 = -\frac{9 \times 10^{-5}}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \hat{\mathbf{r}}$$

Portanto, para $r = 5R$, em que $R = 6.371 \times 10^6$ é o raio da Terra:

$$\begin{aligned} B_0(r = 5R) &= \frac{3 \times 10^{-5}}{5^3} = 2.4 \times 10^{-7} \\ \nabla B_0 &= -\frac{9 \times 10^{-5}}{5^4 \times 6.371 \times 10^6} \hat{\mathbf{r}} = 2.26 \times 10^{-14} \hat{\mathbf{r}} \\ \frac{m v_{\perp}^2}{2} \approx \frac{m v^2}{2} = E &\left\{ \begin{array}{l} \implies \frac{m v_e^2}{2} = E_e = 30 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} = 4.8 \times 10^{-15} J \\ \implies \frac{m v_p^2}{2} = E_p = 1 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.6 \times 10^{-19} J \end{array} \right. \end{aligned}$$

Com todos os valores, temos que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{\nabla B})_e &= -\frac{4.8 \times 10^{-15}}{-1.6 \times 10^{-19}} \frac{2.26 \times 10^{-14}}{(2.4 \times 10^{-7})^2} \underbrace{(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})}_{=\hat{\boldsymbol{\phi}}} \\ (\mathbf{v}_{\nabla B})_p &= -\frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} \frac{2.26 \times 10^{-14}}{(2.4 \times 10^{-7})^2} \underbrace{(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})}_{=\hat{\boldsymbol{\phi}}} \end{aligned}$$

Enfim:

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathbf{v}_{\nabla B})_e &\approx 11870 m/s \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ (\mathbf{v}_{\nabla B})_p &\approx -0.39 m/s \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}} \quad (21)$$

- (b) Como o elétron vai na direção $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, então ele deriva na direção leste;

- (c) Tomando somente o drift, o elétron faz um movimento circular de raio $r = 5R = 3.1855 \times 10^7 m$ com velocidade de deriva $11870 m/s$, então ele leva:

$$v_{\nabla B} = \frac{2\pi 5R}{\Delta t} \implies \boxed{\Delta t = \frac{10\pi R}{v_{\nabla B}} = 16861 s} \quad (22)$$

- (d) Usando a fórmula para a corrente gerada por um drift:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\nabla B} &= \frac{1}{\delta V} \sum_i q_i (\mathbf{v}_{\nabla B})_i = -en (\mathbf{v}_{\nabla B})_e + en (\mathbf{v}_{\nabla B})_p \\ &= -1.6 \times 10^{-19} \times 10^7 (11870 + 0.39) \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{J}_{\nabla B} \approx -1.87 \times 10^{-8} A/m^2 \hat{\phi}} \quad (23)$$

5. (**Exercício 2.9 - Chen**) An electron lies at rest in the magnetic field of an infinite straight wire carrying a current I . At $t = 0$, the wire is suddenly charged to a positive potential ϕ without affecting I . The electron gains energy from the electric field and begins to drift.

- (a) Draw a diagram showing the orbit of the electron and the relative directions of \mathbf{B} , $\mathbf{v}_{E \times B}$, $\mathbf{v}_{\nabla B}$ and \mathbf{v}_{curv} .
- (b) Calculate the magnitudes of these drifts at a radius of $1 cm$ if $I = 500 A$, $\phi = 460 V$, and the radius of the wire is $1mm$. Assume that ϕ is held at $0 V$ on the vacuum chamber walls $10 cm$ away.

Solução: Esse exercício demanda uma imagem para melhor entendermos o que está acontecendo:

Solução dos Exercícios

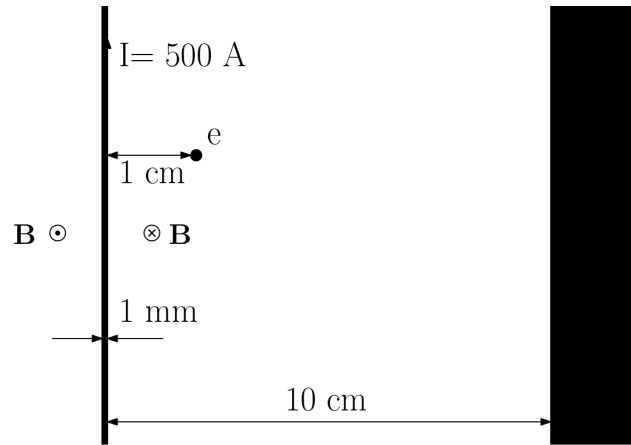


Figure 1: Disposição do problema com os dados do item (b)

- (a) Quando o fio ficar eletrizado, pela simetria do fio, o campo eletrostático \mathbf{E} será da forma $\mathbf{E}(r) = E(r) \hat{\mathbf{r}}$. Pelo mesmo argumento, o campo magnético é da forma $\mathbf{B}(r) = B(r) \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Então a deriva $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ será na direção $\hat{\mathbf{z}}$.

Como a direção da deriva $\mathbf{v}_{\nabla B}$ é na direção $\nabla B \times \mathbf{B}$ e \mathbf{B} só depende de r e está na direção $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, então a direção da deriva será $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{z}}$. Como a fórmula tem o sinal de -, então a deriva $\mathbf{v}_{\nabla B}$ aponta para $-\hat{\mathbf{z}}$.

A deriva devido a curvatura é nula, pois, a partícula inicialmente não se movimenta na direção $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Como as outras derivas não estão na direção do campo, logo: $\mathbf{v}_{\text{curv}} = 0$.

Então nesse caso, $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ e $\mathbf{v}_{\nabla B}$ competirão. Mas $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ se sobrepõe por causa da Força de Lorentz.

Vamos analisar o movimento em 4 momentos:

- Inicialmente, devido a atração eletrostática, o elétron se movimenta na direção $-\hat{\mathbf{r}}$, assim como se movimenta na direção $\hat{\mathbf{z}}$ devido às derivas.
- Então, uma vez que a partícula começa a se mover cada vez com mais velocidade na direção $-\hat{\mathbf{r}}$, por causa do campo elétrico, então $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ então o elétron sofre uma aceleração na direção $-\mathbf{e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \implies \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{z}}$. Assim, o elétron ganha mais velocidade nessa direção.
- Conforme o elétron ganha velocidade na direção $\hat{\mathbf{z}}$, ele começa acelerar na direção $\hat{\mathbf{r}}$, devido a $-\mathbf{e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \implies -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}}$. Portanto, começa a competir com a força eletrostática e ganha dela, quando a velocidade na direção $\hat{\mathbf{z}}$ fica grande.
- Conforme a velocidade na direção radial fica positiva ($\hat{\mathbf{r}}$), o elétron começa a acelerar na direção $-\mathbf{e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \implies -\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}}$, então a partícula começa a freiar nessa direção.
- Logo, conforme a velocidade na direção $\hat{\mathbf{z}}$ fica menor, a aceleração $-\mathbf{e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \implies -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}}$ fica menor, então o campo eletrostático volta a se

Solução dos Exercícios

sobrepor e a partícula começa a freiar na direção \hat{r} , chegando na coordenada r original. Então, depois de chegar no repouso, ela volta a fazer o movimento como no primeiro item. (Lembrando que a elétron não chega a se movimentar na direção $-\hat{z}$, porque tem o drift constante devido ao gradiente de B e $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$)

Logo, a partícula deve fazer começar a oscilar em $\pm\hat{r}$, enquanto deriva na direção \hat{z}

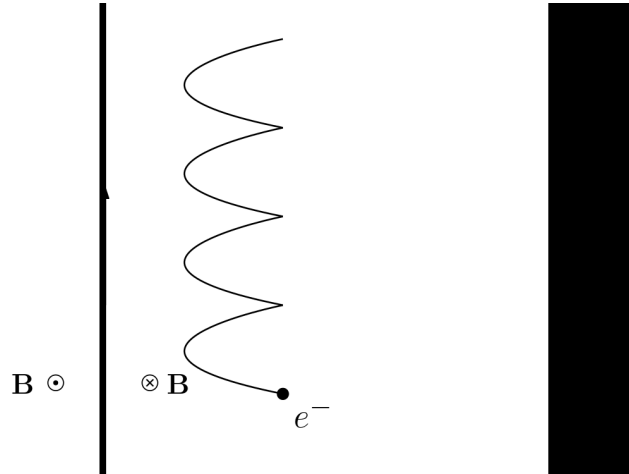


Figure 2: Esboço da trajetória da partícula nesse problema

- (b) Para calcular a deriva $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$, precisamos de \mathbf{E} . Em coordenadas cilíndricas, o potencial elétrico ϕ é da forma:

$$\phi(r) = A \ln r + B$$

Como sabemos que na casca do fio: $\phi(1 \times 10^{-3}) = 460 \text{ V}$ e na parede, a 10 cm do fio: $\phi(1 \times 10^{-1}) = 0$, então:

$$\phi(1 \times 10^{-1}) = A \ln 0.1 + B = 0 \implies B = -A \ln 0.1$$

$$\phi(1 \times 10^{-3}) = A(\ln 0.001 - \ln 0.1) = 460 \implies A = \frac{460}{\ln 0.01}$$

Então:

$$\phi(r) = \frac{460}{\ln 0.01} \ln \left(\frac{r}{0.1} \right)$$

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{460 \times 0.1}{\ln 0.01 r} \times \frac{1}{0.1} \implies E(r) \approx \frac{100}{r}$$

Como a partícula está a 1 cm do fio, então: $E(0.01) = 10^4 \text{ V/m}$

Solução dos Exercícios

Já o campo magnético, pela Lei de Àmpere:

$$\int_s \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{\pi 0.01^2} \int_s I \Theta(0.01 - r) dS = \mu_0 I$$

em que s é a superfície de um círculo de raio r . Usando o Teorema de Stokes:

$$\int_s \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r B(r)$$

Assim: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Colocando o valor para $r = 10^{-2} m$, $I = 500 A$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T.m/A$, temos que:

$$B(0.01) = \frac{10^3 \times 10^{-7}}{10^{-2}} = 0.01 T$$

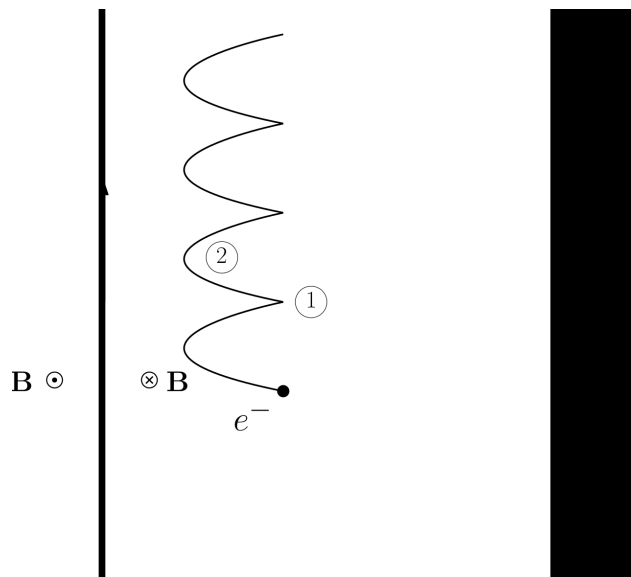
Então, o módulo da velocidade de deriva que a carga sofre devido ao $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$:

$$\boxed{|v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}| = \frac{E}{B} = 10^6 m/s} \quad (24)$$

Para a deriva $\mathbf{v}_{\nabla B}$, temos que:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{m v_{\perp}^2}{2q} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3}$$

Para determinar $\mathbf{v}_{\nabla B}$, vamos analisar o movimento em 2 pontos:



Solução dos Exercícios

Sabemos que o movimento na direção \hat{z} é composto pelo movimento ciclotrônico + deriva $|v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}|$. Ponto 1, $v_z = 0$, mas:

$$v_z = V_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} + v_{\perp} \cos(\Omega_c t) = 0$$

Como esse ponto é o mínimo do movimento ciclotrônico, então $\cos \Omega_c t = -1 \implies v_{\perp} = v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$. No ponto 2, esse é o máximo do movimento ciclotrônico, então $\cos \Omega_c t = 1 \implies v_z = 2v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$

Para sustentar essa argumentação, vamos analisar a variação de energia cinética entre os pontos. A distância entre os pontos é, aproximadamente, $2r_L$, em que estamos supondo que a órbita é aproximadamente circular. Então, pelo teorema trabalho-energia, o ganho de energia entre os 2 pontos é dado pelo trabalho do campo elétrico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (v_{\perp} + v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}})^2 &= 2q E r_L = 2q E \frac{m v_{\perp}}{q B} = m v_{\perp} \frac{E}{B} = 2m v_{\perp} v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \\ \implies v_{\perp}^2 + 2v_{\perp} v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} + v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}^2 &= 4v_{\perp} v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \implies (v_{\perp} - v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}})^2 = 0 \implies v_{\perp} = v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \end{aligned}$$

Ou seja, em média, a velocidade transversal do movimento ciclotrônico é igual à velocidade de deriva devido ao $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Com isso, de volta a fórmula de $v_{\nabla B}$:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{m v_{\perp}^2}{2q} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3} =$$

Então, para $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \implies \nabla B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \hat{r} \implies \nabla B(r = 0.01) = -1 T/m$,
 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{9.1 \times 10^{-31} \times (-1) \times (10^6)^2}{2 \times (-1.6 \times 10^{-19}) \times (0.01)^2} \underbrace{\hat{r} \times \hat{\theta}}_{=\hat{z}} \approx -2.84 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{z} \quad (25)$$

6. **(Exercício 2.11 - Chen)** A plasma with an isotropic velocity distribution is placed in a magnetic mirror trap with mirror ratio $R_m = 4$. There are no collisions, so the particles in the loss cone simply escape, and the rest remain trapped. What fraction is trapped?

Solução: Como o ângulo máximo para que as partículas escapem é:

$$\alpha_0 < \sin^{-1} \left[\left(\frac{B_0}{B_m} \right)^{1/2} \right] = \sin^{-1} \left[\left(\frac{1}{R_m} \right)^{1/2} \right]$$

Solução dos Exercícios

Para $R_m = 4$, então:

$$\alpha_0 < \sin^{-1} \frac{1}{2} \implies \alpha_0 < \frac{\pi}{6}$$

Como a distribuição da velocidade é isotrópica, então elas estão igualmente distribuídas pelo ângulo π (lembrando que α é o ângulo a partir do eixo z , equivalentemente o ângulo θ das coordenadas esféricas). Como temos 2 espelhos, então todas as partículas cujo ângulo de ataque seja $< \pi/6$ ou $> 5\pi/6$ escaparão, logo a fração que fica confinada é:

$$\boxed{\frac{4\pi/6}{\pi} = 4/6} \tag{26}$$

7. **(Exercício 3.2 - Bittencourt)** Verify if there is any drift velocity for a charged particle in a magnetic field given by

$$\mathbf{B} = B_y(x)\hat{\mathbf{y}} + B_0\hat{\mathbf{x}}$$

where $B_y(x)$ and $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ are very small quantities. Does this field satisfy the Maxwell equation $\nabla \times \mathbf{B} = 0$?

Solução: Pelo formato do campo, a deriva de curvatura e de ∇B é:

$$B = \sqrt{B_y(x)^2 + B_0^2}$$

Como $B_y \ll B_0$:

$$B = B_0 \sqrt{1 + \left(\frac{B_y}{B_0}\right)^2} \approx B_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{B_y}{B_0}\right)^2\right)$$

Então:

$$\nabla B = \frac{B_y}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} \implies \nabla B \times \mathbf{B} = \frac{B_y^2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{\mathbf{z}}$$

Como $B_y(x)$ e $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ são pequenos, $B_y \ll B_0$ e $\frac{\partial B_y}{\partial x} \ll B_0$, então $\frac{B_y^2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \approx 0$. Logo, a deriva devido ao ∇B e à curvatura é praticamente 0.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{\mathbf{z}}$$

Como $\frac{\partial B_y}{\partial x} \ll 1$, então $\nabla \times \mathbf{B} \approx 0$. Se quisermos ser rigorosos, esse campo viola a condição $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ por muito pouco.

8. (**Exercício 3.5 - Bittencourt**) Consider the magnetic mirror system shown in Fig. 20. Suppose that the axial magnetic field is given by

$$B(z) = B_0 [1 + (z/a_0)^2]$$

where B_0 and a_0 are positive constants, and that the mirroring planes are given by $z = -z_m$ and $z = z_m$.

- (a) For a charged particle trapped in this mirror system, show that the z component of the particle velocity is given by

$$v_{\parallel}(z) = \left(\frac{2|\mathbf{m}| B_0}{m} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{z_m}{a_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{a_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

- (b) The average force acting on the particle guiding center, along the z axis, is given by

$$\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle = -|\mathbf{m}| \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) \hat{z}$$

Show that the particle performs a simple harmonic motion between the mirroring planes, with a period given by

$$T = 2\pi a_0 \left(\frac{m}{2|\mathbf{m}| B_0} \right)^{1/2}$$

- (c) If the motion of the particle is to be limited to the region $|z| < z_m$, what restriction must be imposed on the total energy and on the magnetic moment?

Solução:

- (a) Sabemos que num sistema de garrafa magnética, a velocidade é constante:

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$$

Então, escolhendo 2 pontos em que as $z = \pm z_m$ e um z arbitrário, temos que:

$$(v_{\perp}^2)_{z_m} + (v_{\parallel}^2)_{z_m} = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$$

Como as partículas estão confinadas, nos espelhos, $(v_{\parallel})_{z_m} = 0$ e $|\mathbf{m}| = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \implies v_{\perp}^2 = \frac{2|\mathbf{m}|B}{m}$, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{2|\mathbf{m}|B(z_m)}{m} &= \frac{2|\mathbf{m}|B(z)}{m} + v_{\parallel}^2 \\ \frac{2|\mathbf{m}|B_0}{m} \left[\left(\frac{z_m}{a_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{a_0} \right)^2 \right] &= v_{\parallel}^2 \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

Enfim:

$$v_{\parallel}(z) = \left(\frac{2|\mathbf{m}| B_0}{m} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{z_m}{a_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{a_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

(b) Usando a expressão dada:

$$\langle F_{\parallel} \rangle = -|\mathbf{m}| \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) \hat{z} = -\frac{2|\mathbf{m}| B_0}{a_0^2} z$$

Então, pela Segunda Lei de Newton:

$$\langle F_{\parallel} \rangle = m \ddot{z} \implies \ddot{z} = -\frac{2|\mathbf{m}| B_0}{a_0^2 m} z$$

Essa é a equação do oscilador harmônico cuja frequência $\Omega = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{2|\mathbf{m}| B_0}{m}}$. Portanto, o período do movimento é:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{m}{2|\mathbf{m}| B_0}} \quad (28)$$

(c) Para as partículas presas, como a força magnética não realiza trabalho, então a energia total será constante e, como vimos em aula, o momento magnético também se conserva.

9. **(Exercício 3.6 - Bittencourt)** Consider a toroidal magnetic field, as shown in Fig. 21.

(a) Show that the magnetic flux density along the axis of the torus is given by

$$\mathbf{B}(r) = B_a \frac{a}{r} \hat{\Phi}$$

where B_a denotes the magnitude of \mathbf{B} at radial distance $r = a$

- (b) In what direction is the gradient drift associated with the radial variation of \mathbf{B}_ϕ ? Examine qualitatively the type of charge separation that occurs. Neglect the effect of the magnetic field line curvature.
- (c) If \mathbf{E} denotes the induced electric field due to charge separation, in what direction is the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift?
- (d) Show that it is not possible to confine a plasma in a purely toroidal magnetic field, because of the gradient drift and the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift.

Solução:

- (a) Usando coordenadas cilíndricas e pela simetria do problema, o campo é da forma $\mathbf{B}(r) = B_\phi(r)\hat{\phi}$. Pela Lei de Ampère:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\phi) = \mu_0 J_z = 0 \implies B_\phi(r) = \frac{A}{r}$$

Como queremos que o campo tenha valor B_a em $r = a$, então:

$$\boxed{\mathbf{B}(r) = B_a \left(\frac{a}{r}\right) \hat{\phi}} \quad (29)$$

- (b) Como ∇B terá direção \hat{r} , devido a $B = B_\phi(r)$, \mathbf{B} tem direção $\hat{\phi}$ e a velocidade de deriva ∇B tem a sua direção definida por $\nabla B \times \mathbf{B}$, então a deriva terá direção para \hat{z} . Como a fórmula depende da carga, logo pela expressão, os elétrons vão derivar para \hat{z} , enquanto os íons vão derivar para $-\hat{z}$. Ou seja, teremos uma separação de cargas.
- (c) O campo elétrico induzido terá direção $-\hat{z}$, devido a deriva dos elétrons para \hat{z} e dos íons para $-\hat{z}$. Dessa forma, a direção da deriva devido ao $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ será para a direção \hat{r} .
- (d) Como as partículas sofrerão uma deriva vertical, devido ao ∇B , e também uma deriva radial pelo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, as partículas não serão confinadas, porque após um certo tempo, elas irão atingir as paredes do reator. Por isso, somente um campo toroidal não é suficiente para confinar o plasma, é necessário introduzir o campo poloidal de forma a compensar as derivas.

Obs: O exercício não considera a deriva devido a curvatura. Mas fica como uma indagação, qual é a direção dessa deriva???

4 Aula 26/04

- (Exercício 2.14 - Chen) No aquecimento do plasma por compressão adiabática, a invariância de μ requer $K T_\perp$ aumentar conforme \mathbf{B} aumenta. Todavia, o campo magnético não pode acelerar as partículas devido a Força de Lorentz ($q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) ser sempre perpendicular à velocidade. Como as partículas ganham energia?

Solução: Conforme \mathbf{B} cresce, a Lei de Faraday prevê um campo elétrico. Esse campo elétrico irá acelerar as partículas, transferindo energia para as partículas.

Solução dos Exercícios

2. **(Exercício 2.19 - Chen)** Um plasma uniforme é criado numa câmara toroidal com um sessão transversal quadrada, como na figura. O campo magnético é gerado por uma corrente I , ao longo do eixo de simetria. As dimensões são $a = 1 \text{ cm}$, $R = 10 \text{ cm}$. O plasma é Maxwelliano com $kT = 100 \text{ eV}$ e $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Não há campo elétrico.

