AULAS ANTERIORES

14/05/2021

Base Canônica

* Ortonormal
  - vetores unitários:
    $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
  - vetores dois a dois ortogonais:
    $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$\Sigma (O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}) = \mathbb{R}^3$ ... espaço cartesiano

Todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como CL dos vetores da base:

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{coord. de } \vec{w} \text{ em relação à base canônica}}$$

Operações com Vetores

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $m \in \mathbb{R}$

* Adição (Diferença): $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \in \mathbb{R}^3$

* Multiplicação por escalar: $m\vec{u} = (mx_1, my_1, mz_1) \in \mathbb{R}^3$

* Produto Escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \in \mathbb{R}$

  * Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

  * Ângulo entre Dois Vetores: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \cos\theta$

* Paralelismo: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k$ } Coordenadas proporcionais!

* Ortogonalidade: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$

7.1 PRODUTO VETORIAL

PROBLEMA:

Seja a base canônica do $\mathbb{R}^3$: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam os vetores: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x, y, z)$.

Se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$

De onde se tem:

SPI

$$\begin{cases} x_1 x + y_1 y + z_1 z = 0 \\ x_2 x + y_2 y + z_2 z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 x + y_1 y = -z_1 z \\ x_2 x + y_2 y = -z_2 z \end{cases}$$

Aplicando a Regra de Cramer para encontrar x e y:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z_1 z & y_1 \\ -z_2 z & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{-z\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 z \\ x_2 & -z_2 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{-z\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \longrightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} z$$

As variáveis x e y são definidas em termos da variável z, que pode assumir qualquer valor $\in \mathbb{R}$. Escolhendo

$z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, tem-se:

$$x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad e \quad y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

Assim:

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

que pode ser representado como:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

produto vetorial

Da 3ª para a 2ª ordem, ocorre a obtenção do determinante de forma recursiva, considerando os elementos da 1ª linha e os respectivos menores.

Slide 05

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$; $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$; $m \in \mathbb{R}$.

I) $$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Duas linhas iguais zeram o resultado do determinante.

II) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

Como ocorre a permuta entre L_2 e L_3 no determinante, o resultado final tem o sinal trocado.

III) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix}$$

Das propriedades de determinante, detectando-se um padrão de soma entre duas linhas ou duas colunas, o determinante pode ser dividido em 2, mantendo inalteradas as linhas (ou colunas) que não compuserem o padrão de soma. Assim:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

IV) $(m\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (m\vec{v}) = m(\vec{u} \times \vec{v})$

Da mesma forma que o produto escalar, o produto vetorial é sensível à multiplicação de um vetor por um escalar na mesma proporção do escalar.

V) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}; & \text{(a)} \\ \vec{u} = m\vec{v} \quad \text{(LD)} & \text{(b)} \end{cases}$

(a) Se uma das linhas for nula, o resultado do determinante é zero;

(b) Se duas linhas for proporcionais, o resultado do determinante é zero:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ mx_1 & my_1 & mz_1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

VII) Identidade de Lagrange : $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overbrace{\boxed{(y_1 z_2 - y_2 z_1)}}^{=a}\,\vec{i} + \overbrace{\boxed{(x_2 z_1 - x_1 z_2)}}^{=b}\,\vec{j} + \underbrace{\boxed{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}}_{=c}\,\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \overbrace{\boxed{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}^{=A} - \underbrace{\boxed{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}}_{=B}$$

$$A = (x_1 x_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_1 z_2)^2 + (x_2 y_1)^2 + (y_1 y_2)^2 + (y_1 z_2)^2 + (x_2 z_1)^2 + (y_2 z_1)^2 + (z_2 z_1)^2$$

$$B = (x_1 x_2)^2 + x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2 + x_1 x_2 y_1 y_2 + (y_1 y_2)^2 + y_1 y_2 z_1 z_2 + x_1 x_2 z_1 z_2 + y_1 y_2 z_1 z_2 + (z_1 z_2)^2$$

