

---

# P1 - Eletrodinâmica - 2021

## Instruções gerais:

- O último horário de entrega da prova é 8h de segunda-feira, dia 17/5.
- Estamos trabalhando na base da confiança e da honra. Vocês devem resolver a prova individualmente, e em princípio eu confio nesse compromisso de vocês. Por outro lado, eu também vou verificar se esse compromisso foi cumprido, e as consequências podem ser severas.
- Após terminar de resolver a prova, passe a limpo a sua solução. Deixe claro nas páginas de resposta os passos mais relevantes da sua resolução, que me permitam anotar as suas escolhas/convenções, além de me permitir identificar os eventuais erros nas suas soluções.
- Escaneie ou tire fotos dessas páginas e mande para mim por e-mail: [raulabramo@usp.br](mailto:raulabramo@usp.br) . Certifique-se que essas páginas estão **claramente numeradas e identificadas** — e que as **imagens são legíveis**.
- Você pode utilizar, nas suas soluções, quaisquer materiais como notas de aulas e livros. Evidentemente, soluções copiadas da internet serão consideradas inválidas.
- Quaisquer dúvidas sobre essa prova, entrem em contato comigo exclusivamente por meio do meu e-mail (acima), eu tentarei responder rapidamente durante toda a sexta-feira e também no final de semana.
- Boa prova!

# P1 - Eletrodinâmica - 2021

- Q1 [4.0]: Considere um cilindro de altura  $h$  e raio  $R$ , cuja base e lado curvo estão aterrados (potencial zero), e cuja "tampa" tem um potencial  $V_0$ , como mostrado na figura.

(a) [2.0] Encontre a solução para o potencial dentro do cilindro.

(a) [1.0] Demonstre que a sua solução funciona inclusive no topo do cilindro,  $z = h$ .

(c) [1.0] Se quisermos aproximar essa solução com uma precisão de  $\sim 20\%$  no cálculo do potencial ao longo do eixo  $z$  ( $\rho = 0$ ), até que ordem temos de ir nessa soma?

**Dica #1:** Na sua resolução você vai necessitar das propriedades das funções de Bessel que foram deduzidas durante as aulas. Em particular, você pode necessitar da relação de recorrência:

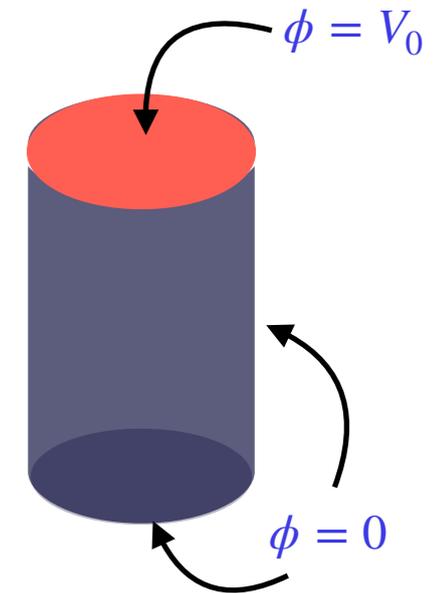
$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x)$$

**Dica #2:** A solução desse problema ficará em termos de uma soma sobre as raízes das funções de Bessel. Em particular, as cinco primeiras raízes da função de Bessel de ordem zero,  $J_0(x)$ , são:

$$x_{0i} = \{2.40483, 5.52008, 8.65373, 11.7915, 14.9309\}$$

A função de Bessel ordem 1,  $J_1(x)$ , calculada nesses valores acima, resulta em:

$$J_1(x_{0i}) = \{0.519147, -0.340265, 0.271452, -0.23246, 0.206546\}$$



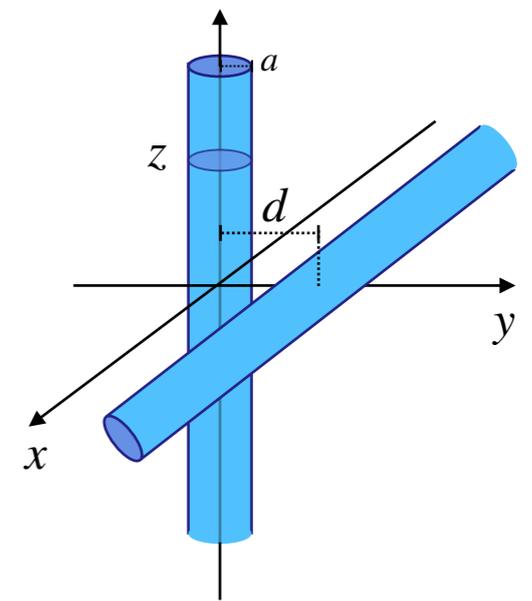
# P1 - Eletrodinâmica - 2021

- Q2 [3.0] — Dois fios retos de diâmetro finito e muito longos estão posicionados com orientações perpendiculares, a uma distância mínima  $d$ , como mostrado na figura. Cada fio carrega uma corrente que está distribuída homogeneamente dentro da seção do fio.