- (a) Desenhe a órbita para íons e elétrons com velocidade $v_{\parallel} = 0$ derivando no campo magnético não-uniforme.
- (b) Calcule a taxa de acúmulo de cargas (em Coulombs por segundo) em toda parede superior da câmara devido às derivas $v_{\nabla B}$ e v_{curv} . O campo magnético no centro da câmara é de 1 T e você pode usar a aproximação de razão de aspecto grande ($R \gg a$), quando necessário.

Solução: Bem, lembrando que o campo gerado por um fio infinito é:

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

- (a) Como as deriva são dadas por:

$$v_{\nabla B} = -\frac{\mu}{q} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} \qquad v_{curv} = -\frac{m v_{\parallel}^2}{q} \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B^4}$$

Como $v_{\parallel} = 0$, não temos deriva devido à curvatura, portanto as partículas irão derivar na direção $\nabla B \times \mathbf{B}$. Como ∇B está na direção $-\hat{r}$ e \mathbf{B} na direção $\hat{\phi}$, então os elétrons derivam para a direção $-\hat{z}$, enquanto os íons derivam na direção \hat{z} .

Portanto as órbitas será uma composição de um movimento vertical com um circular, igual à imagem do slide 4 da aula do dia 19/04.

- (b) Aqui vamos usar a aproximação de razão de aspecto grande para supor que o campo magnético e o seu gradiente no plasma são um valor único para todo ele: $B(R)$ e $\nabla B(R)$. Além disso, vamos supor que $kT_{\parallel} = kT_{\perp} = kT = 100 \text{ eV}$. Como o plasma é Maxwelliano, então a velocidade é isotrópica. Então:

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times I}{2\pi \times 0.1} = 1 \implies I = 5 \times 10^5 \text{ A}$$

$$\nabla B(r) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \hat{r}$$

$$\implies \nabla B(R) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \hat{r} = -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^5}{2\pi \times 0.1^2} \hat{r} = -10 \hat{r}$$

$$\frac{m v_{\parallel}^2}{2} = \frac{kT}{2} \implies m v_{\parallel}^2 = 50 \times 1.6 \times 10^{-19} = 8 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Solução dos Exercícios

Como o momento magnético é dado por:

$$\begin{aligned}\mu &= |\boldsymbol{\mu}| = \frac{m v_{\perp}^2}{2 B_0} \\ \frac{m v_{\perp}^2}{2} &= KT = 100 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.6 \times 10^{-17} \\ \Rightarrow \mu &= \frac{1.6 \times 10^{-17}}{2} \Rightarrow \mu = 8.0 \times 10^{-18}\end{aligned}$$

O termo $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ é dado por:

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \right) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}}_{=-\hat{r}} \\ \Rightarrow (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \Big|_{r=R} &= -\frac{1}{R} \hat{r} = -10 \hat{r}\end{aligned}$$

Portanto, colocando os valores para elétrons e prótons:

$$\begin{aligned}v_{\nabla B} &= -\frac{\mu}{q} \frac{\nabla B(R) \times \mathbf{B}(R)}{B^2(R)} & v_{curv} &= -\frac{m v_{\parallel}^2}{q} \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B^4} \\ (v_{\nabla B})_e &= \frac{8 \times 10^{-18}}{1.6 \times 10^{-19}} (-10) \hat{z} = 500 (-\hat{z}) & (v_{curv})_e &= \frac{1.6 \times 10^{-17}}{1.6 \times 10^{-19}} (-10) \hat{z} = 10^3 (-\hat{z}) \\ (v_{\nabla B})_p &= \frac{8 \times 10^{-18}}{1.6 \times 10^{-19}} (-10) \hat{z} = 500 (\hat{z}) & (v_{curv})_p &= \frac{1.6 \times 10^{-17}}{1.6 \times 10^{-19}} (-10) \hat{z} = 10^3 (\hat{z})\end{aligned}$$

Portanto a velocidade de deriva das partículas é 1500 m/s . Essa taxa de acúmulo é a corrente devido às derivas. Como só estamos interessados na corrente que chega na parede superior, portanto só nos interessa os prótons:

$$\boxed{J = n_p e ((v_{\nabla B})_p + (v_{curv})_p) = 10^{19} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1500 = 2.4 \text{ kA}} \quad (30)$$

3. **(Exercício 2.20 - Chen)** Suponha um campo magnético ao longo do eixo de um espelho magnético é dado por $B_z = B_0(1 + \alpha^2 z^2)$

- Se um elétron em $z = 0$ tem velocidade $v^2 = 3v_{\parallel}^2 = 1.5v_{\perp}^2$, qual é o valor de z em que o elétron é refletido?
- Escreva a equação de movimento do centro de rotação na direção paralela ao campo.
- Mostre que o movimento é senoidal e calcule sua frequência.

- (d) Calcule a corrente longitudinal invariante J correspondente ao movimento.

Solução:

- (a) Numa garrafa magnética, sabemos que o momento magnético é constante, portanto:

$$\frac{m(v_{\perp})_i^2}{2B_0} = \frac{m(v_{\perp})_f^2}{2B}$$

No momento de reflexão $v = v_{\perp}$. Em $z = 0$, $v^2 = 1.5 v_{\perp}^2 \implies v_{\perp}^2 = 2v^2/3$. Então:

$$\frac{v^2}{3B_0} = \frac{v^2}{2B_0(1 + \alpha^2 z^2)} \implies 1 + \alpha^2 z^2 = \frac{3}{2} \implies z = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

- (b) Como:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \langle F_{\parallel} \rangle = -|\mathbf{m}| \frac{dB}{dz}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{2B_0 |\mathbf{m}| \alpha^2}{m} z} \quad (31)$$

- (c) Essa equação é uma equação de oscilador harmônico, cuja resposta é:

$$z(t) = A \sin(\omega t); \quad \omega = \alpha \sqrt{\frac{2B_0 |\mathbf{m}|}{m}} \quad (32)$$

- (d) Como $v_{\parallel} = \frac{dz}{dt}$:

$$v_{\parallel} = \omega A \cos(\omega t)$$

Como a partícula está restrita entre $-A$ e A , então, a corrente invariante será:

$$J = \int_{-A}^A v_{\parallel} dz$$

Mas podemos trocar a variável de integração $z \rightarrow t \implies dz = A\omega \cos(\omega t) dt$, os limites de integração viram $\frac{\pi}{2\omega}$. Logo:

$$J = (A\omega)^2 \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos^2(\omega t) dt$$

Solução dos Exercícios

Integrando:

$$J = \frac{\pi A^2 \omega}{2} = \frac{\pi A^2 \alpha}{2} \sqrt{\frac{2 B_0 |\mathbf{m}|}{m}} \quad (33)$$

4. **(Exercício 4.11 - Bittencourt)** Para um elétron com velocidade inicial $v_0 \hat{\mathbf{x}}$ e posição inicial $x_0 \hat{\mathbf{x}}$ sob um campo elétrico $\mathbf{E} = \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{x}}$, mostre que a velocidade é dada por:

$$v(t) = v_0 - \frac{eE}{m_e} \int_0^t \cos(kx - \omega t') dt'$$

Usando método perturbativo, em que para a menor ordem $\mathbf{E} = 0$, mostre que:

$$v(t) = v_0 - \frac{eE}{m_e(kv_0 - \omega)} [\sin[kx_0 + (kv_0 - \omega)t] - \sin kx_0]$$

Solução: Pela Força de Lorentz na direção $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m_e} E \cos(kx - \omega t) \implies v(t) = v_0 - \frac{eE}{m_e} \int_0^t \cos(kx - \omega t') dt' \quad (34)$$

Aplicando um método perturbativo para x : $x = x_0 + v_0 t$, temos que:

$$\begin{aligned} \cos(kx - \omega t) &\rightarrow \cos(kx_0 + (kv_0 - \omega)t) \\ \cos(kx_0 + (kv_0 - \omega)t) &= \cos(kx_0) \cos((kv_0 - \omega)t) - \sin(kx_0) \sin((kv_0 - \omega)t) \end{aligned}$$

Logo:

$$v(t) = v_0 - \frac{eE}{m_e} \left[\cos(kx_0) \int_0^t \cos((kv_0 - \omega)t') dt' - \sin(kx_0) \int_0^t \sin((kv_0 - \omega)t') dt' \right]$$

Como ele fala que, para o termo de menor ordem, $\mathbf{E} = 0 \implies \cos(kx - \omega t)|_{x=x_0; t=0} = \cos(kx_0) = 0$, portanto, o primeiro termo se anula. Enfim:

$$v(t) = v_0 - \frac{eE}{m_e} \frac{\sin(kx_0)}{(kv_0 - \omega)} [\cos((kv_0 - \omega)t) - 1]$$

Podemos reescrever $\sin(kx_0) \cos((kv_0 - \omega)t) = \sin[kv_0 + (kv_0 - \omega)t]$, então:

$$v(t) = v_0 - \frac{eE}{m_e(kv_0 - \omega)} \{ \sin[kv_0 + (kv_0 - \omega)t] - \sin(kv_0) \} \quad (35)$$

5 Aula 28/04

1. Mostre, a partir desse resultado (momento magnético é invariante), que o fluxo magnético através de uma órbita ciclotrônica, $\Phi = B\pi\rho^2$, também é um invariante adiabático.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} B\pi\rho^2 = 0$$

Solução: Como $\frac{d|m|}{dt} = 0$, $|m| = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B}$ e $v_{\perp} = \Omega_c r_c$:

$$\frac{d|m|}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m r_c^2 q^2 B^2}{2B m^2} \right) = \frac{q^2}{2m} \frac{d}{dt} (r_c^2 B) = 0 \implies \frac{d}{dt} (r_c^2 \pi B) = 0 \implies \boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0}$$

(36)

2. Suponha que, em $t = t_0$, a energia cinética de cada partícula seja

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m \langle v_{\parallel}^2 \rangle + \frac{1}{2}m \langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T_{\parallel} + k_B T_{\perp}$$

e que $T_{\parallel}(t_0) = T_{\perp}(t_0) = T_0$. Suponha ainda que, entre $t = t_0$ e $t = t_1$, o campo \mathbf{B}_0 varie adiabaticamente, $\mathbf{B}_0 = B_0[1 + (t - t_0)/(t_1 - t_0)]\hat{\mathbf{k}}$, de modo que não há tempo para as temperaturas se equilibrarem. Quais serão os valores de $T_{\parallel}(t_1)$ e $T_{\perp}(t_1)$?

Entre $t = t_1$ e $t = t_2$, o campo magnético é mantido constante até que $T_{\parallel}(t_2) = T_{\perp}(t_2) = T_2$. Qual será o valor de T_2 ?

Entre $t = t_2$ e $t = t_3$, o campo \mathbf{B}_0 varie adiabaticamente para o seu valor original, $\mathbf{B}_0 = B_0[2 - (t - t_2)/(t_3 - t_2)]\hat{\mathbf{k}}$. Novamente, não há tempo suficiente para as temperaturas se equilibrarem. Quais serão os valores de $T_{\parallel}(t_3)$ e $T_{\perp}(t_3)$?

Entre $t = t_3$ e $t = t_f$, o campo magnético é mantido constante até que $T_{\parallel}(t_f) = T_{\perp}(t_f) = T_f$. Qual é a temperatura final do plasma?

Solução: Pela invariância do momento magnético:

$$\frac{m(v_{\perp})_0^2}{2B_0} = \frac{m(v_{\perp})_1^2}{4B_0} \implies (v_{\perp})_1 = \sqrt{2}(v_{\perp})_0$$

Então:

$$\frac{m(v_{\perp})_1^2}{2} = k_B(T_{\perp})_1 \implies mm(v_{\perp})_0^2 = 2k_B(T_{\perp})_0 = k_B(T_{\perp})_1 \implies T_{\perp}(t_1) = 2T_0$$

Como não há tempo para as temperaturas se equilibrarem: $T_{\parallel}(t_1) = T_0$

Solução dos Exercícios

Agora em $t = t_2$, as temperaturas se equilibram, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k_B(T_{\parallel})(t_1) + k_B T_{\perp}(t_1) &= \frac{1}{2}k_B(T_{\parallel})(t_2) + k_B T_{\perp}(t_2) = \frac{3}{2}k_B T_2 \\ \implies \frac{k_B T_0}{2} + 2k_B T_0 &= \frac{3}{2}k_B T_2 \implies T_2 = \frac{5}{3}T_0 \end{aligned}$$

Em $t = t_3$, pela invariância do momento magnético:

$$\frac{m(v_{\perp})_3^2}{2B_0} = \frac{m(v_{\perp})_2^2}{4B_0} \implies (v_{\perp})_3 = \frac{(v_{\perp})_2}{\sqrt{2}}$$

Mas:

$$\frac{m(v_{\perp})_3^2}{2} = k_B (T_{\perp})_3 \implies \frac{m(v_{\perp})_2^2}{4} = \frac{1}{2}k_B T_2 = k_B (T_{\perp})_3 \implies T_{\perp}(t_3) = \frac{5}{6}T_0$$

Como não há tempo para que as temperaturas equilibrem: $T_{\parallel}(t_3) = \frac{5}{3}T_0$

Por fim:

$$\frac{1}{2}k_B (T_{\parallel})_3 + k_B (T_{\perp})_3 = \frac{3}{2}k_B T_f \implies \frac{5}{6}T_0 + \frac{5}{6}T_0 = \frac{3}{2}T_f \implies \boxed{T_f = \frac{10}{9}T_0} \quad (37)$$

3. Mostre que J_{\parallel} é invariante.

Solução: Seguir a seção 2.8.2 do Chen. Recomendo também seguir a seção 6.3 do capítulo 3 do Bittencourt. O cálculo no Bittencourt é mais amigável, porém menos geral.

4. **(Exercício 2.12 - Chen)** Um próton de raio cósmico é confinado entre 2 espelhos magnéticos móveis cuja razão é $R_m = 5$ e a energia do próton é de $W = 1 \text{ keV}$, com $v_{\perp} = v_{\parallel}$ no plano médio. Cada espelho se move em direção ao plano médio com velocidade de $v_m = 10 \text{ km/s}$.

- (a) Usando a fórmula do cone de perda e a invariância do momento magnético, encontre a energia em que o próton será acelerado antes de escapar.
- (b) Quanto tempo leva para ganhar essa energia?
 - i. Trate cada espelho como pistões planos e mostre que a velocidade ganha em cada colisão é de $2v_m$
 - ii. Calcule o número de colisões necessárias para ganhar a energia calculada no item (a)

- iii. Calcule o tempo T o próton leva para atravessar L o número de vezes calculados no item anterior. Precisão de 2 ordens de grandeza é suficiente.

Solução:

- (a) Vamos tomar o subscrito f como a quantidade após a colisão no meio da garrafa e subscrito i como antes da colisão no meio da garrafa. Então, como o momento magnético é conservado $(v_{\perp})_f = (v_{\perp})_i$, somente v_{\parallel} muda após uma colisão. Como a condição de confinamento é:

$$\sin^2 \theta_m = \frac{B_0}{B_m} = \frac{1}{R_m}$$

com $(v_{\perp})_i = (v_{\parallel})_i$ e $|\mathbf{m}| = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$. v_{\parallel} irá crescer até o ângulo θ chegar em θ_m , em que temos:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_m &= \frac{(v_{\perp})_f^2}{(v_{\perp})_{ultima}^2} = \frac{(v_{\perp})_f^2}{(v_{\perp})_f^2 + (v_{\parallel})_f^2} = \frac{1}{1 + \frac{(v_{\parallel})_f^2}{(v_{\perp})_f^2}} = \frac{1}{5} \implies \frac{(v_{\parallel})_f^2}{(v_{\perp})_f^2} = 4 \\ \implies (v_{\parallel})_f &= 2(v_{\perp})_f \end{aligned}$$

Portanto a energia ganha será:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{m[(v_{\parallel})_i^2 + (v_{\perp})_i^2]}{2} = m(v_{\perp})_i^2 \\ E_f &= \frac{m[(v_{\parallel})_f^2 + (v_{\perp})_f^2]}{2} = \frac{m[4(v_{\perp})_f^2 + (v_{\perp})_f^2]}{2} = \frac{5}{2}m(v_{\perp})_i^2 \\ \implies E_f &= \frac{5}{2}E_i \end{aligned}$$

Como $E_i = 1 \text{ keV}$:

$$\boxed{E_f = 2.5 \text{ keV}} \tag{38}$$

- (b) Para encontrar esse tempo, vamos por partes:

- i. No ponto de vista do espelho em movimento:

$$v'_i = v_0 - v_m \qquad v'_f = -(v_0 - v_m)$$

Trazendo de volta para o ponto de vista do laboratório:

$$v_i = v_0 \qquad v_f = v'_f + v_m = -v_0 + 2v_m$$

Portanto, a cada colisão, a partícula ganha $2|v_m|$.

- ii. Sabemos que $(v_{\parallel})_f$ é a velocidade na direção do eixo que a partícula sai do sistema. Mas, essa velocidade é ganha por meio das colisões, logo:

$$(v_{\parallel})_f = (v_{\parallel})_i + N \Delta v_{\parallel}$$

em que $\Delta v_{\parallel} = 2|v_m|$. Logo:

$$N = \frac{(v_{\parallel})_f - (v_{\parallel})_i}{2|v_m|} = \frac{2(v_{\perp})_i - (v_{\perp})_i}{2|v_m|} = \frac{(v_{\perp})_i}{2|v_m|}$$

Como a energia inicial foi de 1 keV , então:

$$E_i = \frac{1}{2}m((v_{\parallel})_i^2 + (v_{\perp})_i^2) = m(v_{\perp})_i^2 = 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} \implies$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-16}}{1.67 \times 10^{-27}}} = 3.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Logo:

$$N = \frac{3.1 \times 10^5}{2 \times 10^3} \approx 15 \text{ colisões}$$

- iii. o tempo T pode ser calculado pela velocidade média:

$$\bar{v} = \frac{(v_{\parallel})_f + (v_{\parallel})_i}{2} = \frac{2(v_{\perp})_i + (v_{\perp})_i}{2} = \frac{3}{2} \times 3.1 \times 10^5 = 4.6 \times 10^5$$

Portanto:

$$T = \frac{NL}{\bar{v}} = \frac{15 \times 10^{13}}{4.6 \times 10^5} = 3.2 \times 10^8 \quad (39)$$

5. (**Exercício 2.13 - Chen**) Derive o resultado do exercício 2.12 (anterior) usando diretamente a invariância de \mathbf{J} :

- (a) Seja $\int v_{\parallel} ds \approx v_{\parallel} L$ e derive em relação ao tempo.
 (b) A partir dessa expressão, encontre uma expressão dependente de T em termos de $\frac{dL}{dt}$. Seja $\frac{dL}{dt} = -2v_m$ e obtenha a resposta

Solução:

- (a) Então:

$$\frac{d}{dt} \int v_{\parallel} ds \approx \frac{dv_{\parallel}}{dt} L + v_{\parallel} \frac{dL}{dt} = 0$$

Solução dos Exercícios

(b) Usando a expressão:

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt}L - 2v_{\parallel}v_m = 0 \implies \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{2v_{\parallel}v_m}{L}$$

Tomando a aproximação:

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} \approx \frac{\Delta v_{\parallel}}{T} = \frac{2v_{\parallel}v_m}{L}$$

Por fim:

$$T = \frac{L \Delta v_{\parallel}}{2v_{\parallel}v_m} \approx \frac{L \Delta v_{\parallel}}{2\bar{v}v_m} = \frac{L(v_{\perp})_i}{2\bar{v}v_m} = \frac{10^{13} \times 3.1 \times 10^5}{2 \times 4.6 \times 10^5 \times 10^4} \implies \boxed{T \approx 3.3 \times 10^8 \text{ s}}$$

(40)

6. **(Exercício 2.16 - Chen)** Um plasma de hidrogênio é aquecido pela aplicação de ondas na faixa do rádio com \mathbf{E} perpendicular a \mathbf{B} e frequência angular $\omega = 10^9 \text{ rad/s}$. O campo magnético de confinamento é 1 T . O movimento dos (a) elétrons e (b) íons em resposta a essa onda é adiabático?

Solução: Um movimento só é adiabático se a condição $\Omega_c \gg \omega$ for satisfeita. Para elétrons e íons:

$$(\Omega_c)_e = \frac{eB}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}} \approx 1.76 \times 10^{11}$$

$$(\Omega_c)_i = \frac{eB}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27}} \approx 9.58 \times 10^7$$

Portanto, para os elétrons, o movimento pode ser considerado adiabático, enquanto para os íons não.

7. **(Exercício 2.17 - Chen)** Um próton de 1 keV com $v_{\parallel} = 0$ em um campo magnético uniforme de $B = 0.1 \text{ T}$ é acelerado conforme B cresce vagarosamente até 1 T . Então, ele colide elasticamente com uma partícula pesada e muda de direção de forma que $v_{\perp} = v_{\parallel}$. O campo magnético então é diminuído vagarosamente para $B = 0.1 \text{ T}$. Qual é a energia do próton agora?

Solução:

Solução dos Exercícios

Aqui, vamos usar a invariância do momento magnético, então antes da colisão, quando o campo muda $0.1 \rightarrow 1 T$:

$$\frac{m(v_{\perp})_0^2}{2B_0} = \frac{m(v_{\perp})_1^2}{2B_1} \implies \frac{(v_{\perp})_0^2}{0.1} = \frac{(v_{\perp})_1^2}{1} \implies 10(v_{\perp})_0^2 = (v_{\perp})_1^2$$

$$(v_{\parallel})_1 = (v_{\parallel})_0 = 0$$

Na colisão, sabemos que $v_{\perp} = v_{\parallel}$, logo:

$$v^2 = (v_{\perp})_1^2 = (v_{\perp})_{coll}^2 + (v_{\parallel})_{coll}^2 \implies (v_{\parallel})_{coll}^2 = (v_{\perp})_{coll}^2 = 5(v_{\perp})_0^2$$

Agora, o campo volta para $0.1 T$, logo:

$$(v_{\perp})_f^2 = \frac{(v_{\perp})_{coll}^2}{10} \implies (v_{\perp})_f^2 = \frac{(v_{\perp})_0^2}{2}$$

$$(v_{\parallel})_f^2 = (v_{\parallel})_{coll}^2 = 5(v_{\perp})_0^2$$

Enfim:

$$E_f = \frac{m((v_{\perp})_f^2 + (v_{\parallel})_f^2)}{2} = \frac{m}{2} \left(5 + \frac{1}{2} \right) (v_{\perp})_0^2 = \frac{11}{2} \frac{m(v_{\perp})_0^2}{2}$$

Como $\frac{m(v_{\perp})_0^2}{2} = E_i = 1 \text{ keV}$, logo a energia final é de $E_f = 5.5 \text{ keV}$

8. (**Exercício 2.18 - Chen**) Um plasma de hidrogênio sem colisões é confinado num toro em que espiras externas geram um campo magnético \mathbf{B} inteiramente na direção $\hat{\phi}$. O plasma é inicialmente maxwelliano com $kT = 1 \text{ keV}$. Em $t = 0$, B é gradualmente aumentado de $1 T$ para $3 T$ em $100 \mu s$ e o plasma é comprimido.