$$= (x_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2 + (z_1 z_2)^2 + 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + 2 x_1 x_2 z_1 z_2 + 2 y_1 y_2 z_1 z_2$$

$$A - B = \cancel{(x_1x_2)^2} + \cancel{(x_1y_2)^2} + \cancel{(x_1z_2)^2} + (x_2y_1)^2 + (y_1y_2)^2 +$$
$$(y_1z_2)^2 + (x_2z_1)^2 + (y_2z_1)^2 + (z_2z_1)^2 -$$
$$[\,\cancel{(x_1x_2)^2} + \cancel{(y_1y_2)^2} + \cancel{(z_1z_2)^2} +$$
$$2x_1x_2y_1y_2 + 2x_1x_2z_1z_2 + 2y_1y_2z_1z_2\,]$$

$$= (x_1y_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (x_2y_1)^2 +$$
$$(x_1z_2)^2 - 2x_1x_2z_1z_2 + (x_2z_1)^2 +$$
$$(y_1z_2)^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + (y_2z_1)^2$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_2z_1 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

$$\therefore\ |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = |\vec{u}\times\vec{v}|^2$$

VIII) Da Identidade de Lagrange:

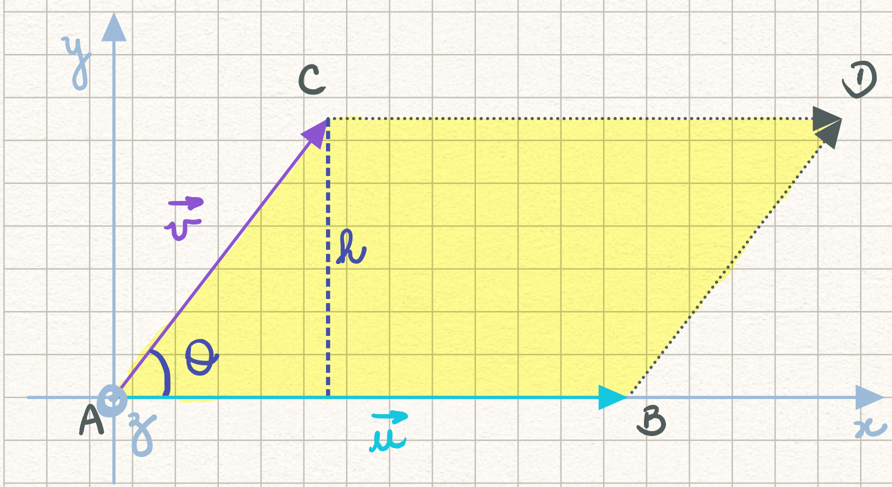
$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$
$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta)^2, \quad \theta \ldots \text{ângulo entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v}$$
$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta$$
$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$\therefore\ |\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\,\text{sen}^2\theta$$

E:

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$$

Slide 08



Área do Paralelogramo ABCD:

A = base . altura

base → $|\vec{u}|$, altura → h

Quem é h?

Módulo da projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{j}$. Portanto, seja $\vec{h}$ a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{j}$. Logo:

$$\vec{h} = \text{proj}_{\vec{j}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\vec{j}\cdot\vec{j}}\right)\vec{j} = (\vec{v}\cdot\vec{j})\,\vec{j}$$

$$\therefore\ |\vec{h}| = |\vec{v}\cdot\vec{j}|\,|\vec{j}| = |\vec{v}\cdot\vec{j}| = \Big|\,|\vec{v}|\,|\vec{j}|\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{}\Big|$$

$\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \text{sen}\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\,\theta$

$$|\vec{h}| = h = |\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$$

Substituindo h e $|\vec{u}|$ na equação da área, tem-se:

$$A = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$$

P. VIII

Logo

$$A = |\vec{u}\times\vec{v}|$$

EXERCÍCIOS - Slide 09

1) $\vec{v} = \left(a, 5b, -\frac{c}{2}\right)$, $\vec{w} = (-3a, x, y)$ $\quad$ $x, y = ?$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

Há duas maneiras de resolver esse exercício: (I) e (II).