(a) [1.0] Calcule os campos magnéticos dos dois fios no espaço. (Utilize a simetria do problema para expressar a solução no caso do fio orientado na direção  $x$ .)

(b) [1.0] Calcule a indutância do fio orientado na direção  $x$  nas seções circulares do fio orientado na direção  $z$ , como função da altura ( $z$ ) dessa seção. O seu resultado deve ser deixado em termos de uma integral.

(c) [1.0] Expanda a integral do item acima em uma série, tomando o raio do fio ( $a$ ) como sendo muito pequeno com relação à distância entre os fios ( $d$ ) e à altura ( $z$ ). Mostre que a indutância é proporcional à área dessa seção, e inversamente proporcional à altura  $z$ .



# P1 - Eletrodinâmica - 2021

- Q3 [3.0] — Considere uma densidade de corrente que corre do polo Norte ao polo Sul por fora de uma esfera de raio  $R$ , e retorna do polo Sul ao polo Norte por um fio fino ao longo do eixo  $z$ . A densidade de corrente dessa configuração é dada por:

$$\vec{J} = J_0 R \delta(r - R) \frac{1}{\sin \theta} \hat{\theta} \quad \text{na superfície da esfera, e}$$

$$\vec{J} = J_0 R^2 \delta(x) \delta(y) \hat{z} \quad \text{dentro da esfera, no fio fino ao longo do eixo } z.$$

(a) [2.0] Computando os multipolos apenas até  $\ell \leq 2$ , calcule o potencial-vetor  $\vec{A}$  fora da esfera,  $r > R$ ;

(b) [1.0] Mostre que, em particular no plano  $z = 0$  e para  $r \gg R$ , as contribuições de ordem mais **baixa** em  $1/r$ , de dentro (do fio) e da superfície da esfera, cancelam **exatamente**. Explique por quê esse cancelamento **tem** que ocorrer.

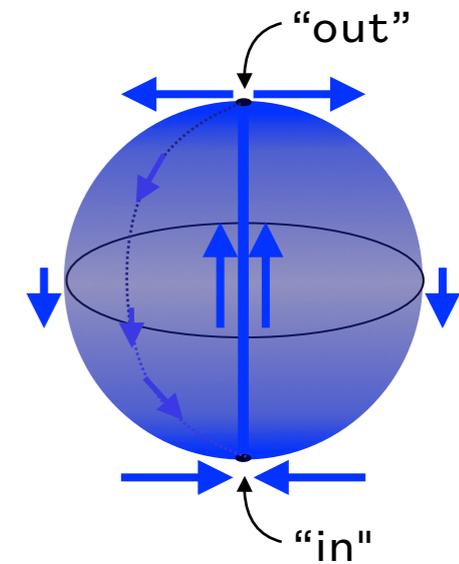
**Dica #1:** O problema do fio **finito** (comprimento  $2R$ ) com corrente  $I = J_0 R^2$  foi resolvido em aula

**Dica #2:** Note que o versor  $\hat{\theta} = \cos \theta (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) - \sin \theta \hat{z}$

**Dica #3:** Nesse problema, apesar da simetria axial, pode ser mais simples usar a função de Green em termos dos esféricos harmônicos. Em todo caso, você vai precisar das seguintes integrais "não-triviais":

$$\int d^2\Omega Y_\ell^{(m)}(\hat{n}) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{(2\ell + 1)\pi}{\ell(\ell + 1)}} \delta_{m,\pm 1} \quad \text{para } \ell = 2, 4, 6, \dots \quad [\text{e } 0 \text{ para outros valores de } \ell]$$

$$\int d^2\Omega Y_\ell^{(m)}(\hat{n}) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi = -i \sqrt{\frac{(2\ell + 1)\pi}{\ell(\ell + 1)}} \delta_{m,\pm 1} \quad \text{para } \ell = 2, 4, 6, \dots \quad [\text{e } 0 \text{ para outros valores de } \ell]$$



Talvez você use também:

$$Y_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^{(-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\varphi}$$