- (a) Mostre que o momento magnético se mantém invariante para os elétrons como para os íons.
- (b) Calcule as temperaturas T_{\perp} e T_{\parallel} após a compressão.

Solução:

- (a) Para o momento magnético se manter invariante, temos que garantir a condição para a invariância adiabática $\omega \ll \Omega_c$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \times 10^{-4}} = 6.28 \times 10^4$$

$$(\Omega_c)_e = \frac{eB}{m_e} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}} \approx 1.76 \times 10^{11}$$

$$(\Omega_c)_p = \frac{eB}{m_p} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27}} \approx 9.58 \times 10^7$$

Solução dos Exercícios

Ou seja, a condição é satisfeita para ambos com o campo magnético de $1 T$. Como a frequência de giro é proporcional ao campo, a condição é satisfeita para o campo de $3 T$ e também durante o crescimento do campo.

- (b) Como o plasma é Maxwelliano, ele também é isotrópico. Por meio da invariância do momento magnético, a velocidade transversal ao campo muda, conforme do campo cresce. Então:

$$\frac{\frac{1}{2} m (v_{\perp})_0^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2} m (v_{\perp})_f^2}{B_f}$$

Como $\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = k T_{\perp}$, enfim:

$$\frac{T}{B_0} = \frac{T_{\perp}}{B} \implies T_{\perp} = 3 keV \quad (41)$$

A temperatura T_{\parallel} é a mesma que a inicial pois o processo de compressão só atua na componente perpendicular. Logo, $T_{\parallel} = 1 keV$

9. (**Exercício 2.21 - Chen**) Um fio infinito carrega uma corrente constante I na direção \hat{z} . Em $t = 0$, um elétron, cujo raio de giro é pequeno, está em $z = 0$ e $r = r_0$ com $v_{\perp 0} = v_{\parallel 0}$.

- (a) Calcule a magnitude e a direção da velocidade resultante de deriva.
 (b) Suponha que a corrente cresça vagarosamente no tempo de forma que um campo elétrico constante é induzido na direção \hat{z} . Indique num diagrama as direções relativas de \mathbf{I} , \mathbf{B} , \mathbf{E} , $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$.
 (c) v_{\perp} e v_{\parallel} crescerão, diminuirão ou se manterão constantes conforme a corrente cresce? Por quê?

Solução:

- (a) Como o campo magnético gerado por um fio infinito é $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$, a deriva que o elétron sentirá será devido ao ∇B e à curvatura do campo.

$$\nabla B = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \hat{r}$$

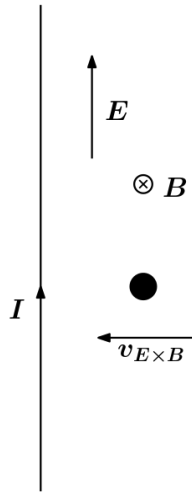
$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \hat{r}$$

Solução dos Exercícios

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{|m|}{q} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{|m|}{e} \left(\frac{1}{r}\right) \hat{z} = -\frac{m_e v_{\perp}^2}{2 e B r} \hat{z} \implies \boxed{\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{\pi m_e v_{\perp}^2}{e \mu_0 I} \hat{z}} \quad (42)$$

$$\mathbf{v}_{curv} = -\frac{m v_{\parallel}^2}{q} \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B^4} \implies \boxed{\mathbf{v}_{curv} = -\frac{2\pi m_e v_{\parallel}^2}{\mu_0 e I} \hat{z}} \quad (43)$$

- (b) Como temos, agora, um campo elétrico constante na direção \hat{z} , então a velocidade de deriva $\mathbf{v}_{E \times B}$ será na direção $\hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{r}$. Então:



- (c) Como \mathbf{B} está na direção $\hat{\phi}$ e vimos que as derivas estão em direções perpendiculares a ela, então v_{\perp} crescerá, uma que $\mathbf{v}_{\nabla B}$ e \mathbf{v}_{curv} são perpendiculares ao campo (na direção $-\hat{z}$). A deriva $\mathbf{v}_{E \times B}$ também contribui para v_{\perp} , pois aponta na direção $-\hat{r}$. v_{\parallel} se mantém constante, pois não há nenhuma quantidade de deriva e/ou campo elétrico nessa direção.

10. (**Exercício 3.4 - Bittencourt**) Para um sistema de espelhos magnéticos do problema 3.3, suponha que o campo magnético axial muda com o tempo, então $\mathbf{B}_{axial} = B(z, t) \hat{z}$. Considere que o momento magnético

$$|m| = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2(z, t)}{B(z, t)}$$

é um invariante adiabático (note que o seu valor é o mesmo para $z = 0$ e $z = \pm z_m$ e que $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$). Mostre que a invariância adiabática longitudinal pode ser escrita na forma:

$$\int_{-z_m}^{z_m} [B(z_m, t) - B(z, t)]^{1/2} dz = \text{constante}$$

Solução dos Exercícios

Solução: Como a energia cinética total é conservada, no gargalo, temos que: $v_{(\perp)g}^2 = (v_{\parallel})^2 + (v_{\perp})^2$ em que as quantidades sem índice são as velocidade num ponto $-z_m < z < z_m$. A invariância adiabática longitudinal nessa questão é:

$$J_{\parallel} = \int_{-z_m}^{z_m} v_{\parallel} dz$$

Como v^2 se conserva, então: $v_{\parallel} = ((v_{\perp})_g^2 - v_{\perp}^2)^{1/2}$. Uma vez que $|\mathbf{m}| = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ é um invariante adiabático, então: $v_{\perp}^2(z, t) = \frac{|\mathbf{m}|B(z, t)}{2m}$, portanto:

$$\boxed{J_{\parallel} = \int_{-z_m}^{z_m} [B(z_m, t) - B(z, t)]^{1/2} dz = \text{constante}} \quad (44)$$

Aula 03/05

1. (**Exercício 3.1 - Chen**) Derive a constante dielétrica de baixa frequência para um plasma uniforme (expressão (3.28) do livro) por meio da derivada temporal da equação $\nabla \cdot D = \nabla \cdot \epsilon E = 0$ com a equação de Poisson (expressão (3.1) do livro) e com a ajuda das equações (3.24) e (2.67).

Solução: A equação (2.67) e (3.24) dizem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{j}}_p = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \\ \frac{\partial \sigma_p}{\partial t} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{j}}_p = 0 \end{array} \right. \implies -\frac{\partial \sigma_p}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right]$$

Pela equação (3.1):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \implies \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right]$$

Então:

$$\boxed{\nabla \cdot \left[\left(\epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2} \right) \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right] = 0 \implies \frac{d}{dt} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0} \quad (45)$$

Solução dos Exercícios

2. Se a frequência ciclotrônica do íon é denotada por Ω_c e a frequência do plasma de íons é definida por:

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 M}}$$

em que M é a massa do íon, em que condições a constante dielétrica ϵ é aproximadamente igual a $\frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2}$

Solução: Basta substituir as expressões e igualar a ϵ :

$$\epsilon = \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = \frac{ne^2 M^2}{e^2 B^2 \epsilon_0 M} \implies \epsilon = \frac{nM}{\epsilon_0 B^2} \quad (46)$$

Aula 05/05

1. (**Exercício 3.3 - Chen**) Mostre que as equações do livro (3.55) e (3.57) são redundantes.

Solução: Tomando o divergente da Lei de Ampere (equação 3.58):

$$0 = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = q_i \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + q_e \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}$$

Substituindo a equação da continuidade de cargas (equação (3.60)):

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} - q_i \frac{\partial n_i}{\partial t} - q_e \frac{\partial n_e}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (q_i n_i + q_e n_e)$$

que é a equação (3.55).

Tomando o divergente da Lei de Faraday (equação 3.56):

$$0 = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{B} = C$$

em que 'C' é uma constante, que é 0, pois não há monopólos magnéticos.

2. **(Exercício 3.4 - Chen)** Mostre que o lado direito da expressão para \mathbf{j}_D na equação (3.69) tem dimensão de densidade de corrente.

Solução: A primeira parte do lado direito é trivial que é densidade de corrente pelo produto densidade de partículas, carga elétrica e velocidade. Já a segunda parte:

$$(kT_i + kT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2}$$

O termo kT tem unidade de energia: $kg\,m^2\,s^{-2}$, B tem unidade de Tesla $T = kg\,s^{-2}\,A^{-1}$ e ∇n tem unidade de m^{-4} , então:

$$[\mathbf{j}_D] = \frac{kg\,m^2\,s^{-2}\,A}{s^2\,kg\,m^4} = \frac{A}{m^2}$$

que é a unidade de densidade de corrente.

3. **(Exercício 3.5 - Chen)** Mostre que se a corrente calculada pelo referencial da partícula é resulta na corrente calculada pela deriva diamagnética para 1 largura da caixa, então assim será para todas as larguras.

Solução: Supondo que a corrente j_D seja constante numa caixa de largura L , então: $\Delta n = n' L$, em que n' é a derivada da densidade de partículas e Δn é a diferença de partículas em cada parede. Então:

$$|\mathbf{J}_D| = |\Delta n e \mathbf{v}_y| = |n' L e \mathbf{v}_y|$$

essa será a diferença das correntes que chegam em cada parede em toda caixa. Logo, a densidade de corrente equivalente:

$$|\mathbf{j}_D| = \frac{\mathbf{J}_D}{L} = |n' e \mathbf{v}_y|$$

Só que pelo lado direito da expressão (3.69): $|\mathbf{j}_D| \approx KT n'/B$. Como a velocidade v_y é determinada por B e KT , uma vez ela determinada, essas quantidades também são, valendo para qualquer largura L , uma vez que a expressão independe dela.

4. **(Exercício 3.6 - Chen)** Um plasma isotérmico é confinado entre 2 planos situados em $x = \pm a$ num campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. A distribuição de densidade é dada por:

$$n = n_0(1 - x^2/a^2)$$

Solução dos Exercícios

- (a) Derive a expressão para a velocidade de deriva diamagnética v_{De} em função de x
- (b) Desenhe um diagrama mostrando o perfil de densidade e a direção de \mathbf{v}_{De} em ambos lados do eixo $x = 0$ se \mathbf{B} está para fora do papel.
- (c) Calcule \mathbf{v}_{De} em $x = a/2$ se $B = 0.2 T$, $kT_e = 2 eV$ e $a = 4 cm$

Solução:

- (a) Como a velocidade diamagnética para os elétrons:

$$\mathbf{v}_{De} = -\gamma \frac{kT}{eB} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \nabla n}{n} \implies \mathbf{v}_{De} = \gamma \frac{2kT x}{eB a^2 (1 - x^2/a^2)} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}$$

Como o plasma é isotérmico, então $\gamma = 1$. Enfim:

$$\boxed{\mathbf{v}_{De} = \frac{2kT x}{eB a^2 (1 - x^2/a^2)} \hat{\mathbf{y}}} \quad (47)$$

- (b) Se fizermos um gráfico da expressão da velocidade de deriva e da densidade:

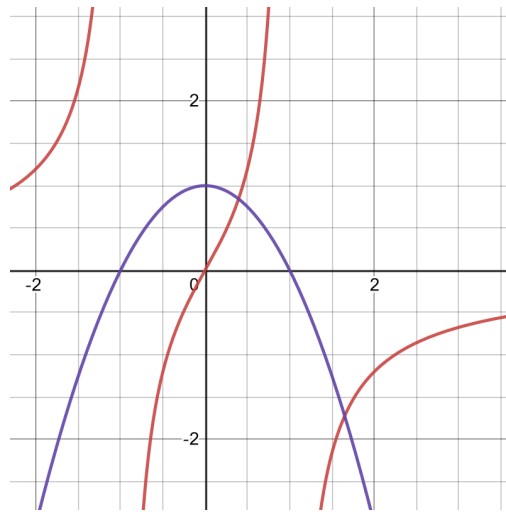


Figure 3: Em vermelho é o gráfico da velocidade e em roxo é o gráfico da densidade

- (c) Colocando os dados:

$$\mathbf{v}_{De} = \frac{2 \times 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.02}{1.67 \times 10^{-19} \times 0.2 \times 0.04^2 (1 - 1/4)} \hat{\mathbf{y}}$$

Fazendo as contas:

$$\boxed{\mathbf{v}_{De} \approx 319 m/s \hat{\mathbf{y}}} \quad (48)$$

5. Uma coluna de plasma com simetria cilíndrica com um campo magnético uniforme \mathbf{B} tem

$$n(r) = n_0 \exp \left[-\frac{r^2}{r_0^2} \right]$$

$$n(r) = n_0 \exp \left[\frac{e\phi}{kT} \right]$$

- (a) Mostre que $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ e \mathbf{v}_{De} são iguais e opostos.
 (b) Mostre que o plasma rotaciona como um corpo rígido.
 (c) No referencial que rotaciona com $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$, algumas ondas em plasmas (ondas de deriva) propagam com velocidade de fase de $\mathbf{v}_\phi = 0.5\mathbf{v}_{De}$. Qual é \mathbf{v}_ϕ no referencial do laboratório? Num diagrama do plano $r - \theta$, desenhe flechas indicando a magnitude e direções relativas de $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$, \mathbf{v}_{De} , \mathbf{v}_ϕ no referencial do laboratório.

Solução:

- (a) Pelas expressões, conseguimos deduzir o potencial escalar:

$$\phi(r) = -\frac{kT}{e} \frac{r^2}{r_0^2} \implies \mathbf{E}(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\phi}{dr} = \frac{2kT}{e} \frac{r}{r_0^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Então, tomando a direção do campo magnético como $\hat{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{2kT}{eB} \frac{r}{r_0^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Calculando a velocidade de deriva diamagnética:

$$\mathbf{v}_{De} = \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2}$$

Como $\nabla p = kT \nabla n$ e $n = n(r)$, então: $\nabla n = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial n}{\partial r}$:

$$\mathbf{v}_{De} = -\frac{2kT}{qB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Como $\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \ln n = -\frac{2r}{r_0^2}$, logo:

$$\mathbf{v}_{De} = \frac{2kT}{qB} \frac{r}{r_0^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ou seja, as velocidades tem o mesmo valor, mas o sentido é oposto.

- (b) Como as velocidades tem dependencia com r e para um corpo rígido $v = \omega r$, percebemos que o plasma também roda como um corpo rígido.
- (c) Transformando de volta para o referencial do laboratório:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\phi + \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = 0.5\mathbf{v}_{De} + (-\mathbf{v}_{De}) = -0.5\mathbf{v}_{De}$$

Aula 19/05

1. (**Exercício 4.1 - Chen**) A densidade oscilante n_1 e o potencial ϕ_1 numa "onda de deriva" são relacionados por:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\phi_1 \omega^* + ia}{kT_e \omega + ia}$$

em que é necessário saber que todas as constantes são positivas, exceto o i .

- (a) Ache uma expressão para a fase δ de ϕ_1 em relação n_1 . (Por simplicidade, assuma que n_1 seja real)
- (b) Se $\omega < \omega^*$, ϕ_1 atrasa ou adianta n_1 ?

Solução:

- (a) Reorganizando a expressão:

$$\phi_1 = \frac{kT_e n_1 \omega + ia}{e n_0 \omega^* + ia} = \frac{kT_e n_1 \omega^* \omega + ia(\omega - \omega^*) + a^2}{e n_0 (\omega^*)^2 + a^2}$$

Como a fase é dada por $\delta = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{\phi_1\}}{\text{Re}\{\phi_1\}}$. Então:

$$\delta = \tan^{-1} \left[\frac{a(\omega^* - \omega)}{\omega^* \omega + a^2} \right] \quad (49)$$

- (b) Como a densidade n_1 é da forma $n_1 = A e^{i(kx - \omega t)}$ e dada a relação do enunciado, ϕ_1 pode ser escrito da forma: $\phi_1 = B n_1 e^{i(kx - \omega t + \delta)}$.

Se $\omega < \omega^*$, então $\delta > 0$ pela relação do item (a). Se em (x_0, t_0) tivermos $kx_0 - \omega t_0 = 0$, fixando x_0 , $kx_0 - \omega t + \delta = 0$, então $t > t_0$. Ou seja, ϕ_1 atrasa n_1 temporalmente. Agora se fixarmos t_0 , $kx - \omega t_0 + \delta = 0$, então $x < x_0$. Ou seja, $x < x_0$, ϕ_1 atrasa n_1 no espaço.

Enfim, ϕ_1 atrasa n_1 .

2. (**Exercício 4.2 - Chen**) A densidade de plasma na baixa ionosfera foi medida durante a reentrada de um satélite e seu valor é de $10^{18} m^{-3}$ a altitude $50 km$, 10^{17} a altitude de $70 km$ e 10^{14} a altitude de $85 km$. Quais são as frequências de plasmas nessas regiões?

Solução: Como a frequência de plasma é dada por:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}}$$

Supondo que o plasma seja de hidrogênio, então os valores para as dadas densidades são:

$$\begin{array}{l} n_0 = 10^{18} \implies \omega_p = 1.31 \times 10^9 \\ n_0 = 10^{17} \implies \omega_p = 4.16 \times 10^8 \\ n_0 = 10^{14} \implies \omega_p = 1.31 \times 10^7 \end{array} \quad (50)$$

3. (**Exercício 4.3 - Chen**) Calcule a frequência de plasma com o movimento dos íons incluído, assim justificando a suposição de que os íons estão praticamente fixos.

(Dica: inclua o termo n_{1i} na equação de Poisson e use as equações de movimento e continuidade para os íons.)

Solução: Vamos partir do ponto em que ele toma a suposição dos íons fixos, que é a equação (4.19). Adicionando o termo n_{1i} :

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = e(n_{1i} - n_{1e})$$

As equações de movimento de primeira ordem para os elétrons e íons são:

$$\frac{\partial n_{1i}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{0i} \mathbf{v}_{1i} + n_{1i} \mathbf{v}_{1i}) = 0$$

$$\frac{\partial n_{1e}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{0e} \mathbf{v}_{1e} + n_{1e} \mathbf{v}_{1e}) = 0$$

$$m_i \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{1i}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{1i} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{1i} \right] = e \mathbf{E}_1$$

$$m_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{1e}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{1e} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{1e} \right] = -e \mathbf{E}_1$$

Linearizando todas as equações, então todos os termos de segunda ordem são desprezados, devido a condição de perturbação $a_0 \gg a_1$, portanto, as nossas equações são:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= e(n_{1i} - n_{1e}) \\ \frac{\partial n_{1i}}{\partial t} + n_{0i} \nabla \cdot \mathbf{v}_{1i} &= 0 \\ \frac{\partial n_{1e}}{\partial t} + n_{0e} \nabla \cdot \mathbf{v}_{1e} &= 0 \\ m_i \frac{\partial v_{1i}}{\partial t} &= e \mathbf{E}_1 \\ m_e \frac{\partial v_{1e}}{\partial t} &= -e \mathbf{E}_1\end{aligned}$$

Assumindo que todas as quantidades perturbadas sejam da forma $a_1 = A e^{i(kx - \omega t)}$ e que estamos resolvendo o problema 1D, então:

$$\begin{aligned}ik\epsilon_0 E_1 &= e(\bar{n}_{1i} - \bar{n}_{1e}) \\ -i\omega\bar{n}_{1i} + ik n_{0i} v_{1i} &= 0 \\ -i\omega\bar{n}_{1e} + ik n_{0e} v_{1e} &= 0 \\ -i\omega m_i v_{1i} &= e E_1 \\ -i\omega m_e v_{1e} &= -e E_1\end{aligned}$$

Substituindo a 2ª equação na 4ª e a 3ª na 5ª equação:

$$\begin{aligned}ik\epsilon_0 E_1 &= e(\bar{n}_{1i} - \bar{n}_{1e}) \\ i\omega\bar{n}_{1i} + ik n_{0i} \frac{e E_1}{i\omega m_i} &= 0 \implies m_i \bar{n}_{1i} \omega^2 = iek n_{0i} E_1 \implies \bar{n}_{1i} = \frac{iek n_{0i} E_1}{m_i \omega^2} \\ i\omega\bar{n}_{1e} - ik n_{0e} \frac{e E_1}{i\omega m_e} &= 0 \implies m_e \bar{n}_{1e} \omega^2 = -iek n_{0e} E_1 \implies \bar{n}_{1e} = -\frac{iek n_{0e} E_1}{m_e \omega^2}\end{aligned}$$

Substituindo 2ª e 3ª na 1ª equação:

$$ik\epsilon_0 E_1 = \frac{ie^2 k}{\omega^2} \left(\frac{n_{0i}}{m_i} + \frac{n_{0e}}{m_e} \right) E_1$$

Portanto:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{e^2}{\epsilon_0} \left(\frac{n_{0i}}{m_i} + \frac{n_{0e}}{m_e} \right)} \quad (51)$$

Como $m_e \ll m_i$ e assumindo quasineutralidade, vemos que o primeiro termo é muito menor que o segundo. Logo, podemos desprezá-lo e, assim, a suposição de íons fixos é bem robusta para a análise da frequência de plasma.

4. (**Exercício 4.4 - Chen**) Para uma oscilação de plasma com íons fixos e comportamento espaço-temporal da forma $e^{i(kx-\omega t)}$, calcule as fases δ para ϕ_1 , E_1 e v_1 se a fase de n_1 é 0. Ilustre as fases por meio de gráficos das senoides de ϕ_1 , E_1 , n_1 e v_1 como

- (a) função de x para $t = 0$,
- (b) função de t para $x = 0$ para $\omega/k > 0$,
- (c) função de t para $x = 0$ para $\omega/k < 0$.