Resolução (I):

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 5b & -c/2 \\ -3a & x & y \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(5by + \frac{cx}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{3ac}{2} - ay\right)\vec{j} + (ax + 15ab)\vec{k} = \vec{0}$$

Logo:

$$\begin{cases} 5by + \frac{cx}{2} = 0 & (i) \\ \frac{3ac}{2} - ay = 0 & (ii) \\ ax + 15ab = 0 & (iii) \end{cases}$$

(ii) $y = \frac{3}{2}c$

(iii) $x = -15b$

$x, y \longrightarrow$ (i): $5b\left(\frac{3}{2}c\right) + \frac{c}{2}(-15b) = 0$

$\frac{15}{2}bc - \frac{15}{2}bc = 0$

$0 = 0$ VALORES CONFEREM!

Então:

$x = -15b$

$y = \frac{3}{2}c$

Resolução (II):

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0} \iff \begin{cases} \vec{v} \text{ ou } \vec{w} = \vec{0} \\ \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ LD} \end{cases}$$

Como não se pode afirmar que um dos vetores é nulo, assume-se que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD. Logo:

$$\exists K \in \mathbb{R} / \ \vec{w} = K\vec{v}$$

$$(-3a, x, y) = K\left(a, 5b, -\frac{c}{2}\right)$$

$$(-3a, x, y) = \left(aK, 5bK, -\frac{cK}{2}\right)$$

De onde se tem:

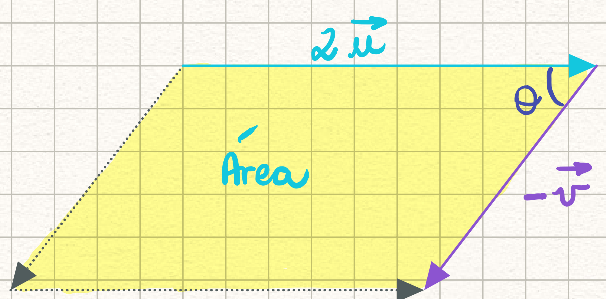
$$\begin{cases} -3a = aK \longrightarrow K = -3 \\ x = 5bK \\ y = -\dfrac{cK}{2} \end{cases}$$

$\therefore \ x = -15b; \ y = \dfrac{3}{2}c$

2) $\vec{u} = (2, -1, 0)$

$\vec{v} = (1, -3, 2)$

Área paralelogramo $2\vec{u}$ por $-\vec{v}$?



$$\text{Área} = |2\vec{u} \times (-\vec{v})|$$

$$\begin{cases} 2\vec{u} = (4, -2, 0) \\ -\vec{v} = (-1, 3, -2) \end{cases}$$

$$2\vec{u} \times (-\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k} = (4, 8, 10)$$

Então:

$$\text{Área} = \sqrt{(4,8,10)\cdot(4,8,10)} = \sqrt{16 + 64 + 100}$$

$\therefore$ Área $= 6\sqrt{5}$ u.a.

3) $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$; $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

Mostrar que: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$

PROCEDIMENTO MAIS SIMPLES: desenvolver os dois lados da igualdade e verificar se os resultados conferem.

4) $(\vec{i} \times \vec{x}) \times \vec{i} + (\vec{x} \times \vec{j}) \times \vec{j} + (\vec{x} \times \vec{k}) \times \vec{k} = \vec{0}$

$- \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{x}) - \vec{j} \times (\vec{x} \times \vec{j}) - \vec{k} \times (\vec{x} \times \vec{k}) = \vec{0}$

$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{x}) + \vec{j} \times (\vec{x} \times \vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{x} \times \vec{k}) = \vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{i} = (1,0,0) \\ \vec{j} = (0,1,0) \\ \vec{k} = (0,0,1) \\ \vec{x} = (a,b,c) \quad ? \end{cases}$$

