MAT0164 - Números Inteiros: Uma Introdução à Matemática
Lista 2
2021

1. Decidir se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, provando-as ou exibindo um contraexemplo.

   Sejam a, b, c inteiros quaisquer.

   (a) Se $a|b$ então $(a+c)|(b+c)$.
   (b) Se $a|b$ então $ac|bc$.
   (c) $a|b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$.
   (d) Se $a|(b+c)$ então $a|b$ ou $a|c$.
   (e) Se $a|b$ então $(-b)|(-a)$.

2. Sejam a, b, c inteiros. Mostrar que:

   (a) Se $a|b$ então $(-a)|b$, $a|(-b)$ e $(-a)|(-b)$.
   (b) Se $c \neq 0$ então $a|b$ se e só se $ac|bc$.

3. Usar o algoritmo da divisão para provar que:

   (a) Todo inteiro ímpar é da forma $4k+1$ ou $4k+3$.
   (b) O cubo de um inteiro é da forma $9k$, $(9k+1)$ ou $(9k+8)$.

4. Provar que todo inteiro da forma $6k+5$ é também da forma $3m+2$. Vale a recíproca?

5. O resto da divisão de um inteiro N por 20 é 8. Qual é o resto da divisão de N por 5?

6. Mostrar que se um inteiro é um quadrado e é um cubo então ele é da forma $7k$ ou $(7k+1)$.

7. Prove que:

   (a) $4 \nmid (a^2+2), \ \forall a \in \mathbb{Z}$.
   (b) Se $a \in \mathbb{Z}$ e $2 \nmid a$ então $8|(a^2-1)$.
   (c) Se $a \in Z$ é um inteiro ímpar então $24 \mid a(a^2-1)$.
   (d) Prove que $6 \mid n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \geq 1$.
   (e) Para todo $n \geqslant 1, 7|(2^{3n}-1)$ e $3|[2^n+(-1)^{n+1}]$.

8. (a) Determinar inteiros a, b tais que $a-b=184$ e o quociente e o resto da divisão de a por b sejam, respectivamente, $q=16$ e $r=4$.
   (b) Idem para $a-b=274$, $q=16$, $r=19$.
   (c) Que condições sobre q, r e s devemos impor para que existam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a-b=s$ e $a=bq+r$? Justificar.

9. (a) Demonstrar que todo quadrado perfeito é da forma $5k$ ou $5k \pm 1$.
   (b) Demonstrar que, se três inteiros a, b, c satisfazem $a^2 = b^2 + c^2$, então entre eles há um múltiplo de 5 e um múltiplo de 2.

10. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que:

    (a) $(a-b) \mid (a^n - b^n)$ para todo $n \geq 1$.
    (b) $(a+b) \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$ para todo $n \geq 0$.
    (c) $a+b \mid a^{2n} - b^{2n}$ para todo $n \geq 1$.

    Deduza também uma fórmula para os quocientes nos itens (a) (se $a \neq b$), (b) e (c) (se $a \neq -b$) e prove-as por indução em n.

11. Mostre que $n^5 - n$ é divisível por 5 para todo inteiro n.

12. Mostre que para todo $n \geq 1, 9 \mid (10^n - 1)$.

13. Mostre que, para todo $n \geq 0$,
    (a) $3 \mid (10^n - 7^n)$.
    (b) $17 \mid (10^{2n+1} + 7^{2n+1})$.
    (c) $53 \mid (7^{4n} - 2^{4n})$.
    (d) $2^n \mid 3^{2^n} - 1$.
14. Mostre que soma dos cubos de três inteiros positivos consecutivos é sempre divisível por 9.
15. Mostre que:
    (a) $17 \mid (2^{333} + 3^{222})$.
    (b) $13 \mid (2^{70} + 3^{70})$.
16. Sejam $a, m, n \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $m > n \geq 0$ então $(a^{2^n} + 1) \mid (a^{2^m} - 1)$.
17. Mostre que para todo $n \geq 1$, $n^2 \mid ((n+1)^n - 1)$.
18. Mostre que existem infinitos valores de n para os quais $8n^2 + 5$ é divisível por 7 e por 11.
19. (a) Mostre que se um número a não é divisível por 3 então a^2 tem resto 1 quando dividido por 3.
    (b) Mostre que se a e b são inteiros tais que $3 \mid (a^2 + b^2)$ então a e b são divisíveis por 3.
20. Mostre que nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4k + 2$ ou $4k + 3$.
21. Prove que o algarismo das unidades de um quadrado prefeito só pode ser $0, 1, 4, 5, 6, 9$.
22. Provar que nenhum inteiro de sequência $11, 111, 1111, ...$ é um quadrado perfeito. [**Sugestão:** Se o número for 11 , ok, não é um quadrado perfeito. Se for um numero dessa sequência, maior do que 11, divida-o por 100 e use que 100 é divisível por 4.]
23. Prove que o algarismo das unidades de um quadrado prefeito só pode ser $1, 4, 5, 6, 9$.
    [**Sugestão:** Escreva $a \in \mathbb{Z}$ como $a = 10q + r$, onde $0 \leq r \leq 9$.]
24. Mostre que nenhum número da sequência $aa, aaa, aaaa, ...$ é um quadrado perfeito para $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
25. Mostre que de n inteiros consecutivos, um e apenas um é divisível por n.
26. Sejam m e n inteiros positivos com $n \geq 2$. Mostre que
$$(n-1)^2 \mid (n^m - 1) \iff (n-1) \mid m.$$
27. Seja f_n o n-ésimo número de Fibonacci. Mostre que:
    (a) f_n é par se e somente se $3|n$.
    (b) $3 \mid f_n$ se e somente se $4 \mid n$.
    (c) Use que $f_{n+m} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$ para m e n inteiros positivos com $m > 1$. (Exercício 21(a) da Lista 1) para provar que $f_n | f_m$ sempre que m e n são inteiros positivos com $n|m$.