Note que os padrões temporais podem ser obtidos pela translação dos padrões de x numa direção apropriada, como no caso de uma onda passando por um observador fixo.

Solução: Pelas equações (4.21), (4.22) e (4.23):

$$\begin{aligned} -im\omega v_1 &= -eE_1 \\ -i\omega n_1 &= -ik n_0 v_1 \\ ik\epsilon_0 E_1 &= -e n_1 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega n_1}{k n_0} \\ E_1 &= i \frac{e}{k\epsilon_0} n_1 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1 \implies E_1 = -ik\phi_1$. Portanto:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega n_1}{k n_0} \\ E_1 &= i \frac{e}{k\epsilon_0} n_1 \\ \phi_1 &= -\frac{e}{\epsilon_0 k^2} n_1 \end{aligned}$$

Logo, em relação com n_1 , v_1 pode estar não estar defasado ou estar defasado por 180° (isso depende do sinal de ω/k), E_1 está defasado com 90° e ϕ está defasado com 180° .

5. **(Exercício 4.5 - Chen)** Escrevendo a equação de Poisson usada na derivação da oscilação de plasma simples na forma

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$$

derive uma expressão para a constante dielétrica ϵ aplicável a movimentos longitudinais de alta frequência.

Solução: Partindo da equação de Poisson linearizada para o caso em 1D:

$$ik\epsilon_0 E_1 = -en_1$$

Como, pela equação (4.22) $-i\omega n_1 = -ik n_0 v_1$:

$$ik E_1 = -\frac{ek}{\omega\epsilon_0} n_0 v_1$$

Usando a equação (4.21):

$$ik E_1 = +\frac{ie^2 k n_0}{m\omega^2\epsilon_0} E_1 \implies ik \left(1 - \frac{e^2 n_0}{m\omega^2\epsilon_0}\right) E_1 = 0$$

Mas $\frac{e^2 n_0}{m\epsilon_0} = \omega_p^2$, logo:

$$\boxed{\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{52}$$

6. **(Exercício 4.6 - Chen)** Ondas de plasma de elétrons são propagadas num plasma uniforme com $kT_e = 100 \text{ eV}$, $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ e $B = 0$. Se a frequência é de 1.1 GHz , qual é o comprimento de onda em cm?

Solução: Como $\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}k^2 v_{th}^2$, então:

$$k^2 = \frac{2}{3v_{th}^2}(\omega^2 - \omega_p^2) \implies \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{3v_{th}^2}{2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Com os dados do problema: $\omega_p^2 = 3.17 \times 10^{19}$, $v_{th}^2 = 3.51 \times 10^{13}$, $\omega^2 = (2\pi f)^2 = 4.77 \times 10^{19}$, obtemos:

$$\boxed{\lambda = 0.011 \text{ m} = 1.1 \text{ cm}} \tag{53}$$

7. (Exercício 4.7 - Chen)

- (a) Calcule o efeito de amortecimento colisional na propagação de ondas de Langmuir (oscilações de plasma) pela adição do termo $-mn\nu\mathbf{v}$ na equação de movimento dos elétrons e rederive a relação de dispersão para $T_e = 0$. Aqui, ν é a frequência de colisão dos elétrons com os íons e átomos neutros. **(O enunciado foi escrito errado! A frequência de colisão é ν .)**
- (b) Escreva uma relação para $\text{Im}\{\omega\}$ e mostre que o sinal indica que a onda é amortecida no tempo.

Solução:

- (a) Adicionando o termo de colisão na equação de movimento dos elétrons:

$$m n_e \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -e n_e \mathbf{E} - \nabla p - m n \nu \mathbf{v}$$

Tomando o método perturbativo e linearizando a equação, temos que:

$$-i\omega m n_0 \mathbf{v}_1 = -e n_0 \mathbf{E}_1 - \gamma k_B T_e \nabla n_1 - m n \nu \mathbf{v}_1$$

Resolvendo o problema em 1D: $\gamma = 3$;

$$-i\omega m n_0 v_1 = -e n_0 E_1 - 3ik k_B T_e n_1 - m n_0 \nu v_1$$

Pelas equações (4.23) e (4.22), podemos escrever E_1 e n_1 como:

$$\begin{aligned} -i\omega m n_0 v_1 &= e n_0 \frac{i e n_0}{\omega \epsilon_0} v_1 + 3ik k_B T_e \frac{k n_0}{\omega} v_1 - m n_0 \nu v_1 \\ \omega^2 &= \frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} - 3k^2 \frac{k_B T_e}{m} - i\nu\omega \end{aligned}$$

Como $\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} = \omega_p^2$ e $v_{th}^2 = \frac{k_B T_e}{2m}$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} v_{th}^2 k^2 - i\nu\omega$$

Esta é uma equação quadrática. Para $T_e = 0 \implies v_{th} = 0$, então:

$$\boxed{\omega^2 + i\nu\omega = \omega_p^2} \tag{54}$$

(b) Pela relação de dispersão, podemos deduzir que ω é complexo: $\omega = x + iy$

$$x^2 + y^2 + 2ixy + i\nu x - \nu y = \omega_p^2$$

Logo, a parte imaginária será:

$$2xy + \nu x = 0 \implies y = -\nu/2$$

Ou seja:

$$\boxed{\text{Im}\{\omega\} = -\nu/2} \quad (55)$$

Enfim, se a dependência temporal é da forma $e^{-i\omega t} \implies e^{-ixt}e^{yt} \implies e^{-ixt}e^{-\frac{\nu}{2}t}$.
Ou seja, a oscilação é amortecida.

8. **(Exercício 4.8 - Chen)** Para a oscilação *upper hybrid*, mostre que as órbitas elípticas são sempre alongadas na direção de \mathbf{k} . (*Dica: A partir da equação de movimento, derive uma expressão para v_x/v_y em termos de ω/ω_c*)

Solução: Tomando \mathbf{B} na direção \hat{z} e \mathbf{E} na direção $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}$ e partindo das equação de movimento (equação 4.52) em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} -i\omega m v_x &= -eE - e v_y B_0 \\ -i\omega m v_y &= e v_x B_0 \implies \frac{v_x}{v_y} = -\frac{i\omega m}{e B_0} \implies \frac{v_x}{v_y} = -i \frac{\omega}{\omega_c} \end{aligned}$$

Como $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$, então $\omega/\omega_c > 1 \implies v_x/v_y > 1$. Ou seja, traçando as órbitas das partículas, como $v_x > v_y$, elas andam mais na direção x do que na direção y , logo as órbitas são alongadas.

9. **(Exercício 4.9 - Chen)** Ache a relação de dispersão para ondas de elétrons eletrostáticas propagando num ângulo arbitrário θ em relação à \mathbf{B}_0 . (*Dica: escolha o eixo x de forma que \mathbf{k} e \mathbf{E} esteja no plano $x-z$*)

(a) Mostre que a resposta é:

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_c^2 \omega_p^2 \cos \theta = 0$$

- (b) Escreva 2 soluções para essa quadrática para ω^2 e mostre que nos limites $\theta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \pi/2$, nossos resultados anteriores são recuperados. Mostre que nesses limites, uma dessas soluções é falsa, sem significado físico.

Solução dos Exercícios

- (c) Por completar quadrados, mostre que a relação acima é uma equação de elipse da forma:

$$\frac{(y-1)^2}{1} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

em que, $x = \cos \theta$, $y = 2\omega^2/\omega_h^2$ e $a = \omega_h^2/(2\omega_c\omega_p)$

- (d) Plote a elipse para $\omega_p/\omega_c = 1, 2 e \infty$
- (e) Mostre que se $\omega_c > \omega_p$, a menor raiz para ω será sempre menor que ω_p para qualquer $\theta > 0$ e que a maior raiz sempre está entre ω_c e ω_h . E que se $\omega_p > \omega_c$, a menor raiz é menor que ω_c e a maior raiz é maior que ω_p e ω_h

Solução:

- (a) Usando a dica dada: \mathbf{B}_0 está na direção \hat{z} e \mathbf{E} e \mathbf{k} estão no plano $x-z$, logo: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = k B_0 \cos \theta$. Como estamos tratando as quantidades harmonicamente, então: $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ e $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$.

Nós vamos usar 3 equações (Lei de Gauss, continuidade de partículas e equação de movimento):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0 \\ m n_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -e n_0 \mathbf{E}_1 - e n_0 (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \end{aligned}$$

Fazendo essas trocas e lembrando que \mathbf{k} está no plano $x-z$:

$$\begin{aligned} i\epsilon_0(k_x E_{1x} + k_z E_{1z}) &= -e n_1 \\ -i\omega n_1 + i n_0(k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) &= 0 \\ -i\omega m n_0 v_{1x} &= -e n_0 E_{1x} - e n_0(v_{1y} B_0) \\ -i\omega m n_0 v_{1y} &= e n_0(v_{1x} B_0) \implies v_{1y} = i \frac{\omega_c}{\omega} v_{1x} \\ -i\omega m n_0 v_{1z} &= -e n_0 E_{1z} \implies v_{1z} = -i \frac{e E_{1z}}{m\omega} \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

Substituindo a 4ª na 3ª equação:

$$\begin{aligned}
 i\epsilon_0(k_x E_{1x} + k_z E_{1z}) &= -e n_1 \\
 -i\omega n_1 + i n_0(k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) &= 0 \\
 -i\omega m n_0 v_{1x} &= -e n_0 E_{1x} - e n_0 \left(i \frac{\omega_c}{\omega} v_{1x} B_0\right) \implies v_{1x} = -i \frac{e E_{1x}}{m\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \\
 v_{1y} &= i \frac{\omega_c}{\omega} v_{1x} \\
 v_{1z} &= -i \frac{e E_{1z}}{m\omega}
 \end{aligned}$$

Substituindo 3ª e 5ª na 3ª equação:

$$\begin{aligned}
 i\epsilon_0(k_x E_{1x} + k_z E_{1z}) &= -e n_1 \\
 -i\omega n_1 + n_0 \left(-i \frac{e k_x E_{1x}}{m\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} - i \frac{e k_z E_{1z}}{m\omega}\right) &= 0 \\
 \implies n_1 &= -i \frac{e n_0}{m\omega^2} \left(k_x E_{1x} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + k_z E_{1z}\right)
 \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação:

$$(k_x E_{1x} + k_z E_{1z}) = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m \omega^2} \left(k_x E_{1x} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + k_z E_{1z}\right)$$

Como $\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} = \omega_p^2$, $k_x = k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$, $E_{1x} = E_1 \cos \theta$ e $E_{1y} = E_1 \sin \theta$:

$$\begin{aligned}
 k E_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} k E_1 \left(\sin^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + \cos^2 \theta\right) \\
 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) &= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)\right) \\
 \omega^2 - \omega_c^2 &= \omega_p^2 - \frac{\omega_c^2 \omega_p^2}{\omega^2} \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

Como $\omega_h^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$:

$$\boxed{\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_c^2 \omega_p^2 \cos^2 \theta = 0} \tag{56}$$

(b) Achar as soluções para ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{\omega_h^2 \pm \sqrt{\omega_h^4 - 4\omega_c^2 \omega_p^2 \cos^2 \theta}}{2}$$

Solução dos Exercícios

No limite $\theta \rightarrow 0 \implies \cos \theta \rightarrow 1$ e $\omega_h^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$, logo:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2 \pm \sqrt{(\omega_c^2 + \omega_p^2)^2 - 4\omega_c^2\omega_p^2}}{2} \\ &= \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2 \pm \sqrt{\omega_c^4 + \omega_p^4 - 2\omega_c^2\omega_p^2}}{2} \\ &= \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2 \pm \sqrt{(\omega_c^2 - \omega_p^2)^2}}{2} \\ &= \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2 \pm (\omega_c^2 - \omega_p^2)}{2}\end{aligned}$$

As soluções são:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_c^2 \\ \omega_2^2 &= \omega_p^2\end{aligned}$$

A primeira solução não tem significado físico, pois as ondas não possuem a frequência ciclotrônica. A segunda solução é a usual (frequência de Langmuir) e que vimos no curso.

Para $\theta \rightarrow \pi/2 \implies \cos \theta \rightarrow 0$, então:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_h^2 \\ \omega_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Aqui, a primeira solução é a correta, pois é a frequência para ondas *upper hybrid*. A segunda solução não tem significado físico, pois supomos que a perturbação era oscilatória.

(c) Completando o quadrado:

$$\begin{aligned}\omega^4 - \omega_h^2\omega^2 + \frac{1}{4}\omega_h^4 &= \frac{1}{4}\omega_h^4 - \omega_c^2\omega_p^2 \cos^2 \theta \\ \left(\omega^2 - \frac{\omega_h^2}{2}\right)^2 + \omega_c^2\omega_p^2 \cos^2 \theta &= \left(\frac{\omega_h^2}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Dividindo por $\frac{\omega_h^2}{2}$ em ambos os lados:

$$(y - 1)^2 + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

em que $y = \frac{2\omega^2}{\omega_h^2}$, $x = \cos \theta$ e $a = \frac{\omega_h^2}{2\omega_c^2\omega_p^2}$

Solução dos Exercícios

(d) Como $\omega_h^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$, então $a = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p} + \frac{\omega_p}{\omega_c} \right)$, os plots em que, conforme $\omega_p/\omega_c \rightarrow \infty$, a elipse se torna cada vez mais achatada e alongada na direção x .

(e) A partir das soluções:

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 + \omega_c^2 \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_c^2\omega_p^2 \cos^2 \theta}}{2}$$

A menor raiz será quando $\cos^2 \theta = 1$ e tomando o sinal $-$. Então:

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &= \frac{1}{2} (\omega_p^2 + \omega_c^2 - |\omega_p^2 - \omega_c^2|) \\ \omega_-^2 &= \omega_c^2 \quad \text{para caso } \omega_p > \omega_c \\ \omega_-^2 &= \omega_p^2 \quad \text{para caso } \omega_c > \omega_p \end{aligned}$$

A maior raiz será quando $\cos^2 \theta = 0$ e tomando o sinal $+$:

$$\begin{aligned} \omega_+^2 &= \frac{1}{2} (\omega_p^2 + \omega_c^2 + |\omega_p^2 - \omega_c^2|) \\ \omega_+^2 &= \omega_p^2 \quad \text{para caso } \omega_p > \omega_c \\ \omega_+^2 &= \omega_c^2 \quad \text{para caso } \omega_c > \omega_p \end{aligned}$$

Como para $\theta > 0 \implies \cos^2 \theta < 1$, então, para $\omega_c > \omega_p$, $\omega_- < \omega_p$. Agora, para $\omega_p > \omega_c$, a menor raiz $\omega_- < \omega_c$. Já para a maior raiz é $\omega_c^2 < \omega_+^2 < \omega_p^2 + \omega_c^2$, no caso $\omega_c > \omega_p$. Já para $\omega_p > \omega_c$, a maior raiz é $\omega_p^2 < \omega_+^2 < \omega_p^2 + \omega_c^2$.

10. **(Exercício 4.10 - Chen)** Uma cápsula espacial está reentrando na atmosfera terrestre sofre um blackout nas comunicações por causa do plasma gerado pela onda de choque na frente da cápsula. Se o rádio opera na frequência de 300 MHz , qual é a densidade mínima de plasma durante o blackout?

Solução: Sabemos que quando emitimos ondas em direção a uma região com plasma, a onda interagirá com ele, podendo ser refletida. Dessa forma, a densidade crítica em que uma onda é completamente atenuada dentro do plasma é dada por:

$$n_c = \frac{m \epsilon_0 \omega^2}{e^2}$$

Supondo que a atmosfera alta seja predominantemente ocupada por nitrogênio: $m_N \approx 2.32 \times 10^{-26} \text{ kg}$, então:

$$n_c = \frac{2.32 \times 10^{-26} \times 8.85 \times 10^{-12} \times (2\pi \times 300 \times 10^6)^2}{(1.6 \times 10^{-19})^2} \implies n_c \approx 2.85 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

(57)

-
11. (**Exercício 4.11 - Chen**) Hannes Álfven, o primeiro físico de plasmas a ganhar um prêmio Nobel, sugeriu que, possivelmente, o universo primordial era simétrico entre matéria e antimatéria. Suponha que o Universo era, em algum tempo, uma mistura uniforme de prótons, antiprótons, elétrons e pósitrons, em que cada espécie tem densidade n_0 .
- (a) Derive uma relação de dispersão para ondas eletromagnéticas de alta frequência em plasmas. Você pode desprezar colisões, aniquilações e efeitos térmicos.
- (b) Derive uma relação de dispersão para as ondas de íons, usando a equação de Poisson. Você pode desprezar T_i (mas não T_e) e assuma que os léptons seguem uma relação de Boltzmann
-

Solução:

- (a) Sabemos que ondas de alta frequência são geradas pelos elétrons/pósitrons do plasma. Supondo que no Universo primordial, as quantidades de equilíbrio $\mathbf{B}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$. Para deixar a notação mais simples, todas as quantidades escritas tem um subscrito 1 implícito. Então, partindo das Lei de Ampere e de Faraday:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}})\end{aligned}$$

Tomando o rotacional da primeira equação e usando a relação harmônica $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$; $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\mu_0 \left(\dot{\mathbf{j}} + \epsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} \right)$$

Lembremos que a corrente não é uma quantidade harmônica, então, usando a definição de corrente e a identidade $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - A^2 \mathbf{B}$ com $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$:

$$\begin{aligned}-k^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \left(n_0 e (\dot{\mathbf{v}}_p - \dot{\mathbf{v}}_e) - \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{E} \right) \\ (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} n_0 e (\dot{\mathbf{v}}_p - \dot{\mathbf{v}}_e)\end{aligned}$$

Pela equação de movimento (lembrando que $\mathbf{B}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$):

$$m n_0 \dot{\mathbf{v}} = q n_0 \mathbf{E}$$

Solução dos Exercícios

Substituindo para elétrons e pósitrons:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} = \frac{1}{m_e \epsilon_0} n_0 e (e + e) \mathbf{E}$$

Portanto, como $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$:

$$\boxed{\omega^2 = 2\omega_p^2 + c^2 k^2} \quad (58)$$

(b) Como os léptons (elétrons e pósitrons) respeitam uma relação de Boltzmann:

$$\begin{aligned} n_p &= n_0 \exp\{e\phi/k T_p\} \\ n_e &= n_0 \exp\{-e\phi/k T_e\} \end{aligned}$$

Expandindo em primeira ordem:

$$\begin{aligned} (n_p)_1 &= n_0 e\phi/k T_p \\ (n_e)_1 &= -n_0 e\phi/k T_e \end{aligned}$$

A Equação de Poisson fica:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= \frac{e}{\epsilon_0} ((N_p)_1 - (N_a)_1 + (n_p)_1 - (n_e)_1) \\ \implies \nabla^2 \phi &= k^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0} ((N_p)_1 - (N_a)_1 + (n_p)_1 - (n_e)_1) \end{aligned}$$

em que N_p e N_a são as densidades do próton e antipróton. Para descobrirmos as densidades do próton e do antipróton, vamos usar as equações da continuidade:

$$\frac{\partial(N_{p,a})_1}{\partial t} + (N_{p,a})_0 \nabla \cdot (\mathbf{u}_{p,a})_1 = 0$$

Como estamos supondo que as quantidades perturbadas sejam harmônicas:

$$-\omega (N_{p,a})_1 + (N_{p,a})_0 k (u_{p,a})_1 = 0 \implies (N_{p,a})_1 = \frac{k}{\omega} (u_{p,a})_1 (N_{p,a})_0 = \frac{k n_0}{\omega} (u_{p,a})_1$$

Pela equação de movimento:

$$M (N_{p,a})_0 \frac{\partial(\mathbf{u}_{p,a})_1}{\partial t} = \pm e (N_{p,a})_0 \mathbf{E}_1$$

Como $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi = -i\mathbf{k}\phi$. Logo:

$$M n_0 (-i\omega) (\mathbf{u}_{p,a})_1 = \pm e n_0 (i\mathbf{k}) \phi \implies (u_{p,a})_1 = \pm \frac{ek}{M\omega} \phi \implies (N_{p,a})_1 = \pm \frac{k n_0}{\omega} \frac{ek}{M\omega} \phi$$

Solução dos Exercícios

em que o sinal de cima é para os prótons e o de baixo é para os antiprótons. Com as densidades, pela Equação de Poisson, temos que:

$$\begin{aligned}
 -k^2\phi &= \frac{e}{\epsilon_0} \left(2\frac{k n_0}{\omega} \frac{ek}{M\omega} - 2n_0 \frac{e}{kT_e} \right) \phi \\
 -k^2 &= 2\frac{k^2 n_0 e^2}{\omega^2 \epsilon_0 M} - 2\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k T_e}
 \end{aligned}$$

Como $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M}$ e $\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 k T_e}{n_0 e^2}$, então:

$$\begin{aligned}
 k^2 &= 2\frac{k^2 \omega_p^2}{\omega^2} - 2\frac{1}{\lambda_D^2} \\
 k^2 \lambda_D^2 + 2 &= \frac{2k^2}{\omega^2} \omega_p^2 \lambda_D^2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega^2 = 2\frac{k^2}{v_s^2} \left(\frac{1}{2 + k^2 \lambda_D^2} \right)} \tag{59}$$

12. **(Exercício 4.12 - Chen)** Para ondas eletromagnéticas, mostre que o índice de refração é igual a raiz quadrada da constante dielétrica apropriada do plasma.

Solução: Sabemos que o índice de refração de uma onda é dado por:

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck}{\omega}$$

Vimos que a relação de dispersão para ondas eletromagnéticas no plasma em que $\mathbf{B}_0 = 0$ é dado por: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, então:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \implies \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Pelo problema 4.5, vimos que $\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, então:

$$\boxed{n = \sqrt{\epsilon}} \tag{60}$$

13. **(Exercício 4.13 - Chen)** Num plasma de potássio numa máquina-Q, a fração κ de elétrons pode ser substituída por íons Cl^- negativos. Então, o plasma tem n_0 íons K^+ , κn_0 íons Cl^- e $(1 - \kappa)n_0$ elétrons por m^3 . Ache o valor crítico de n_0 em que o plasma corta microondas, cujo comprimento de onda é de 3 cm , para $\kappa = 0.6$.