Aplicando o duplo produto vetorial, tem-se:

$(\vec{i} \cdot \vec{x})\,\vec{i} - (\vec{i} \cdot \vec{i})\,\vec{x} + (\vec{j} \cdot \vec{j})\,\vec{x} - (\vec{j} \cdot \vec{x})\,\vec{j} +$
$(\vec{k} \cdot \vec{k})\,\vec{x} - (\vec{k} \cdot \vec{x})\,\vec{k} = \vec{0}$

$((1,0,0) \cdot (a,b,c))\,\vec{i} - ((1,0,0) \cdot (1,0,0))\,\vec{x} +$
$((0,1,0) \cdot (0,1,0))\,\vec{x} - ((0,1,0) \cdot (a,b,c))\,\vec{j} +$
$((0,0,1) \cdot (0,0,1))\,\vec{x} - ((0,0,1) \cdot (a,b,c))\,\vec{k} = \vec{0}$

$a\vec{i} - \cancel{\vec{x}} + \cancel{\vec{x}} - b\vec{j} + \vec{x} - c\vec{k} = \vec{0}$

$(a,0,0) + (0,-b,0) + (a,b,c) + (0,0,-c) = (0,0,0)$

$(2a, 0, 0) = (0,0,0)$

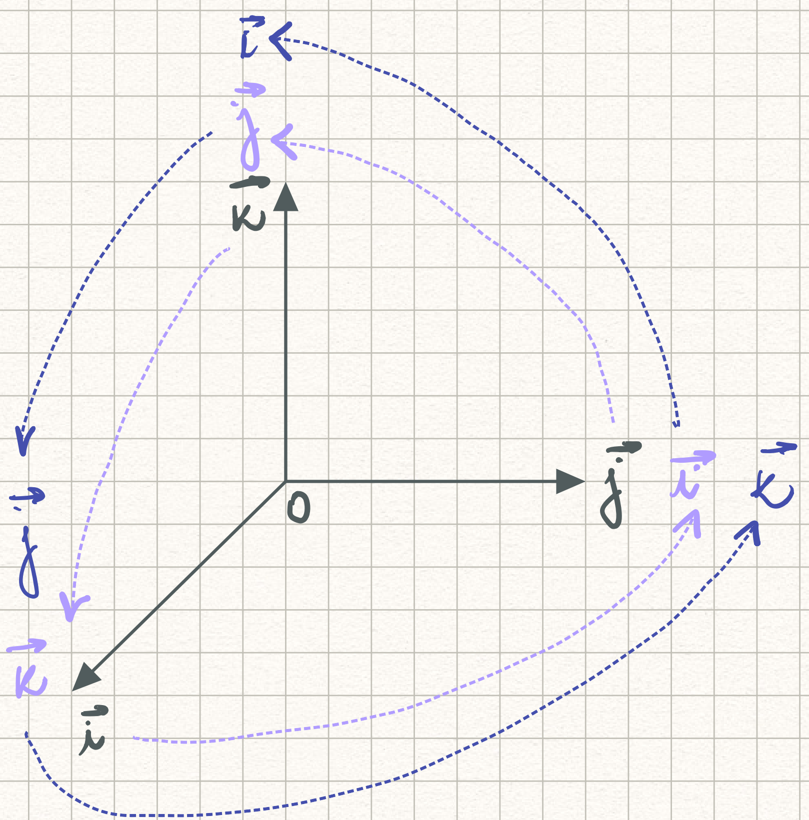
De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} 2a = 0 \longrightarrow a = 0 \\ 0 = 0 \longrightarrow 0b = 0 \quad \therefore \quad b \in \mathbb{R} \\ 0 = 0 \longrightarrow 0c = 0 \quad \therefore \quad c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Assim, a solução da equação, para $\vec{x} = (a, b, c)$ é:

$$\vec{x} = \{(0, b, c) \; ; \; b, c \in \mathbb{R}\}$$

Regra da Mão Direita:



$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$