Solução: Na derivação da densidade crítica (equação , estamos usando a aproximação de íons fixos. Como Cl^- são íons pesados, então a corrente calculada na derivação é $\mathbf{j}_1 = -n_e e \mathbf{v}_1 = -(1 - \kappa)n_0 e \mathbf{v}_1$. Então, só temos que acrescentar $(1 - \kappa)$ no termo dependente de n_0 na relação de dispersão. Enfim:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - (1 - \kappa) \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

O cutoff ($k \rightarrow 0$) acontece quando $\omega^2 = (1 - \kappa)\omega_p^2 \implies \omega = \sqrt{1 - \kappa}\omega_p$. Como, para as ondas eletromagnéticas, a velocidade de fase é c , então:

$$c = \lambda f \implies f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.03} = 10^{10}$$

Então:

$$\omega = \omega_p \sqrt{1 - \kappa} \implies 2\pi \times 10^{10} = \sqrt{0.4 \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

Isolando n_0 e colocando os valores:

$$\boxed{n_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}} \tag{61}$$

14. **(Exercício 4.14 - Chen)** Uma microonda interferômetro de 8 mm é usada num plasma sobre um plano infinito, em que a espessura do plasma é de 8 cm .

- (a) Se a densidade do plasma é uniforme e uma defasagem é de $1/10$ da franja é observada, qual é a densidade?
- (b) Mostre que se a defasagem é pequena, então ela é proporcional a densidade.

Solução:

- (a) A defasagem é imposta quando a onda entra no plasma. Então vamos comparar quantos comprimentos de onda cabem em 2 casos em que 1-) a onda percorre 8 cm no vácuo e 2-) a onda percorre o plasma com espessura de 8 cm .

Solução dos Exercícios

No primeiro caso:

$$N_0 = \frac{L}{\lambda_0} \implies N_0 = \frac{0.08}{0.008} = 10$$

No segundo caso:

$$N = L/\lambda = \frac{Lk}{2\pi}$$

Sabemos, pela relação de dispersão, que $\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \omega_p^2/\omega^2 \implies k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$, logo:

$$N = \frac{L}{2\pi} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Como a defasagem imposta é de 1/10, então a diferença entre N e N_0 é de:

$$\Delta N = N_0 - N = \frac{L}{\lambda} - \frac{Lk}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}} = \frac{L}{\lambda} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right] = 0.1$$

Como $\omega_p = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$, temos a seguinte relação para n_0 :

$$n_0 = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 m_e c^2}{e^2 \lambda^2} \left[1 - \left(\frac{9.9\lambda}{L} \right)^2 \right]$$

Colocando os valores:

$$\boxed{n_0 = 3.50 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}} \quad (62)$$

- (b) Se a defasagem é pequena, então, podemos expandir a raiz em primeira ordem em ω_p^2/ω^2 , logo:

$$\Delta N \approx \frac{L}{\lambda} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) \right]$$

Como $\omega_p^2 \propto n_0$, então $\Delta N \propto n_0$.

6 Aulas 24/05 - 9/06

1. **(Exercício 4.14 - Chen)** Prove que as ondas extraordinárias são puramente eletrostática na ressonância. *Dica:* Expresse a razão E_y/E_x como função de ω e coloque $\omega = \omega_h$

Solução: A partir das equações escritas em (4.101), tomando a razão E_y/E_x :

$$\frac{E_y}{E_x} = i \frac{\omega}{\omega_p^2 \omega_c} \left[\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right]$$

Tomando $\omega = \omega_h = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$:

$$\frac{E_y}{E_x} = i \frac{\sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}}{\omega_p^2 \omega_c} [\omega_p^2 - \omega_p^2] = 0 \implies E_y = 0$$

Logo, $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}$ e, como $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{x}}$, então $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ e as ondas são longitudinais e eletrostáticas.

2. **(Exercício 4.15 - Chen)** Mostre que a relação entre as frequências ω_L , ω_R , ω_p , ω_h são na ordem: $\omega_L < \omega_p < \omega_h < \omega_R$.

Solução: As 4 frequências, dadas nas equações (4.25), (4.60) e (4.108):

$$\begin{aligned} \omega_p &= \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}} \\ \omega_h &= \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2} \quad \left(\omega_c = \frac{e B_0}{m} \right) \\ \omega_L &= \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right] \\ \omega_R &= \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right] \end{aligned}$$

Já vemos que $\omega_p < \omega_h$, $\omega_L < \omega_R$. Para ω_L , se acrescentarmos um termo $4\omega_c\omega_p$ dentro da raiz:

$$\omega_L < \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_c\omega_p + 4\omega_p^2} \right] = \frac{1}{2} [-\omega_c + \omega_c + 2\omega_p] \implies \omega_L < \omega_p$$

Solução dos Exercícios

Agora, comparando ω_R e ω_h :

$$\begin{aligned} 2\omega_R &= \omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \\ 4\omega_R^2 - 4\omega_R\omega_c + \omega_c^2 &= \omega_c^2 + 4\omega_p^2 \\ \omega_R^2 - \omega_R\omega_c &= \omega_p^2 \implies \omega_R^2 = \omega_R\omega_c + \omega_p^2 > \omega_c^2 + \omega_p^2 \implies \omega_R^2 > \omega_h^2 \end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$\omega_L < \omega_p < \omega_h < \omega_R$$

3. **(Exercício 4.16 - Chen)** Mostre que a velocidade de grupo das ondas-X se anulam nos cutoffs e nas ressonâncias. Você pode desprezar o movimento dos íons.

Solução: Como a velocidade de grupo é dada por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$$

Escrevendo a relação de dispersão na forma $k(\omega)$, a partir da equação (4.104):

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}}$$

Então:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(\omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right)^{-1/2} 2\omega \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_h^2)^2} \right]$$

Portanto:

$$v_g = \frac{c}{2\omega} \left(\omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_h^2)^2} \right]^{-1}$$

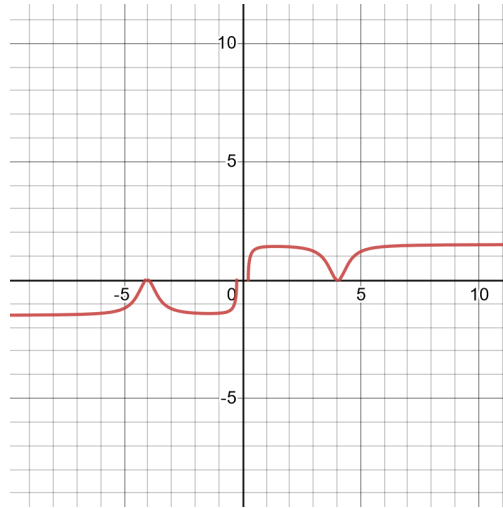
Na ressonância, $\omega = \omega_h$. Como ele depende na primeira parte com $(\omega^2 - \omega_h^2)^{-1/2}$ e na segunda parte $(\omega^2 - \omega_h^2)^2$, a dependência dele é com $(\omega^2 - \omega_h^2)^{3/2}$, portanto, $v_g = 0$.

No corte (*cutoff*), $\omega = \frac{1}{2} (\pm\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$, a parte que anula é a da raiz $\left(\omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right)^{1/2}$.

Após uma extensa álgebra, fica visível que os termos se cancelam.

Para aqueles que tiverem curiosidade de como fica a velocidade de grupo das ondas extraordinárias em relação a ω , a figura a seguir demonstra o comportamento:

Solução dos Exercícios



4. (**Exercício 4.17 - Chen**) Prove que as ondas R e L são polarizadas no sentido horário e antihorário, respectivamente, seguindo:

(a) Mostre que as equações simultâneas para E_x e E_y podem ser escritas na forma:

$$F(\omega)(E_x - i E_y) = 0, \quad G(\omega)(E_x + i E_y) = 0$$

em que $F(\omega) = 0$ para a onda R e $G(\omega) = 0$ para a onda L.

(b) Para a onda R, $G(\omega) \neq 0$; portanto, $E_x = -i E_y$. Relembrando da dependência exponencial no tempo para \mathbf{E} , mostre que \mathbf{E} rotaciona na direção de rotação ciclotrônica do elétron. Confirme que, para a onda L, \mathbf{E} gira na direção oposta.

(c) Para a onda R, desenhe as hélices traçadas pela ponta do vetor \mathbf{E} no espaço num dado tempo que: (i) $k_z > 0$ e (ii) $k_z < 0$. Note que a rotação de \mathbf{E} é na mesma direção em ambos casos se o observador está parado e vê a hélice passar por ele.

Solução:

(a) Multiplicando por i na segunda equação (4.112) e somando com a primeira:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)(E_x + i E_y) + \frac{\alpha \omega_c}{\omega}(E_x + i E_y) &= 0 \\ \implies \left(\omega^2 - c^2 k^2 + \alpha + \frac{\alpha \omega_c}{\omega} \right) (E_x + i E_y) &= 0 \implies F(\omega) = \omega^2 - c^2 k^2 + \alpha \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega} \right) \end{aligned}$$

Agora, multiplicando por i na segunda equação (4.112) e subtraindo com a primeira:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)(E_x - i E_y) - \frac{\alpha \omega_c}{\omega}(E_x - i E_y) &= 0 \\ \implies \left(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha + \frac{\alpha \omega_c}{\omega} \right) (E_x - i E_y) &= 0 \implies G(\omega) = \omega^2 - c^2 k^2 - \alpha \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega} \right) \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

Como $\alpha = \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_p^2/\omega^2}$, então, fazendo um pouco de álgebra:

$$\boxed{\begin{aligned} F(\omega) &= \omega^2 \left(1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_c}{\omega}} - \frac{c^2 k^2}{\omega} \right) \\ G(\omega) &= \omega^2 \left(1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\omega_c}{\omega}} - \frac{c^2 k^2}{\omega} \right) \end{aligned}} \quad (63)$$

(b) Supondo que E_x seja da forma: $E_x = E_{x0} e^{i\omega t}$, então, como $E_y = i E_x \implies E_y = i E_{x0} e^{i\omega t} = E_{x0} e^{i(\omega t + \pi/2)}$. Como só nos interessa a parte real, então:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t) \\ E_y &= E_{x0} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Logo, para um campo \mathbf{B} na direção \hat{z} , o elétron gira em sentido antihorário, a onda gira no mesmo sentido.

Para as ondas L, $F(\omega) = 0 \implies E_y = -i E_x \implies E_y = E_{x0} e^{i(\omega t - \pi/2)}$. Como queremos a parte real, então:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t) \\ E_y &= E_{x0} \sin(-\omega t) \end{aligned}$$

Portanto, \mathbf{E} roda no sentido horário.

5. **(Exercício 4.18 - Chen)** Ondas polarizadas circularmente no sentido antihorário (ondas L) são propagadas ao longo de um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ num plasma com densidade crescente em relação z . Em qual densidade o corte é atingido se $f = 2.8 \text{ GHz}$ e $B_0 = 0.3 \text{ T}$

Solução: O corte nas ondas com \mathbf{E} perpendicular acontece nas mesmas frequências que nas ondas com \mathbf{E} paralelo. Logo:

$$\omega_L = \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$$

Como $\omega_c = eB/m$ e $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}}$ e lembrando que para as ondas, o que importa são os elétrons:

$$2\pi f = \frac{1}{2} \left[-\frac{eB}{m} + \sqrt{\frac{e^2 B^2}{m^2} + 4 \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}} \right]$$

Solução dos Exercícios

Invertendo a relação para n_0 :

$$n_0 = \frac{\epsilon_0 m}{e^2} \left(4\pi f^2 + \frac{2\pi e B}{m} f \right)$$

Colocando os valores, chegamos em:

$$\boxed{n_0 = 3.9 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}} \tag{64}$$

6. **(Exercício 4.19 - Chen)** Mostre que o 'modo apito' tem a velocidade de fase máxima em $\omega = \omega_c/2$ e que esse máximo é menor que c .

Solução:

No modo apito, a relação de dispersão é dada por:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_\phi^2} = 1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_c}{\omega}}$$

O máximo será quando a derivada de v_ϕ em respeito a ω for 0. Logo:

$$-2 \frac{c^2}{v_\phi^3} \frac{dv_\phi}{d\omega} = -2 \frac{c^2}{v_\phi^3} \frac{dv_\phi}{d\omega} = \frac{2\omega_p^2}{\left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right) \omega^3} + \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \omega^4}$$

Reorganizando a expressão:

$$-2 \frac{c^2}{v_\phi^3} \frac{dv_\phi}{d\omega} = \omega_p^2 \frac{2\omega - \omega_c}{\left(1 - \omega_c/\omega\right)^2 \omega^4}$$

Essa expressão zera somente para $\omega = \omega_c/2$. Voltando na expressão, v_ϕ pode ser escrito como:

$$v_\phi(\omega) = c \sqrt{\frac{1 - \omega_c/\omega}{1 - \omega_c/\omega - \omega_p^2/\omega^2}} = c \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega\omega_c}{\omega^2 - \omega\omega_c - \omega_p^2}}$$

Calculando no máximo $\omega = \omega_c/2$:

$$v_\phi(\omega_c/2) = c \sqrt{\frac{-\omega_c^2/2}{-\omega_c^2/2 - \omega_p^2}} = c \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + 2\omega_p^2}} < c$$

Solução dos Exercícios

7. **(Exercício 4.20 - Chen)** Mostre que a velocidade de grupo do *modo apito* é proporcional a $\omega^{1/2}$ se $\omega \ll \omega_c$ e $\epsilon \gg 1$

Solução: Como a velocidade de grupo é dada por: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$ e a relação de dispersão é dada por:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_c}{\omega}} \implies k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \omega_c/\omega}} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega - \omega_c}}$$

Calculando $\frac{dk}{d\omega}$:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\omega} &= \frac{1}{2c} \left(\omega^2 - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega - \omega_c} \right)^{-1/2} \left(\frac{2\omega(\omega - \omega_c)^2 + \omega_p^2\omega_c}{(\omega - \omega_c)^2} \right) \\ v_g &= 2c \left(\omega^2 - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega - \omega_c} \right)^{1/2} \left(\frac{(\omega - \omega_c)^2}{2\omega(\omega - \omega_c)^2 + \omega_p^2\omega_c} \right) \end{aligned}$$

Para $\omega \ll \omega_c \implies \omega - \omega_c \approx -\omega_c$:

$$\begin{aligned} v_g &= c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \right)^{1/2} \frac{\omega_c^2}{2\omega_c^2 + \omega_p^2\omega_c/\omega} \\ &= c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \right)^{1/2} \frac{1}{1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega\omega_c}} \end{aligned}$$

Como, para o *modo apito*, $v_\phi \ll c$ (vimos no exercício anterior que o máximo v_ϕ é $c/2$, logo essa afirmação é verdadeira), então $\omega_p^2/\omega\omega_c \ll 1$. Com isso, botando esse fator em evidência dentro da raiz e usando essa afirmação no outro termo $\omega_p^2/2\omega\omega_c \ll 1$:

$$v_g \approx c \left[\frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \left(\frac{\omega\omega_c}{\omega_p^2} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

Enfim:

$$\boxed{v_g \approx c \sqrt{\frac{\omega\omega_c}{\omega_p^2}} \implies v_g \propto \omega^{1/2}} \tag{65}$$

8. **(Exercício 4.21 - Chen)** Mostre que não há rotação de Faraday para um plasma positrônico (número de pósitrons e elétrons são iguais).

Solução dos Exercícios

Solução: Partindo da equação (4.81), as ondas transversais podem ser escritas como:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{j} / \epsilon_0$$

$$\mathbf{j} = n_0 e (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_e)$$

A partir da equação de movimento de ambas espécies:

$$m \dot{\mathbf{v}}_{p,e} = \pm e \mathbf{E} + \mathbf{v}_{p,e} \times \mathbf{B} \implies -im\omega \mathbf{v}_{p,e} = \pm e \mathbf{E} + \mathbf{v}_{p,e} \times \mathbf{B}$$

em que o sinal de cima é para os pósitrons e o de baixo para os elétrons. Abrindo em componentes:

$$v_x = \frac{ie}{m\omega} (\pm E_x + v_y B_0)$$

$$v_y = \frac{ie}{m\omega} (\pm E_y - v_x B_0)$$

Resolvendo:

$$v_x = \pm \frac{ie}{m\omega} \left(E_x \pm \frac{i\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$v_y = \pm \frac{ie}{m\omega} \left(E_y \mp \frac{i\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

De volta na equação (4.81):

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0} \left(\frac{ie}{m\omega} \left(E_x + i\frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) + i\frac{ie}{m\omega} \left(E_x - i\frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = 2\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} E_x$$

Como $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$, então:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) = \frac{2\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2}$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento para E_y , chegamos no mesmo resultado:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_y = \frac{2\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} E_y$$

Logo, para ondas R e L:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Portanto, para esse tipo de plasma, as ondas R e L são degeneradas e tem a mesma velocidade de fase, enfim, não há rotação de Faraday.

Solução dos Exercícios

9. (**Exercício 4.22 - Chen**) A rotação de Faraday para um feixe de microondas com comprimento de onda de 8 mm num plasma uniforme com campo magnético de 0.1 T . O plano de polarização é rodado por 90° após a onda atravessa 1 m de plasma. Qual é a densidade?

Solução: Pela rotação de Faraday, vimos que a defasagem é o dobro da rotação do plano de polarização. Então:

$$\int_0^1 (k_L - k_R) dz = \pi$$

Como k_L e k_R são independentes de z , então $k_L - k_R = \pi$. Agora, os vetores de onda dessas ondas:

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \mp \omega_c/\omega} \right)^{1/2}$$

Como a onda tem comprimento de 8 mm , então: $f = c/\lambda_0 = 3 \times 10^8 / 8 \times 10^{-3} \implies f = 3.75 \times 10^{10}\text{ Hz} \implies \omega = 2.35 \times 10^{11}\text{ Hz}$. Vamos verificar, a partir de uma estimativa, se é possível expandir a raiz cometendo um erro bem pequeno.

Para isso, vamos verificar se:

$$\frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \mp \omega_c/\omega} \ll 1$$

Como $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$ e $\omega_c = \frac{eB}{m}$, vamos supor que $n_0 = 10^{18}$. Depois, com a resposta, verificaremos se a suposição não é absurda.

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = 1.75 \times 10^{10}\text{ Hz}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}} = 5.63 \times 10^{10}\text{ Hz}$$

Então, se a expressão satisfizer a condição com o denominador $1 - \omega_c/\omega$, ela automaticamente satisfaz para $1 + \omega_c/\omega$. Então:

$$\frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega} \approx 0.06 \ll 1$$

Então, para densidade da ordem 10^{18} , a aproximação é válida. Expandindo a raiz:

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \mp \omega_c/\omega} \right)^{1/2} = \omega \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \mp \omega_c/\omega} \right)$$

Solução dos Exercícios

Logo, $k_L - k_R$ será:

$$\begin{aligned} k_L - k_R &= \frac{\omega \omega_p^2}{2c\omega^2} \left(\frac{1}{1 - \omega_c/\omega} - \frac{1}{1 + \omega_c/\omega} \right) \\ &= \frac{\omega \omega_p^2}{2c\omega^2} \frac{2\omega_c/\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\omega \omega_p^2}{2c\omega^2} \frac{2\omega_c/\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} &= \pi \\ \implies \omega_p^2 &= \frac{\pi c}{\omega_c} (\omega^2 - \omega_c^2) \\ \implies n_0 &= \frac{\pi \epsilon_0 m c}{\omega_c e^2} (\omega^2 - \omega_c^2) \end{aligned}$$

Colocando os valores para ω , ω_c , temos:

$$\boxed{n_0 = 9.3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}} \tag{66}$$

Ou seja, a nossa suposição para validar a aproximação foi confirmada, logo, a resposta obtida é válida.

10. **(Exercício 4.23 - Chen)** Mostre que o ângulo da rotação de Faraday, em graus, de uma onda transversal linearmente polarizada propagando ao longo de B_0 é dado por:

$$\theta = 1.5 \times 10^{-11} \lambda_0^2 \int_0^L B(z) n_e(z) dz$$

em que λ_0 é o comprimento de onda no vácuo e L é o comprimento do caminho no plasma. Assuma $\omega^2 \gg \omega_p^2, \omega_c^2$

Solução: Lembremos que a defasagem é o dobro da rotação do plano de polarização, logo:

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_0^L (k_L - k_R) dz$$

em que $k_{R,L}$ é:

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mp \frac{\omega_c}{\omega}}$$

Solução dos Exercícios

Como $\omega^2 \gg \omega_p^2, \omega_c^2$, podemos escrever:

$$\sqrt{1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 \mp \omega_c/\omega}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 \mp \omega_c/\omega}$$

Logo:

$$k_L - k_R = \frac{\omega \omega_p^2}{2c\omega^2} \frac{2\omega_c/\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{2c\omega} \frac{2\omega_c\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{c(\omega^2 - \omega_c^2)}$$

Como $\omega \gg \omega_c$, então $\omega^2 - \omega_c^2 \approx \omega^2$ e $c = \omega/k_0 = \omega \lambda_0^2/(2\pi)$, logo:

$$k_L - k_R = \frac{\omega_p^2 \omega_c \lambda_0^2}{4\pi^2 c^3}$$

Substituindo as fórmulas para ω_p^2 e ω_c :

$$\alpha = \frac{e^3}{8\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \lambda_0^2 \int_0^L n_e(z) B(z) dz$$

Multiplicando ambos os lados por $360/2\pi$ para o ângulo fique em graus e calculando as constantes:

$$\boxed{\alpha = 1.5 \times 10^{-11} \lambda_0^2 \int_0^L B(z) n_e(z) dz} \quad (67)$$

11. **(Exercício 4.24 - Chen)** Em alguns experimentos de fusão a base de laser em que um plasma é criado por um pulso de luz com comprimento de onda de $1.06 \mu m$ atingindo um alvo sólido, campos magnéticos muito intensos são criados por correntes termonucleares. Esses campos podem ser medidos pela rotação de Faraday da luz de frequência dobrada ($\lambda_0 = 0.53 \mu m$) gerado pelo mesmo laser. Se $B = 100 T$, $n = 10^{27} m^{-3}$ e comprimento do caminho de $30 \mu m$, qual é o ângulo da rotação de Faraday em graus? (Assuma $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$)

Solução: Usando a fórmula derivada no último exercício:

$$\alpha = 1.5 \times 10^{-11} \lambda_0^2 \int_0^L B(z) n_e(z) dz$$

em que o campo magnético e a densidade são constantes. Então:

$$1.5 \times 10^{-11} \lambda_0^2 L B n_e$$

Colocando os valores:

$$\boxed{\alpha \approx 12.6^\circ} \quad (68)$$

Aulas 21-30/06

- (Exercício 5.1 - Chen)** A seção de choque entre elétron e neutron para elétrons de 2 eV em He é aproximadamente $6\pi a_0^2$, em que $a_0 = 0.53 \times 10^{-8} \text{ cm}$ é o raio de Bohr para o átomo de Hidrogênio. Uma coluna positiva sem campo magnético tem $p = 1 \text{ Torr}$ de He (a temperatura ambiente) e $k_T T_e = 2 \text{ eV}$.
 - Calcule o coeficiente de difusão dos elétrons em m^2/s , assumindo que a média $\overline{\sigma v}$ sobre a velocidade é igual a σv para elétrons 2 eV.
 - Se a densidade de corrente ao longo da coluna é de $2 \text{ kA}/\text{m}^2$ e a densidade do plasma é de 10^{16} m^{-3} , qual é o campo elétrico na coluna?

Solução:

- (a) Sabemos que o coeficiente de difusão é dado por:

$$D = \frac{k_T T}{m \nu}$$

Então, primeiramente, precisamos achar ν , que é dado por $\nu = n_0 \overline{\sigma v}$. Então:

$$\sigma = 6\pi a_0^2 = 6\pi \times (0.53 \times 10^{-10})^2 \approx 5.29 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

$$\frac{mv^2}{2} = k_T T \implies v = \sqrt{\frac{2k_T T}{m}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx 8.38 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Para uma pressão de 1 Torr e temperatura ambiente, a densidade pode ser extraída a partir do exercício 1.1. Como lá a pressão era de 10^{-3} Torr , então só convertamos por um fator 1000. Logo: $n_0 = 3.3 \times 10^{19} \times 10^3 = 3.3 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$

Logo:

$$\nu = n_0 \overline{\sigma v} = n_0 \sigma v = 3.3 \times 10^{22} \times 5.29 \times 10^{-20} \times 8.38 \times 10^5 \implies \nu = 1.46 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

Enfim:

$$D_e = \frac{k_T T_e}{m \nu} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31} \times 1.46 \times 10^9} \approx 2.4 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$$

- (b) Pela equação de movimento (equação 5.6) e tomando $\nabla n = 0$ (densidade constante):

$$v = \frac{e}{m\nu} E$$

Multiplicando ambos lados por ne , então $nev = j$. Logo:

$$E = \frac{m\nu}{ne^2} j$$

Colocando os valores:

$$E = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.46 \times 10^9}{10^{16} \times (1.67 \times 10^{-19})^2} \times 2 \times 10^3 = 1.04 \times 10^4 \text{ V/m}$$

2. Um plasma fracamente ionizado num poço infinito tem uma distribuição de densidade dada por:

$$n(x) = n_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad -L \leq x \leq L$$

O plasma decai tanto por difusão quanto por recombinação. Se $L = 0.03 \text{ m}$, $D = 0.4 \text{ m}^2/\text{s}$ e $\alpha = 10^{-15} \text{ m}^3/\text{s}$, para qual densidade o ritmo de perda por difusão será igual ao ritmo de perda por recombinação:

Solução: Sabemos que os processos de difusão são dados por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \Gamma$$

em que Γ , pela Lei de Fick, é:

$$\gamma = -D\nabla n$$

Então:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n$$

Pelo processo de recombinação, a variação temporal da densidade é:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n^2$$

Solução dos Exercícios

Então:

$$\nabla^2 n = -n_0 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = -\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 n$$

Enfim:

$$D\nabla^2 n = -\alpha n^2$$

$$-D\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 n = -\alpha n^2 \implies n = \frac{D}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$$

Colocando os valores:

$$n = \frac{0.4}{10^{-15}} \left(\frac{\pi}{2 \times 0.03}\right)^2 = 1.1 \times 10^{18}$$

3. Um plasma fracamente ionizado é criado num cubo de alumínio de lado L . Ele decai por difusão ambipolar.

- (a) Escreva a expressão para a distribuição de densidade no menor modo de difusão.
 (b) Defina o significado da constante tempo de decaimento e calcule para $D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$

Solução:

- (a) Dentro de uma caixa, a equação espacial da difusão é da forma:

$$\nabla^2 \bar{n} = -\frac{1}{D\tau} \bar{n}$$

Usando separação de variáveis, teremos 3 equações da forma:

$$\frac{d^2 \bar{n}_i}{dx_i^2} = -\frac{1}{D\tau} \bar{n}_i$$

A solução dessas equações é da forma:

$$\bar{n}_i(x_i) = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau}}\right) + B \cos\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau}}\right)$$

Como nas paredes $x_i = \pm L/2$ a densidade deve ser 0, então: $A = 0$ e:

$$\frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{L}{2\sqrt{D\tau}} \implies \frac{1}{\sqrt{D\tau}} = \frac{(2n+1)\pi}{L} \implies \tau = \sqrt{\frac{(2n+1)L}{\pi}} \frac{1}{D}$$

Tomando só o modo fundamental ($n = 0 \implies 2n + 1 = 1$), então:

$$n(x, y, z, t) = n_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{-t/\tau}$$

Solução dos Exercícios

- (b) A constante do tempo de decaimento é o tempo que leva para que a densidade diminua para $1/e$ da quantidade inicial.

Supondo $L = 1\text{ m}$:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{1}{10^{-3}}} \implies \tau \approx 564.2\text{ s}$$

4. **(Exercício 5.4 - Chen)** Uma coluna longa positiva e cilíndrica tem $B = 0.2\text{ T}$, $kT_i = 0.1\text{ eV}$ e os outros parâmetros iguais ao exercício 5.1. O perfil de densidade é:

$$n(r) = n_0 J_0 \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right)$$

com a condição de contorno $n = 0$ em $r = a = 1\text{ cm}$. Note que $J_0(z) = 0$ em $z = 2.4$

- (a) Mostre que o coeficiente de difusão ambipolar usado acima é aproximadamente $D_{\perp e}$
- (b) Desprezando a recombinação e perdas pelas extremidades da coluna, calcule o tempo de confinamento τ .

Solução:

- (a) Para verificar isso, vamos verificar se μ_e/μ_i é grande ou pequeno. Usando o resultado do exercício 5.1: $\nu_{e,n} = 1.38 \times 10^7$ e como $q/m\nu; \nu_j \approx n_n \sigma v_j$, então:

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} = \frac{m_i \nu_{i,n}}{m_e \nu_{e,n}}$$

Como $\nu_{n,j} \propto v_j \propto m^{-1/2}$, uma vez que a seção de choque de uma partícula neutra com uma partícula positiva é considerada aproximadamente a mesma que a com uma negativa. Então:

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \approx \sqrt{\frac{4 \times 1.67}{9.11}} \times 10^4 \approx 85.7$$

uma vez que o exercício 5.1 considerada as partículas como partículas α .

Como $\mu_{\perp,j} = \mu_j(1 + \omega_{cj}^2 \tau_{jn}^2)$, então:

$$\frac{\mu_{\perp,e}}{\mu_{\perp,i}} = \frac{\mu_e (1 + \omega_c^2 \tau_{e,n}^2)}{\mu_i (1 + \Omega_c^2 \tau_{i,n}^2)}$$

Solução dos Exercícios

Como $\omega_c = eB/m$ e $\Omega_c = eB/M \implies \Omega_c = \omega_c \frac{m}{M}$. Como $\tau \propto D \propto \mu \propto m^{-1/2}$, então: $\tau_{i,n} = \tau_{e,n} \sqrt{m_i/m_e}$. Logo:

$$\omega_c \tau_{e,n} = \frac{eB}{m_e \nu_{e,n}} \approx 24.05 \implies 1 + \omega_c^2 \tau_{e,n}^2 \approx 580$$

Então:

$$\Omega_c \tau_{i,n} = \omega_c \tau_{e,n} \frac{m_e}{m_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} = 24 \times \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} = 0.28 \implies 1 + \Omega_c^2 \tau_{i,n}^2 \approx 1.08$$

Logo:

$$\frac{\mu_{\perp,e}}{\mu_{\perp,i}} = \frac{\mu_e (1 + \omega_c^2 \tau_{e,n}^2)}{\mu_i (1 + \Omega_c^2 \tau_{i,n}^2)} \approx 85.7 \times \frac{1.08}{580} \approx 0.16 \ll 1$$

Como $\mu_{i,\perp} \gg \mu_{e,\perp}$, então:

$$D_{a,\perp} = \frac{\mu_{i,\perp} D_{i,\perp} + \mu_{e,\perp} D_{e,\perp}}{\mu_{i,\perp} + \mu_{e,\perp}} \approx D_{e,\perp} + \frac{\mu_{\perp,e}}{\mu_{\perp,i}} D_{i,\perp} = D_{e,\perp} + 0.16 D_{i,\perp}$$

Mas como: $D = \frac{kT}{e} \mu$, então:

$$\frac{D_{i,\perp}}{D_{e,\perp}} = \frac{T_i \mu_{\perp,i}}{T_e \mu_{\perp,e}} = \frac{1 \times 0.1}{0.16 \times 2} = 0.3$$

Enfim:

$$D_{a,\perp} = D_{e,\perp} \left(1 + 0.16 \frac{D_{i,\perp}}{D_{e,\perp}}\right) = D_{e,\perp} (1 + 0.16 \times 0.3) \implies D_{a,\perp} = 1.05 D_{e,\perp} \approx D_{e,\perp}$$

(b) Como $J_0(z) = 0$ em $z = 2.4$ e $n(a) = 0$, então:

$$\frac{a}{\sqrt{D} \tau} = 2.4 \implies \tau = \frac{a^2}{2.4^2 D_{a,\perp}}$$

Uma vez que a difusão é perpendicular. Então:

$$\tau = \frac{a^2}{2.4^2 D_{a,\perp}} = \frac{10^{-2}}{2.4^2 \times 1.05 \times 580 / (2.4 \times 10^2)} \implies \tau \approx 42 \mu s$$

5. **(Exercício 5.7 - Chen)** Para o perfil de densidade da figura 5.7, derive uma expressão para a densidade máxima n_0 em termos da força da fonte Q por pares íon-elétron por m^2

Solução: Como $n(r) = n_0(1 - x/L)$ e a Lei de Fick (em 1D) é: $\gamma = -D \frac{dn}{dx}$:

$$\gamma = D n_0/L$$

Como a força da fonte é $Q = 2\gamma$:

$$Q = 2D n_0/L \implies n_0 = \frac{QL}{2D}$$

6. **(Exercício 5.6 - Chen)** Você faz um experimento de recombinação num gás fracamente ionizado em que o maior mecanismo de perda é a recombinação. Você cria um plasma de densidade 10^{20} m^{-3} por meio de uma repentina rajada de radiação ultravioleta e observa que a densidade decai para metade do valor em 10 ms . Qual é o valor do coeficiente de recombinação α ? Dê unidades.

Solução: Por meio da equação 5.40:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} + \alpha t$$

Como perdeu metade em 10 ms , então:

$$\frac{2}{n_0} = \frac{1}{n_0} + \alpha t \implies \alpha = \frac{1}{n_0 t} \implies \alpha = \frac{10^2}{10^{20}} \implies \alpha = 10^{-18} \text{ m}^3/\text{s}$$

7. **(Exercício 5.7)** Mostre que o caminho médio livre λ_{ei} para colisões elétron-íon é proporcional a T_e^2

Solução: O caminho médio livre para colisões elétron-íon pode ser descrito como:

$$\lambda_{ei} \approx v_{the} \tau_{ei} = \frac{v_{th,e}}{\nu_{ei}}$$

em que $\tau_{e,i}$ é o tempo de colisão médio entre íons e elétrons. Como $v_{th,e} \propto T_e^{1/2}$ e $\nu_{e,i} \propto T_e^{-3/2}$:

$$\lambda_{ei} \propto T_e^2$$

Solução dos Exercícios

8. **(Exercício 5.8 - Chen)** Tokamak é uma câmara toroidal de plasma em que current é induzida por meio de um campo elétrico aplicado ao longo de \mathbf{B} num plasma totalmente ionizado. Quantos V/m devem ser aplicados para que induza uma corrente total de plasma de 200 kA num plasma de $kT_e = 500\text{ eV}$ e uma área de seção transversal de 75 cm^2 ?

Solução: Pela Lei de Ohm: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \implies \mathbf{E} = \nu \mathbf{J}$, em que ν é a resistividade. Como a corrente é induzida na direção do campo magnético, então a resistividade será somente a resistividade paralela de Spitzer:

$$\nu_{\parallel} = \frac{\pi e^2 m_e^{1/2}}{(4\pi \epsilon_0)^2 (kT_e)^{3/2}} \ln \Lambda \approx \frac{5.2 \times 10^{-5} \ln \Lambda}{T_e^{3/2}}$$

em que T_e agora é dado em eV e assumimos que o plasma é de Hidrogênio. Aproximando $\ln \Lambda \approx 10$:

$$\nu_{\parallel} = \frac{5.2 \times 10^{-5} \times 10}{500^{3/2}} \approx 4.65 \times 10^{-8} \Omega.m$$

A densidade média de corrente é:

$$J = I/A = \frac{2 \times 10^5}{75 \times 10^{-4}} \approx 2.67 \times 10^7 \text{ A/m}^2$$

Enfim:

$$E \approx \eta_{\perp} J \implies E = 1.2 \text{ V/m}$$

9. **(Exercício 5.9 - Chen)** Suponha que o plasma num reator de fusão está num formato de cilindro de diâmetro 1.2 m e comprimento de 100 m. Um campo magnético de 5 T, é uniforme exceto para pequenas regiões de espelho magnético nas extremidades, em que podemos desprezar. Outros parâmetros são $kT_i = 20\text{ keV}$, $kT_e = 10\text{ keV}$ e $n = 10^{21}\text{ m}^{-3}$ em $r = 0$. O perfil de densidade é definido experimentalmente por aproximadamente ser o gráfico da figura 5.9.

- (a) Assumindo difusão clássica, calcule D_{\perp} em $r = 0.5\text{ m}$
- (b) Calcule $\frac{dN}{dt}$, o número total de pares íon-elétron saindo da região central radialmente por segundo.
- (c) Estime o tempo de confinamento τ por $\tau \approx -\frac{N}{\frac{dN}{dt}}$. Note: uma estimativa grosseira é tudo que é esperado para esse exercício. O perfil de densidade foi simplificado e não é realista.

Solução dos Exercícios

Solução:

- (a) Como as partículas se difundem radialmente, então queremos o coeficiente de difusão perpendicular, dado pela equação 5.99:

$$D_{\perp} = \frac{\eta_{\perp} n (k T_e + k T_i)}{B^2}$$

A resistividade perpendicular é dada por:

$$\eta_{\perp} \approx 2 \times \eta_{\parallel} = 2 \times \frac{5.2 \times 10^{-5} \ln \Lambda}{T_e^{3/2}}$$

Tomando $\ln \Lambda = 10$, temos que $\eta_{\perp} \approx 1 \times 10^{-9} \Omega.m$. Então:

$$D_{\perp} = \frac{\eta_{\perp} n (k T_e + k T_i)}{B^2} = \frac{10^{-9} \times 10^{21} \times 30 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19}}{5^2} = 3.0 \times 10^{-4} m^2/s$$

- (b) Como o perfil de densidade é constante na região central, então o número de pares saindo do centro será a integral de volume de $\frac{dn}{dt}$, que é o volume da região vezes o fluxo de partículas saindo esse região:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2\pi r L \gamma_r$$

Pela Lei de Fick, $\gamma_r = -D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial r}$. Podemos aproximar $\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{\Delta n}{\Delta r} = n/0.1$. Então:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -2\pi \times (0.5) \times 100 \times 3.0 \times 10^{-4} \times 10^{22} = -6 \times 10^{20} s^{-1}$$

- (c) Por meio da aproximação dada:

$$\tau \approx -\frac{N}{\frac{dN}{dt}}$$

Agora, $N = \int n dV \approx 9.50 \times 10^{22}$, então:

$$\tau = \frac{9.50 \times 10^{22}}{6 \times 10^{20}} = 150 s$$

10. **(Exercício 5.10 - Chen)** Estime o tempo de difusão clássica para um cilindro de plasma longo com $r = 10 cm$, $n = 10^{21} m^{-3}$, $k T_e = k T_i = 10 keV$ e $B = 5 T$

Solução dos Exercícios

Solução: O tempo da difusão clássica é dado pela relação:

$$\begin{aligned}\tau &\approx \frac{R^2}{2D_{\perp}} \\ D_{\perp} &= 2\eta_{\parallel} \frac{n(kT_e + kT_i)}{B^2} = 10.4 \times 10^{-5} \times \frac{10}{(10^4)^{3/2}} \times \frac{10^{21}(20 \times 10^3) \times 1.6 \times 10^{-19}}{5^2} \\ &= 1.33 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

Então:

$$\tau \approx \frac{(10^{-1})^2}{2 \times 1.33 \times 10^{-4}} \approx 38 \text{ s}$$

11. (**Exercício 5.11 - Chen**) Um plasma cilíndrico com uma distribuição de densidade:

$$n = n_0(1 - r^2/a^2)$$

onde $a = 10 \text{ cm}$ e $n_0 = 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Se $kT_e = 100 \text{ eV}$, $kT_i = 0$ e o campo magnético axial $B_0 = 1 \text{ T}$, qual é a razão entre os coeficientes clássico e o de Bohm perpendiculares a B?

Solução: O coeficiente de difusão perpendicular a B:

$$D_{\perp} = \eta_{\perp} \frac{n(kT_e + kT_i)}{B^2}$$

onde $\eta_{\perp} = 2\eta_{\parallel} = 10.4 \times 10^{-5} \frac{\ln \Lambda}{(T_e(\text{eV}))^{3/2}}$. Calculando para o centro $r = 0$, temos que:

$$D_{\perp} = 10.4 \times 10^{-5} \frac{10}{100^{3/2}} \times \frac{10^{19} \times 100 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1} \approx 1.66 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Já para a Difusão de Bohm:

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{kT_e}{eB} = \frac{1}{16} \times \frac{100 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m}^2/\text{s}$$

Enfim:

$$\frac{D_B}{D_{\perp}} = \frac{6.25}{1.66 \times 10^{-4}} \approx 3.7 \times 10^4$$

12. (**Exercício 5.12 - Chen**) Um plasma fracamente ionizado ainda pode ser governado pela resistência de Spitzer se $\nu_{ei} \gg \nu_{e0}$, em que ν_{e0} é a frequência de colisão entre elétron e partícula neutra. Abaixo está algumas informações sobre a seção de choque da transferência de momento entre elétron e partícula neutra em Angstroms ao quadrado (Å^2):

	$E = 2 \text{ eV}$	$E = 10 \text{ eV}$
Hélio	6.3	4.1
Argônio	2.5	13.8

Para plasmas de He^+ e Ar^+ com $kT_e = 2$ e 10 eV (os 4 casos), estime a fração de ionização $f = \frac{n_i}{n_0+n_i}$ em que $\nu_{ei} = \nu_{e0}$, assumindo que o valor $\sigma \bar{v}(T_e)$ pode ser grosseiramente aproximado por $\sigma(E)|\bar{v}|$, onde $E = kT_e$. (Dica: para ν_{e0} use a equação 7.11 e para ν_{ei} use as equações 5.62 e 5.76)

Solução: Usando a aproximação dada:

$$\bar{v} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m_e}}$$

$$\bar{\nu}_{ei} = \frac{n_i e^2}{m_e} \eta = \frac{n_i e^2}{m_e} \frac{5.2 \times 10^{-5} Z}{T^{3/2}(\text{eV})} \ln \Lambda$$

Pela equação 5.4: $\nu_{e0} = n_0 \sigma \bar{v}$. Usando essas expressões, se $\nu_{e0} = \nu_{ei}$:

$$2n_0 \sigma \sqrt{\frac{2kT}{\pi m_e}} = \frac{n_i e^2}{m_e} \frac{5.2 \times 10^{-5} Z}{T^{3/2}(\text{eV})} \ln \Lambda$$

$$n_i = \frac{2\sigma m_e T^{3/2}(\text{eV})}{5.2 \times 10^{-5} Z e^2 \ln \Lambda} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m_e}} n_0$$

Tomando $\ln \Lambda = 10$, $Z = 1$ (plasma de íons He^+ ou Ar^+), em $A = 4$ para He e $A = 40$ para Ar. Para He^+ com $kT_e = 2 \text{ eV}$:

$$n_i = 0.0115 n_0 \quad (\text{Para } He^+ \text{ em } 2 \text{ eV}) \implies f = \frac{0.0115}{1.0115} \approx 0.0114$$

$$n_i = 0.187 n_0 \quad (\text{Para } He^+ \text{ em } 10 \text{ eV}) \implies f = \frac{0.187}{1.187} \approx 0.158$$

$$n_i = 0.0046 n_0 \quad (\text{Para } Ar^+ \text{ em } 2 \text{ eV}) \implies f = \frac{0.0046}{1.0046} \approx 0.0046$$

$$n_i = 0.632 n_0 \quad (\text{Para } Ar^+ \text{ em } 10 \text{ eV}) \implies f = \frac{0.632}{1.632} \approx 0.387$$

13. **(Exercício 5.13 - Chen)** Um plasma num stellarator toroidal é aquecido ohmicamente por uma corrente de $10^5 A/m^2$ ao longo de \mathbf{B} . A densidade é uniforme em $n = 10^{19} m^{-3}$ e não muda. Se o aquecimento Joule vai com ηj^2 para os elétrons. Calcule a taxa de crescimento de kT_e em $eV/\mu s$ para o instante que $kT_e = 10 eV$.

Solução: Como a corrente é paralela a \mathbf{B} , então usaremos a resistividade paralela:

$$\eta_{\parallel} = 5.2 \times 10^{-5} \frac{\ln \Lambda}{T_e^{3/2}} = \frac{5.2 \times 10^{-4}}{10^{3/2}} = 1.64 \times 10^{-5} \Omega.m$$

Logo:

$$\eta_{\parallel} j^2 = 1.64 \times 10^{-5} (10^5)^2 = 1.64 \times 10^5 W/m^3 = 1.02 \times 10^{24} eV/m^3.s$$

Como isso é $\frac{dE}{dt}$, então:

$$E = \frac{3}{2} n k T_e \implies \frac{dE}{dt} = \frac{3}{2} n \frac{dT_{eV}}{dt}$$

$$\frac{dT_{eV}}{dt} = \frac{2}{3 \times 10^{19}} \times 1.02 \times 10^{24} \implies \frac{dT_{eV}}{dt} = 0.67 \times 10^5 eV/s = 0.067 eV/\mu s$$

14. **(Exercício 5.14 - Chen)** Num θ -pinch, uma grande corrente é descarregada por meio de uma espira de 1 volta. O crescimento do campo magnético dentro da espira induz uma corrente de superfície no plasma altamente condutivo. A corrente superficial tem direção oposta à corrente na espira e, então, mantém o fluxo magnético fora do plasma. A pressão do campo magnético entre a espira e o plasma, logo, comprime o plasma. Isso só funciona se o campo magnético não penetra o plasma durante o pulso. Usando a resistividade de Spitzer, estime o maior comprimento do pulso para um θ -pinch de Hidrogênio, em que as condições iniciais são $kT_e = 10 eV$, $n = 10^{22} m^{-3}$, $r = 2 cm$, se o campo penetrar 1/10 do caminho até o eixo.

Solução: Essa questão está no capítulo errado do livro. Era para estar no capítulo 6. Usando a relação 6.16:

$$\tau = \frac{\mu_0 L^2}{\eta}$$

Como $L = r/10 = 2 \times 10^{-3}$ e usando a resistividade de Spitzer, temos que:

$$\tau = \frac{1.25 \times 10^{-6} (2 \times 10^{-3})^2}{\frac{5.2 \times 10^{-5} \times 10}{10^{3/2}}} \implies \tau = 3 \times 10^{-7} s$$

15. (**Exercício 5.15 - Chen**) Considere um plasma axissimétrico cilíndrico com $\mathbf{E} = E \hat{r}$ e $\mathbf{B} = B \hat{z}$ e $\nabla p_i = \nabla p_e = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{r}$. Se desprezarmos o termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, o que é equivalente a desprezar a força centrífuga, as equações estacionárias para 2 fluidos podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - e^2 n^2 \eta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= 0 \\ -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - e^2 n^2 \eta(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) &= 0 \end{aligned}$$

- (a) A partir da componente θ dessas equações, mostre que $v_{ir} = v_{er}$
 (b) A partir da componente r dessas equações, mostre que $v_{j\theta} = v_E + v_{Dj}$
 (c) Ache uma expressão para v_{ir} , mostrando que ela não depende de E_r

Solução:

- (a) Tomando a componente θ :

$$\begin{aligned} -en v_{ir} B - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial \theta}}_{=0} - e^2 n^2 \eta(v_{i\theta} - v_{e\theta}) &= 0 \\ en v_{er} B - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial p_e}{\partial \theta}}_{=0} - e^2 n^2 \eta(v_{e\theta} - v_{i\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Somando as equações:

$$(-v_{ir} + v_{er})B = 0 \implies v_{ir} = v_{er}$$

- (b) Tomando a componente r :

$$\begin{aligned} en(E + v_{i\theta} B) - \frac{\partial p_i}{\partial r} - e^2 n^2 \eta(v_{ir} - v_{er}) &= 0 \\ -en(E + v_{e\theta} B) - \frac{\partial p_e}{\partial r} - e^2 n^2 \eta(v_{er} - v_{ir}) &= 0 \end{aligned}$$

Como $v_{ir} = v_{er}$, o último termo se anula, então:

$$\begin{aligned} v_{i\theta} &= -\frac{E_r}{B} + \frac{1}{en B} \frac{\partial p_i}{\partial r} \\ v_{e\theta} &= -\frac{E_r}{B} - \frac{1}{en B} \frac{\partial p_e}{\partial r} \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \implies v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = E/B$ e $\mathbf{v}_{Dj} = \pm \frac{\nabla p_j \times \mathbf{B}}{enB^2} \implies v_{Dj} = \pm \frac{\nabla p_j}{enB}$, então:

$$v_{i\theta} = v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} + v_{Di}$$

$$v_{e\theta} = v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} + v_{De}$$

(c) A partir da primeira equação do item (a):

$$-enB v_{ir} = e^2 n^2 \eta (v_{i\theta} - v_{e\theta}) = 0 \implies v_{ir} = \frac{en\eta}{B} (v_{Di} - v_{De})$$

$$v_{ir} = \frac{en\eta}{B} \frac{1}{enB} \left(\frac{\partial p_e}{\partial r} + \frac{\partial p_i}{\partial r} \right)$$

$$v_{ir} = \frac{\eta}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r}$$

A expressão também vale para v_{er}

16. (**Exercício 5.16 - Chen**) Use a equação de movimento MHD para um fluido e a equação de continuidade de massa para calcular a velocidade de fase de uma onda acústica para íons num plasma não-magnetizado e uniforme com $T_e \gg T_i$

Solução: Se o plasma é uniforme então: $p = nkT \implies \nabla p = nk \nabla T$, então a equação de movimento fica da forma:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - nk \nabla T$$

em que desprezamos a ação da gravidade. Já a equação da continuidade de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0$$

Tomando o divergente da equação de movimento, em que o plasma não é magnetizado ($\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$):

$$\nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = -kT \nabla^2 n$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \rho + \rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = -kT \nabla^2 n$$

Substituindo $\nabla \cdot \mathbf{v}$ pela equação da continuidade de massa: $\nabla \cdot \mathbf{v} = -1/\rho (\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho)$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \rho - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -kT_e \nabla^2 n$$

Solução dos Exercícios

Substituindo a equação da continuidade em $\frac{\partial \rho}{\partial t}$:

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho) = -k T_e \nabla^2 n$$

Perceba que esse segundo termo do lado esquerdo é um termo de segunda ordem em \mathbf{v} . Como o Chen tem desprezado termos de segunda ordem, então vamos também:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{k T_e}{m} \nabla^2 n = 0$$

em que $\rho = (M_e) n \approx M n$

Essa é a equação de onda, em que a velocidade de fase é a velocidade de som: $v_s = \sqrt{\frac{k T_e}{M}}$.

17. **(Exercício 5.17 - Chen)** Calcule a atenuação resistiva das ondas de Alfvén derivando a relação de dispersão das equações de um fluido (5.85) e (5.91) e as equações de Maxwell (4.72) e (4.77). Linearize as equações e despreze a gravidade, corrente deslocamento e ∇p .

(a) Mostre que:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \epsilon_0 \left(\frac{B_0^2}{\rho_0} - i \omega \eta \right)$$

(b) Encontre uma expressão explícita para $\text{Im}(k)$ quando ω é real e η é pequeno.

Solução:

(a) Linearizando as equações, em que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{j}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 &= \eta \mathbf{j}_1 \\ \nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \mu_0 \mathbf{j}_1 \end{aligned}$$

Se tomar outro rotacional na Lei de Faraday:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}_1 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t}$$

Tomando que as quantidades de primeira ordem sejam da forma $A_1 = \bar{A}_1 e^{i(kx - \omega t)}$, vamos ter:

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = -\mu_0(-i\omega)\mathbf{j}_1$$

Usando a identidade do produto vetorial duplo:

$$-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{k} + k^2 \mathbf{E}_1 = -i\omega \mu_0 \mathbf{j}_1$$

Nesse exercício, vamos tratar somente de ondas transversais, então $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Enfim:

$$k^2 \mathbf{E}_1 = -i\omega \mu_0 \mathbf{j}_1$$

Pegando a Lei de Ohm e fazendo produto com \mathbf{B}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 + \underbrace{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0}_{=-B_0^2 \mathbf{v}_{1\perp}} &= \eta \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{v}_{1\perp} &= \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} - \frac{\eta \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação linearizada:

$$i\omega \rho_0 \left(\frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} - \frac{\eta \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \right) = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0$$

Não precisamos nos preocupar com a componente paralela, pois a própria derivada temporal dela nessa equação é 0 (devido ao termo $\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0$). Como vimos que \mathbf{E}_1 e \mathbf{j}_1 estão na mesma direção, então:

$$-i\omega \rho_0 \left(\frac{\mathbf{E}_1}{B_0^2} - \frac{\eta \mathbf{j}_1}{B_0} \right) = \mathbf{j}_1 \implies \frac{E_1}{B_0^2} = \left(\frac{i}{\omega \rho_0} + \frac{\eta}{B_0} \right) j_1 \implies \frac{E_1}{B_0} = \left(\frac{iB_0}{\omega \rho_0} + \frac{\eta}{B_0} \right) j_1$$

Finalmente, de volta para a relação entre \mathbf{E}_1 e \mathbf{j}_1 :

$$k^2 E_1 = -i\omega \mu_0 j_1 \implies k^2 E_1 = \frac{-i\omega \mu_0}{B_0} \left(\frac{iB_0}{\omega \rho_0} + \frac{\eta}{B_0} \right)^{-1} E_1$$

Rearranjando os termos, por fim:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \mu_0 \left(\frac{B_0^2}{\rho_0} - i\omega \eta \right)$$

Solução dos Exercícios

(b) Partindo da relação de dispersão:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\mu_0 \omega^2} \left(\frac{B_0^2}{\rho_0} - i\omega\eta \right)^{-1/2} \\ &= \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \rho_0}{B_0^2}} \left(1 - \frac{i\omega\eta \rho_0}{B_0^2} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Pegando a parte imaginária:

$$\text{Im}\{k\} = \omega \frac{\omega\eta\rho_0}{2B_0^2} \sqrt{\frac{\mu_0 \rho_0}{B_0^2}} = \frac{\omega^2 \eta \sqrt{\mu_0}}{2} \left(\frac{\rho_0}{B_0^2} \right)^{3/2}$$

Para η pequeno, $\omega \approx k \sqrt{\frac{\mu_0 B_0^2}{\rho_0}}$, em que $k = \text{Re}\{k\}$. Enfim:

$$\text{Im}\{k\} \approx \frac{\eta k^2}{2\sqrt{\frac{\mu_0 B_0^2}{\rho_0}}}$$

18. **(Exercício 5.18 - Chen)** Se um plasma cilíndrico se difunde no ritmo de Bohm, calcule o perfil de densidade radial estacionário, ignorando o fato de que possa ser instável. Assuma que a densidade é 0 em $r = \infty$ e tem valor n_0 em $r = r_0$.
-

Solução: Como a difusão é de Bohm, usando a equação (5.112) e a Lei de Fick:

$$\tau \approx -\frac{nR}{2D_B \frac{\partial n}{\partial r}} = -\frac{8eBnR}{kT_e \frac{\partial n}{\partial r}} \implies \frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{8eBnR}{kT_e \tau} n \implies n(r) = A \exp\left(-\frac{8eBnR}{kT_e \tau} r\right)$$

O contorno $r \rightarrow \infty \implies n = 0$ já é satisfeito. Já o contorno $r = r_0 \implies n = n_0$, a constante fica:

$$n_0 = A \exp\left(-\frac{8eBnR}{kT_e \tau} r_0\right) \implies A = n_0 \exp\left(\frac{8eBnR}{kT_e \tau} r_0\right)$$

Por fim:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{8eBnR}{kT_e \tau} (r - r_0)\right)$$

19. **(Exercício 5.19 - Chen)** Uma coluna cilíndrica de plasma num campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_z = \hat{z}$ carrega uma densidade de corrente uniforme $\mathbf{j} = j_z \hat{z}$, em que \hat{z} é o versor paralelo ao eixo do cilindro.

Solução dos Exercícios

- (a) Calcule o campo magnético $\mathbf{B}(r)$ produzido pela corrente do plasma.
- (b) Escreva uma expressão para a deriva ∇B de uma partícula carregada com $v_{\parallel} = 0$ em termos de B_z , j_z , r , v_{\perp} , q e m . Você pode assumir que o campo calculado em (a) é pequeno comparado com B_z (mas não nulo).
- (c) Se o plasma tem resistividade elétrica, então também há um campo elétrico $\mathbf{E} = E_z \hat{z}$. Calcule o drift azimuthal dos elétrons devido a esse campo, tomando conta da helicidade do campo \mathbf{B} .
- (d) Desenhe um diagrama mostrando a direção das derivas dos itens (b) e (c) para íons e elétrons num plano (r, θ) .

Solução:

- (a) Pela Lei de Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \mu_0 j_z$$

Por questões de simetria azimuthal, $\frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0$, então:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\theta}) = \mu_0 j_z \implies r B_{\theta} = \frac{1}{2} \mu_0 j_z r^2 \implies B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 j_z}{2} r$$

- (b) A velocidade de deriva ∇B é dada por:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

Considerando $B_z \gg B_{\theta} \implies B^2 \approx B_z^2$. Além disso: $B = \sqrt{B_z^2 + B_{\theta}^2} \implies \nabla B \approx \frac{1}{B_z} B_{\theta} \nabla B_{\theta}$. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\nabla B} &= \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{1}{B_z^2} (B_{\theta} \hat{\theta} + B_z \hat{z}) \times \frac{1}{B_z} (B_{\theta} \nabla B_{\theta}) \\ &= \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mu_0 j_z}{2 B_z^3} (B_{\theta} \hat{\theta} + B_z \hat{z}) \times (B_{\theta} \hat{r}) \end{aligned}$$

Como $B_{\theta} \ll B_z$, então os termos com B_{θ}^2 serão desprezados. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\nabla B} &= \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mu_0 j_z}{2 B_z^3} B_z B_{\theta} \hat{\theta} \\ \mathbf{v}_{\nabla B} &= \frac{\mu_0^2 m v_{\perp}^2 j_z^2 r}{8 q B_z^3} \hat{\theta} \end{aligned}$$

- (c) Agora com o campo $\mathbf{E} = E_z \hat{z}$, teremos a deriva $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \approx \frac{E_z \hat{z} \times (B_{\theta} \hat{\theta} + B_z \hat{z})}{B_z^2} = -\frac{E_z B_{\theta}}{B_z^2} \hat{r} = -\frac{\mu_0 j_z E_z r}{2 B_z^2} \hat{r}$$

7 Aulas 05/07 - 14/07

1. **(Exercício 6.1 - Chen)** Suponha que uma instabilidade eletromagnética limite β a $(m/M)^{1/2}$ em um reator $D-D$. Seja o campo magnético limitado a $20 T$ pela resistência dos materiais. Se $kT_e = kT_i = 20 keV$, encontre a densidade máxima do plasma que pode ser confinado.

Solução: Como o parâmetro β é definido como:

$$\beta = \frac{p}{\frac{B^2}{2\mu_0}}$$

em que a pressão pode ser descrita como: $p = \sum_j n_j kT_j$, logo, temos a seguinte expressão no limite:

$$\frac{2\mu_0 n kT}{B^2} = \sqrt{\frac{m}{M}}$$

em que $n = n_e + n_i$ é a densidade do plasma e $T = T_e + T_i$ é a soma das temperaturas. Podemos escrever assim, pois as temperaturas das espécies são as mesmas. Então:

$$n = \frac{B^2}{2\mu_0 kT} \sqrt{\frac{m}{M}} = 1.16 \times 10^{21} m^{-3}$$

2. **(Exercício 6.2 - Chen)** Em experimentos de fusão com laser, a absorção da luz do laser na superfície do pellet gera um plasma de densidade $n = 10^{27} m^{-3}$ e temperatura $T_e \approx T_i \approx 10^4 eV$. Corrente termonucleares podem causar campos magnéticos espontâneos de intensidade até $10^3 T$.
- Mostre que $\omega_e \tau_{ei} \gg 1$ no plasma, e, portanto, o movimento dos elétrons é fortemente afetado pelo campo magnético;
 - Mostre que $\beta \gg 1$, então os campos magnéticos não podem efetivamente confinar o plasma;
 - Como o plasma e o campo se movem para que a aparente contraditória condições dos itens (a) e (b) possam ser satisfeitas?

Solução:

Solução dos Exercícios

- (a) Sabemos que $\omega_c = \frac{eB}{m}$ e τ_{ei} é dado por $\tau_{ei} = \frac{1}{\nu_{ei}} = \frac{m}{n e^2 \eta}$. Usando a resistividade de Spitzer:

$$\omega_c \tau_{ei} = \frac{eB}{m} \frac{m}{n e^2 \eta} = \frac{B}{n e} \frac{T^{3/2} (eV)}{5.2 \times 10^{-5} \ln \Lambda}$$

Tomando a aproximação de $\ln \Lambda = 10$ e colocando os valores:

$$\omega_c \tau_{ei} \approx 1.2 \times 10^4 \gg 1$$

- (b) Como $\beta = p/(B^2/2\mu_0)$, $p = \sum_j n_j k T_j$ e as temperaturas das espécies são as mesmas:

$$\beta = \frac{2\mu_0 n k (T_e + T_i)}{B^2} = 8.04 \gg 1$$

- (c) Como o plasma não confinado inicialmente, então ele se torna menos denso pela difusão e recombinação. Pela temperatura muito elevada, o plasma irradia bastante, esfriando-o. Já o campo, uma vez que as correntes, geradas na absorção de luz, começam a decair, o campo começa a ficar menor. Para temperaturas da ordem de $20 eV$, densidade $4 \times 10^{25} m^{-3}$ e campo magnético de $30 T$, tanto $\omega_c \tau_{ei}$ e β ficam < 1

3. **(Exercício 6.3 - Chen)** Uma coluna de plasma cilíndrica de raio a contém um campo magnético coaxial $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ e tem perfil de pressão:

$$p = p_0 \cos^2 \left(\frac{\pi r}{2a} \right)$$

- (a) Calcule o valor máximo de p_0
- (b) Usando esse valor de p_0 , calcule a corrente diamagnética $\mathbf{j}(r)$ e o campo magnético total $\mathbf{B}(r)$
- (c) Mostre que $j(r)$, $B(r)$ e $p(r)$ num gráfico
- (d) Se o cilindro é curvado num toro com as linhas de força fecham em si depois de uma volta, este equilíbrio, em que as forças macroscópicas estão balanceadas em todo espaço, é obviamente perturbada. É possível redistribuir a pressão $p(r, \theta)$ de forma que o equilíbrio é recuperado?

Solução:

Solução dos Exercícios

(a) O valor máximo de p_0 será dito pela condição de estabilidade limite $\beta = 1$. Então:

$$\beta = \frac{p}{B^2/(2\mu_0)} = 1 \implies p = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Como a pressão tem um fator \cos^2 que é uma função limitada entre 0 e 1, então vamos usar o valor máximo da função para determinar o valor de p_0 :

$$p_0 = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

(b)

$$\nabla p = -2p_0 \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi r}{2a}\right) \frac{\pi}{2a} \hat{r} \implies \nabla p = -\frac{\pi B_0^2}{4\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) \hat{r}$$

Como $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ e ∇p só está na direção \hat{r} , então:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \implies -\frac{\pi B_0^2}{4\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) \hat{r} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \implies -\frac{\pi B_0^2}{4\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) = j_\theta B_z - j_z B_\theta$$

Como o exercício menciona somente a corrente diamagnética, então ela deve gerar um campo na direção $-\hat{z}$. Portanto, vamos desprezar o segundo termo do lado direito.

$$-\frac{\pi B_0^2}{4\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) = j_\theta B_z \implies j_\theta(r) = -\frac{\pi B_0}{4\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right)$$

Logo, o campo magnético total é:

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \implies -\frac{\pi B_0}{4a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

Devido a simetria cilíndrica, o primeiro termo do lado direito é zero. Então:

$$\frac{\pi B_0}{4a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) = \frac{\partial B_z}{\partial r} \implies B_z(r) = B_0 \left(1 - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right)\right)$$

Solução dos Exercícios

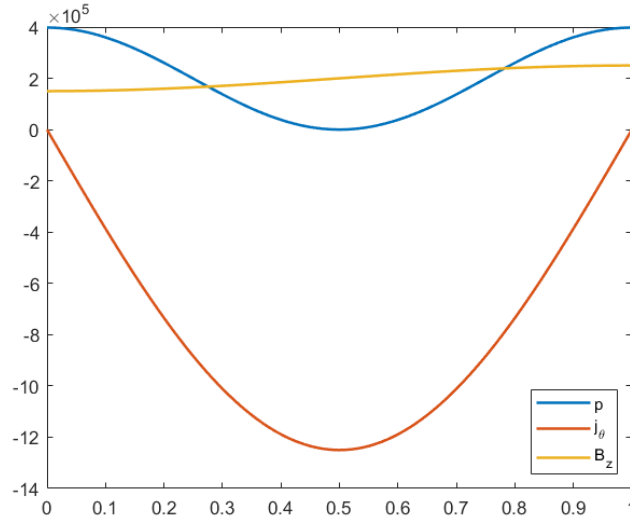


Figure 4: Figura não está em escala

- (c)
- (d) Não, pois devido a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e a deriva de curvatura, as partículas começam a escapar radialmente. Esses processos são independentes da pressão, portanto não há uma forma de reestabelecer o equilíbrio. Para reestabelecer o equilíbrio, é necessário adicionar um campo externo na direção $\hat{\theta}$ (campo magnético poloidal) para que as linhas de campo, agora, sejam hélices. Isso muda a curvatura de \mathbf{B} , assim como, em média, anula a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

4. **(Exercício 6.4 - Chen)** Considere uma coluna de plasma cilíndrica infinita e reta com um perfil de densidade quadrado criado por um campo magnético B_0 . Mostre que B se anula no eixo se $\beta = 1$, por meio do seguinte procedimento:

- (a) Usando as equações MHD, ache \mathbf{j}_\perp no estado estacionário para kT constante.
- (b) Usando $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ e o Teorema de Stokes, integre sobre a área do loop da figura e obtenha:

$$B_{ax} - B_0 = \mu_0 \sum_j k T_j \int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial r} \frac{dr}{B(r)}$$

em que $B_{ax} = B(0)$

- (c) Faça a integral notando que $\frac{\partial n}{\partial r}$ é uma função δ , de forma que $B(r)$ em $r = a$ é a média entre B_{ax} e B_0

Solução dos Exercícios

Solução:

(a) Partindo do balanço de força:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \implies (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla p \times \mathbf{B}$$

Usando a identidade do produto duplo:

$$\underbrace{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}_{=j_{\parallel} B} - B^2 \underbrace{\mathbf{j}}_{=j_{\parallel} + j_{\perp}} = \nabla p \times \mathbf{B}$$

Como \mathbf{j}_{\parallel} e \mathbf{B} estão na mesma direção, então: $j_{\parallel} B \mathbf{B} = B^2 \mathbf{j}_{\parallel}$. Logo:

$$-B^2 \mathbf{j}_{\perp} = \nabla p \times \mathbf{B}$$

Como a temperatura é constante: $\nabla p = kT \nabla n \implies \nabla p \times \mathbf{B} = -kT \mathbf{B} \times \nabla n$.
Logo:

$$B^2 \mathbf{j}_{\perp} = kT \mathbf{B} \times \nabla p$$

Devido a axissimetria, $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$, em que $p = kT n$ por fim:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{kT}{B} \frac{\partial n}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(b) Integrando na superfície do loop a Lei de Ampère:

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int \mathbf{j}_{\perp} \cdot d\mathbf{S}$$

Usando o Teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int \mathbf{j}_{\perp} \cdot d\mathbf{S}$$

em que o caminho da integral é o loop. Como o campo magnético só está na direção $\hat{\mathbf{z}}$, então as 2 pernas do loop na direção $\hat{\mathbf{r}}$ não contribuem no caminho. Já o elemento de área da integral de área está na direção $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, então: $d\mathbf{S} = dr dz \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Como o campo e a corrente independe de z pela simetria do problema e supondo que o comprimento dos caminhos na direção seja L , logo:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= L(B_{ax} - B_0) \\ \int \mathbf{j}_{\perp} \cdot d\mathbf{S} &= L \int_0^{\infty} j_{\perp} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

em que $B_{ax} = B(r = 0)$ e B_0 é o campo no exterior do cilindro. Substituindo a expressão para \mathbf{j}_\perp e de volta na integral:

$$B_{ax} - B_0 = \mu_0 k T \int_0^\infty \frac{\frac{\partial n}{\partial r}}{B(r)} dr$$

lembrando que $kT = \sum_j kT_j$.

(c) Como n é um perfil quadrado, então: $\frac{\partial n}{\partial r} = -n_0 \delta(r - a)$, então:

$$B_{ax} - B_0 = -n_0 \mu_0 k T \int_0^\infty \frac{\delta(r - a)}{B(r)} dr = -\frac{n_0 \mu_0 k T}{B(r = a)}$$

Tomando $B(r = a) = 1/2(B_{ax} + B_0)$:

$$\begin{aligned} B_{ax} - B_0 &= -\frac{2 n_0 \mu_0 k T}{B_{ax} + B_0} \\ B_{ax}^2 - B_0^2 &= -2 n_0 \mu_0 k T \\ 1 - \frac{B_{ax}^2}{B_0^2} &= \frac{k T n_0}{\frac{B_0^2}{2\mu_0}} \equiv \beta \end{aligned}$$

Portanto, para que $\beta = 1$, então $B_{ax} = 0$.

5. **(Exercício 6.5 - Chen)** Um loop diamagnético é um equipamento usado para medir a pressão do plasma por meio da detecção do efeito diamagnético. Quando o plasma é criado, a corrente diamagnética cresce, diminuindo B dentro do plasma e o fluxo Φ fechado pelo loop diminui, induzindo uma diferença de potencial, que é integrada no tempo por um circuito RC.

(a) Mostre que:

$$\int_{loop} V dt = -N \Delta\Phi = -N \int \mathbf{B}_d \cdot d\mathbf{S}, \quad \mathbf{B}_d \equiv \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$$

(b) Use a técnica do exercício anterior para encontrar $B_d(r)$, mas agora assuma $n(r) = n_0 \exp(-(r/r_0)^2)$. Para fazer a integral, assumo $\beta \ll 1$ de forma que B possa ser aproximada por B_0 na integral.

(c) Mostre que $\int V dt = \frac{1}{2} N \pi r_0^2 \beta B_0$, com β definida na equação (6.8)

Solução:

- (a) Pela Lei de Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ e integrando na superfície do loop, usando o Teorema de Stokes:

$$\underbrace{\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}_{=V} = - \underbrace{\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}_{=\frac{d\Phi}{dt}}$$

Integrando um loop de N voltas no tempo:

$$\int V dt = -N \int \frac{d\Phi}{dt} dt = -N \Delta\Phi$$

em que $\Delta\Phi$ é a variação do fluxo magnético devido às correntes diamagnéticas. Então:

$$-N \Delta\Phi = -N \int (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{S}$$

em que \mathbf{B} é o campo total (incluindo a reação diamagnética) e \mathbf{B}_0 é o campo exteriormente aplicado.

- (b) Usando o resultado do item (b) do exercício anterior, só que a posição da perna interna do loop é r :

$$B(r) - B_0 = \mu_0 k T \int_r^\infty \frac{\frac{\partial n}{\partial r'}}{B(r')} dr' \approx \mu_0 k T \int_r^\infty \frac{\frac{\partial n'}{\partial r}}{B_0} dr'$$

Como $\frac{\partial n}{\partial r} = -n_0 \frac{2r}{r_0} \exp(-(r/r_0)^2)$, então:

$$B(r) - B_0 = \frac{\mu_0 k T n_0}{B_0 r_0^2} \int_\infty^r e^{-(r'/r_0)^2} 2r' dr' = \frac{\mu_0 k T n_0}{B_0} \left[e^{-(r'/r_0)^2} \right]_\infty^r = -\frac{\mu_0 n_0 k T}{B_0} e^{-(r/r_0)^2}$$

Agora com uma expressão para $(B(r) - B_0)$, podemos prosseguir com a integração na área de seção transversal do plasma. Como ambas componentes do campo magnético e $d\mathbf{S}$ são na direção, a integral fica:

$$\begin{aligned} \int V dt &= -N \int (B(r) - B_0) r dr d\theta \\ \int V dt &= \frac{2\pi N \mu_0 n_0 k T}{B_0} \int_0^\infty e^{-(r/r_0)^2} r dr = \frac{N\pi r_0^2 \mu_0 n_0 k T}{B_0} \end{aligned}$$

Solução dos Exercícios

(c) Multiplicando e dividindo por 2 e colocando B_0 em evidência:

$$\int V dt = \frac{N \pi r_0 B_0}{2} \left(\frac{2\mu_0 n_0 k T}{B_0^2} \right)$$

O termo nos parenteses é o parâmetro β , logo:

$$\int V dt = \frac{N \pi r_0 \beta B_0}{2}$$

6. (Exercício 6.6 - Chen)

- (a) Derive a relação de dispersão para quando a instabilidade *two-streams* ocorre para 2 fluxos de elétrons frios com v_0 igual, mas de sinal oposto, em que os íons podem ser considerados fixos. Cada fluxo tem densidade de $n_0/2$
- (b) Calcule a taxa de crescimento máxima.

Solução:

(a) Partindo da equação (6.20):

$$\frac{1}{2} m n_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right) = -\frac{1}{2} e n_0 \mathbf{E}_1$$

Supondo que as quantidades de primeira ordem sejam da forma: $A_1 = \bar{A}_1 e^{i(-\omega t)}$, em que a partir dessa parte, todas as quantidades descritas serão a amplitude.

$$m (-i\omega \mathbf{v}_1 + ik v_0 \mathbf{v}_1) = -e \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{ie}{m\omega - kv_0} \mathbf{E}_1$$

Agora, a equação da continuidade linearizada é:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} n_0 \mathbf{v}_1 + n_1 \mathbf{v}_0 \right) = 0 \implies \frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{1}{2} n_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) n_1 = 0$$

lembrando o fato de n_0 e v_0 são constantes. Usando o mesmo conceito para as quantidade perturbativas:

$$-i\omega n_1 + \frac{1}{2} ik n_0 v_1 + ik(v_0) n_1 = 0 \implies n_1 = \frac{kn_0}{2(\omega - kv_0)} v_1$$

Solução dos Exercícios

Substituindo a expressão para v_1 :

$$n_1 = -\frac{iekn_0}{2m(\omega - kv_0)^2} E_1$$

Importante ressaltar que até agora, nós estamos desenvolvendo de modo geral, válido para os 2 fluxos de elétrons diferentes. Desenvolvendo a Lei de Gauss para o campo elétrico \mathbf{E}_1 :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0}(n_{1a} + n_{1b})$$

em que n_{1a} é a densidade de partículas com $\mathbf{v}_{0a} = v_0 \hat{\mathbf{x}}$, por exemplo, e n_{1b} é a densidade de partículas com $\mathbf{v}_{0b} = -v_0 \hat{\mathbf{x}}$. Então, substituindo n_1 para cada tipo:

$$ikE_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} \left(-\frac{iekn_0}{2m(\omega - kv_0)^2} + -\frac{iekn_0}{2m(\omega + kv_0)^2} \right) E_1$$

$$1 = \frac{e^2 n_0}{2m\epsilon_0} \left(\frac{1}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2} \right)$$

Como a frequência do plasma é $\frac{e^2 n_0}{m\epsilon_0} = \omega_p^2$, então:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{2} \left(\frac{2(\omega^2 + k^2 v_0^2)}{(\omega^2 - k^2 v_0^2)^2} \right) \implies \omega^4 - 2k^2 v_0^2 \omega^2 + k^4 v_0^4 = \omega_p^2 (\omega^2 + k^2 v_0^2)$$

$$\omega^4 - (2k^2 v_0^2 + \omega_p^2) \omega^2 + k^4 v_0^4 - \omega_p^2 k^2 v_0^2 = 0$$

$$\implies \omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_p^2 + k^2 v_0^2) \pm \frac{1}{2}(\omega_p^4 + 8\omega_p^2 k^2 v_0^2)^{1/2}$$

(b) Definindo $x = \frac{2k^2 v_0^2}{\omega_p^2}$; $y^2 = \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}$, temos que:

$$y^2 = 1 + x \pm \sqrt{1 + 4x}$$

Como queremos o caso mais instável e a dependência temporal das quantidades de primeira ordem é da forma $e^{-i\omega t}$, isso significa que, para termos instabilidade, ω deve ser complexo com a parte imaginária positiva, uma vez que se ω for real, a parte temporal será oscilatória, e ser imaginário com argumento negativa, a parte temporal será uma exponencial decrescente, ou seja, levando a estabilidade.

Portanto, como $y^2 = \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}$ e queremos a parte instável, então escolhemos pegar a parte imaginária de ω com o máximo de instabilidade, então queremos que y^2 seja o mais negativo possível. Isso é possível pegando somente a solução com o sinal de menos do segundo termo:

$$y^2 = 1 + x - \sqrt{1 + 4x}$$

Solução dos Exercícios

Então, y é da forma: $y = i\gamma$ ($\gamma > 0$) $\implies y^2 = -\gamma^2$. Logo:

$$-\gamma^2 = 1 + x - \sqrt{1 + 4x} \implies \gamma^2 = \sqrt{1 + 4x} - 1 - x$$

Para encontrar o máximo:

$$\frac{d\gamma^2}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0 \implies \frac{d\gamma^2}{dx} \Big|_{x=x_0} = 2(1 + 4x_0)^{-1/2} - 1 = 0 \implies x_0 = \frac{3}{4}$$

Esse valor é o máximo, uma vez que a $\frac{d^2\gamma^2}{dx^2}$ é positiva em $x = x_0$ (por inspeção).
Então:

$$\gamma^2(3/4) = \sqrt{4} - 1 - \frac{3}{4} \implies \gamma^2(3/4) = \frac{1}{4} \implies \gamma(3/4) = \frac{1}{2}$$

Por fim, como $y = i\gamma = i/2$ e $y^2 = \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}$:

$$y = \frac{\sqrt{2} \operatorname{Im}\{\omega\}}{\omega_p} = \frac{1}{2} \implies \operatorname{Im}\{\omega\} = \frac{\omega_p}{2^{3/2}}$$

7. (**Exercício 6.7 - Chen**) Um plasma consiste de 2 fluxos uniformes de prótons com velocidade $v_0 \hat{x}$ e $-v_0 \hat{x}$ e com densidade, respectivamente, $\frac{2n_0}{3}$ e $\frac{n_0}{3}$. Há um fluido neutralizante de elétrons com densidade n_0 e $v_{0e} = 0$. Todas as espécies estão frias e não há campo magnético. Derive a relação de dispersão para instabilidade *streaming* nesse sistema.

Solução: A forma que esse exercício é feito é idêntico ao anterior. Por isso, irei pular as partes de álgebra e destacarei as principais equações. Partindo da equação (6.20):

$$m_j n_{0j} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{1j}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{0j} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{1j} \right) = q_j n_{0j} \mathbf{E}_1$$

Novamente, escreveremos a parte perturbativa como $A_1 = \bar{A}_1 e^{i(kx - \omega t)}$. A partir dessa equação, estaremos tratando das amplitudes. Desenvolvendo a álgebra, chegamos em:

$$\mathbf{v}_{1j} = \frac{iq_j}{m_j \omega - k v_{0j}} \mathbf{E}_1$$

Já para a equação da continuidade:

$$\frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{0j} \mathbf{v}_{1j} + n_{1j} \mathbf{v}_{0j}) = 0 \implies \frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + n_{0j} \nabla \cdot \mathbf{v}_{1j} + (\mathbf{v}_{0j} \cdot \nabla) n_{1j} = 0$$

Solução dos Exercícios

Escrevendo as quantidades perturbativas de forma harmônica e fazendo a álgebra:

$$n_{1j} = \frac{k n_{0j}}{\omega - k v_{0j}} v_{1j}$$

Substituindo a expressão para v_{1j} :

$$n_{1j} = \frac{ik q_j n_{0j}}{m_j (\omega - k v_{0j})^2} E_1$$

Agora, usando a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{e}{\epsilon_0} (n_{1p,a} + n_{1p,b} - n_{1e})$$

Substituindo e colocando nas equação, já com os dados do problema:

$$ik E_1 = \frac{iekn_0}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{3m_p(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{3m_p(\omega + kv_0)^2} + \frac{1}{m_e\omega^2} \right) E_1$$

$$1 = \frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{2m_e\omega^2(\omega + kv_0)^2 + m_e\omega^2(\omega - kv_0)^2 + 3m_p(\omega^2 - k^2v_0^2)^2}{3m_p m_e \omega^2 (\omega^2 - k^2v_0^2)^2}$$

Como $\frac{en_0}{m_e\epsilon_0} = \omega_p^2$:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{3\omega^2} \frac{1}{(\omega^2 - k^2v_0^2)^2} \left(3\frac{m_e + m_p}{m_p}\omega^4 + 3\frac{m_e - 2m_p}{m_p}k^2v_0^2\omega^2 + 2\frac{m_e}{m_p}kv_0\omega^3 + 3k^4v_0^4 \right)$$

Como $m_p \gg m_e$, então:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{3\omega^2} \frac{1}{(\omega^2 - k^2v_0^2)^2} (3\omega^4 - 6k^2v_0^2\omega^2 + 3k^4v_0^4)$$

$$3\omega^2(\omega^4 - 2k^2v_0^2\omega^2 + k^4v_0^4) = \omega_p^2(3\omega^4 - 6k^2v_0^2\omega^2 + 3k^4v_0^4)$$

$$3\omega^6 - 3(\omega_p^2 + 2k^2v_0^2)\omega^4 + 3k^2v_0^2(k^2v_0^2 + 2\omega_p^2)\omega^2 - 3k^4v_0^4\omega_p^2 = 0$$

Essa é a relação de dispersão. Resolvendo esse polinômio cúbico (resolver para ω^3), obtém-se a forma explícita.

8. **(Exercício 6.8 - Chen)** Um feixe de elétrons frios com densidade δn_0 e velocidade u é atirado em direção a um plasma de densidade n_0 em repouso.

- (a) Derive a relação de dispersão para instabilidade de alta frequência entre o feixe e o plasma.

Solução dos Exercícios

- (b) A maior taxa de crescimento γ_m é difícil de calcular, mas uma pessoa fazer a suposição $\delta \ll 1$ pela analogia da instabilidade Buneman entre elétron-íon. Usando o resultado da equação 6.35, ache a expressão para γ_m em termos de δ

Solução:

- (a) Fizemos um caso bem similar no exercício 6.6, em que as velocidades eram $+v_0$ e $-v_0$. Não há nada diferente no desenvolvimento, logo vamos adaptar o resultado a partir do resultado:

$$1 = \frac{e^2 n_0}{2 m_e \epsilon_0} \left(\frac{1}{(\omega - k v_0)^2} + \frac{1}{(\omega + k v_0)^2} \right)$$

Só que, agora, no segundo termo $\frac{n_0}{2} \rightarrow n_0$, $v_0 \rightarrow 0$ e no primeiro termo: $\frac{n_0}{2} \rightarrow \delta n_0$ e $-v_0 \rightarrow u$. Então:

$$1 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega - k u)^2} \right)$$

Como $\omega_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0}$, então:

$$1 = \omega_p^2 \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega - k u)^2} \right)$$

- (b) Escrevendo $x = \omega/\omega_p$ e $y = k v_0/\omega_p$, a relação fica:

$$1 = \frac{1}{x^2} + \frac{\delta}{(x - y)^2}$$

Esse resultado é semelhante ao da equação 6.34, em que $m/M \rightarrow \delta$ e o referencial está andando com velocidade u . Como o resultado é independente do referencial, então a equação 6.35 dá a maior taxa de crescimento para, só que trocamos $m/M \rightarrow \delta$. Logo:

$$\text{Im}\{\omega\} = \delta^{1/3} \text{Im}\{\omega_p\}$$

Como a parte imaginária de ω é quem descreve a taxa de crescimento:

$$\gamma_m \approx \delta^{1/3} \omega_p$$

9. **(Exercício 6.9 - Chen)** Seja 2 fluídos de íons frios em direções opostas com densidade $\frac{1}{2} n_0$ e velocidades $\pm v_0 \hat{y}$ num campo magnético $B_0 \hat{z}$ e um fluído de elétrons frios neutralizantes. O campo B_0 é forte o bastante para confinar os elétrons, mas não é o bastante para afetar os íons.

Solução dos Exercícios

- (a) Encontre a seguinte relação de dispersão para ondas eletrostáticas se propagando na direção $\pm \hat{y}$ no intervalo de frequência: $\Omega_c^2 \ll \omega \ll \omega_c^2$:

$$\frac{\Omega_p^2}{2(\omega - k v_0)^2} + \frac{\Omega_p^2}{2(\omega - k v_0)^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} + 1$$

- (b) Calcule a dispersão $\omega(k)$, a taxa de crescimento $\gamma(k)$ e o intervalo dos números de onda para ondas instáveis

Solução:

- (a) A equação de movimento é da forma:

$$m_j n_{0j} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{1j}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{0j} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{1j} \right) = q_j n_{0j} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{1j} \times \mathbf{B}_0)$$

Bem aqui, temos que desenvolver as equações de movimento para elétrons e íons, só que para os íons não há o termo $\mathbf{v}_{1j} \times \mathbf{B}_0$, uma vez que o campo não é forte o suficiente para alterar o movimento deles, embora, para os elétrons, há o termo. Felizmente, para os íons, o desenvolvimento é idêntico ao do capítulo 6, chegando na equação 6.98. Já para os elétrons, também já temos uma expressão: no capítulo 4, na parte de ondas extraordinárias, há o desenvolvimento da equação geral. A solução é as 2 equações em 4.98. Como só as componentes $v_{1e,y}$ e E_{1y} estão envolvidas para esse caso. Então:

$$v_{1y,e} = \frac{e}{m_e \omega} (-i E_{1y}) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)^{-1}$$

$$v_{1y,i} = \frac{i e E_{1y}}{m_i \omega - k v_0}$$

Pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{0j} \mathbf{v}_{1j} + n_{1j} \mathbf{v}_{0j}) = 0 \implies \frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + n_{0j} \nabla \cdot \mathbf{v}_{1j} + (\mathbf{v}_{0j} \cdot \nabla) n_{1j} = 0$$

$$n_{1j} = \frac{k n_{0j}}{\omega - k v_{0j}} v_{1j}$$

Então:

$$n_{1e} = \frac{k n_0}{\omega} v_{1e} = \frac{k n_0}{\omega} \frac{e}{m_e \omega} (-i E_{1y}) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)^{-1}$$

$$n_{1i} = \frac{k n_{0i}}{\omega - k v_{0i}} v_{1i} = \frac{i k e n_{0i}}{m_i} \frac{E_{1y}}{(\omega - k v_0)^2}$$

Então a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{e}{\epsilon_0} (n_{1i,a} + n_{1i,b} - n_{1e})$$

$$ik E_1 = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{ik e n_{0i,a}}{m_i} \frac{1}{(\omega - k v_0)^2} + \frac{ik e n_{0i,b}}{m_i} \frac{1}{2(\omega + k v_0)^2} + \frac{ik e n_0}{m_e \omega^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \right) E_1$$

Usando a aproximação $\omega^2 \ll \omega_c^2$:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_c^2} \approx -\frac{1}{\omega_c^2}$$

$$1 = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_i} \frac{1}{2(\omega - k v_0)^2} + \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_i} \frac{1}{2(\omega + k v_0)^2} - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_c^2}$$

Como $\Omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_i}$ e $\omega_c^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$, finalmente temos:

$$1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} = \Omega_p^2 \frac{1}{2(\omega - k v_0)^2} + \Omega_p^2 \frac{1}{2(\omega + k v_0)^2}$$

(b) Aqui, espertamente, podemos definir $x = \frac{1}{2} \Omega_p^2 (1 + \omega_p^2/\omega_c^2)^{-1}$ e $y = k^2 v_0^2$. Abrindo as contas, chegamos no seguinte polinômio:

$$\omega^4 - 2(x + y)\omega^2 + y^2 - 2xy = 0$$

Resolvendo:

$$\omega^2 = x + y \pm \sqrt{x^2 + 4xy}$$

A instabilidade acontecerá no ramo com o sinal negativo no segundo termo. Teremos instabilidade se $\sqrt{x^2 - 4xy} > x + y \implies y < 2x$. Logo:

$$y < 2x \implies \frac{k^2}{v_0^2} < \Omega_p^2 (1 + \omega_p^2/\omega_c^2)^{-1} \implies k^2 < \frac{\Omega_p^2}{v_0^2} (1 + \omega_p^2/\omega_c^2)^{-1}$$

Já o crescimento do modo:

$$\omega = i\gamma \implies -\gamma^2 = x + y - \sqrt{x^2 + 4xy} \implies \gamma = \sqrt{\sqrt{x^2 + 4xy} - (x + y)}$$