UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de Lorena - EEL

7. Produtos de Vetores

LOB 1036 - Geometria Analítica

Profa. Paula C P M Pardal

RELEMBRANDO ...

- Todo vetor $\vec{v}$ é **combinação linear** dos vetores da base:

$$\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

- **Base canônica** do $\mathbb{R}^3$: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \therefore \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x, y, z)$.
- Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definem-se:
  - Adição/Diferença de Vetores: $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2)$
  - Multiplicação de vetor por um n. real: $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$
  - Produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
    - **Módulo** de um vetor e **Ângulo** entre vetores não nulos.
- Condição de **Paralelismo**: dois vetores são paralelos se forem LD ➔ $\vec{u} \parallel \vec{v}$.
- Condição de **Ortogonalidade**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

7.1 Produto Vetorial

PROBLEMA:

- Dados dois vetores no espaço: $\vec{u}$ e $\vec{v}$, *linearmente independentes*, é possível encontrar um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$?

DEFINIÇÃO:

- Dados dois vetores no espaço: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, chama-se **produto vetorial**, o **vetor** $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{\imath} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{\jmath} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \boldsymbol{\vec{u}} \\ \leftarrow \boldsymbol{\vec{v}} \end{array}$$

*** ***Outra representação: $\vec{u}$^$\vec{v}$.***

7.2 Propriedades do Produto Vetorial

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $m \in \mathbb{R}$, verifica-se que:

I. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} = (0,0,0), \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

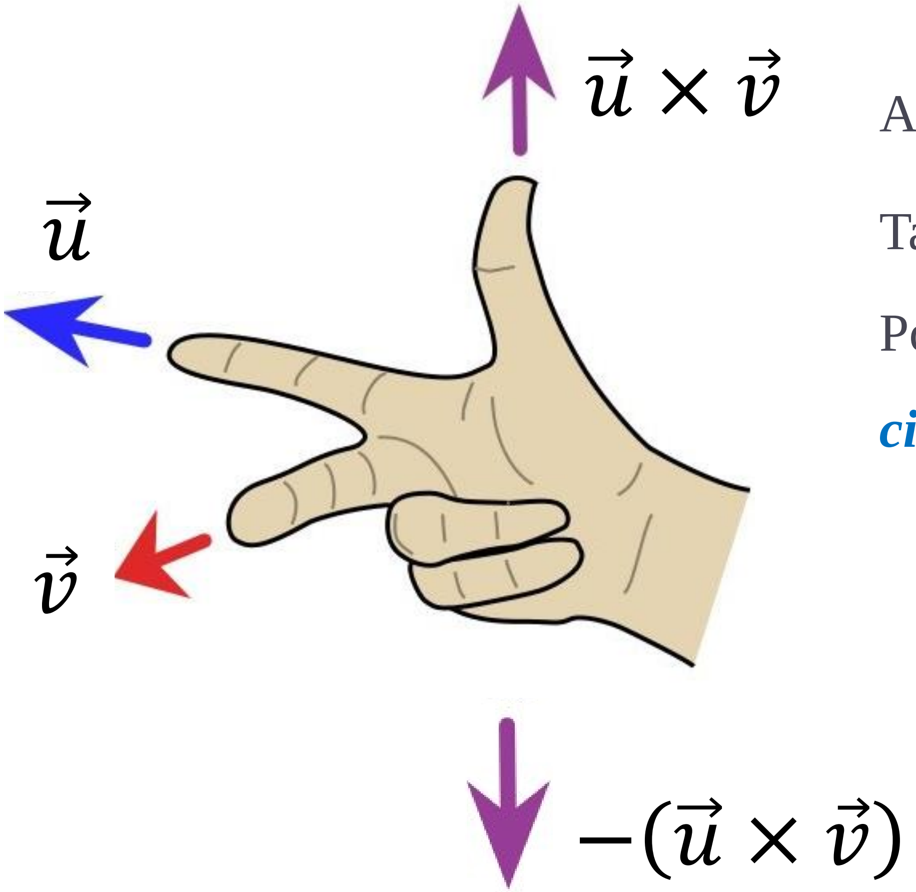
II. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ (Não Comutativa)

III. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (Distributiva em relação à soma de vetores)

IV. $(m\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (m\vec{v}) = m(\vec{u} \times \vec{v})$

V. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$ um dos vetores é nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD ($\vec{u} = m\vec{v}$)

VI. Regra da Mão Direita

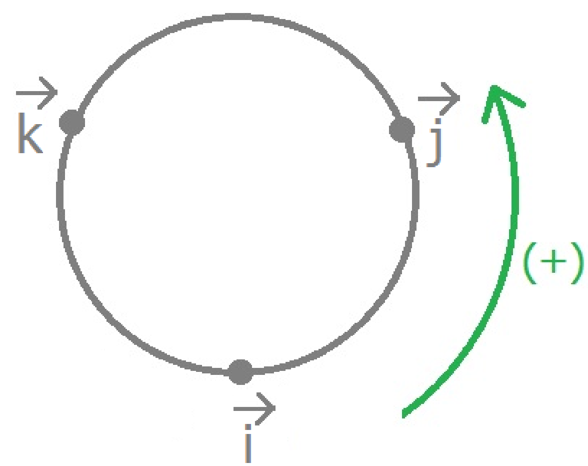


Fonte: Wikipedia (modificado).

A base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é de ***sentido positivo***.

Também são as bases $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\}$.

Portanto, é possível adotar uma ***ordem circular*** para estes vetores:



VII. Identidade de Lagrange:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{\mathrm{v}}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

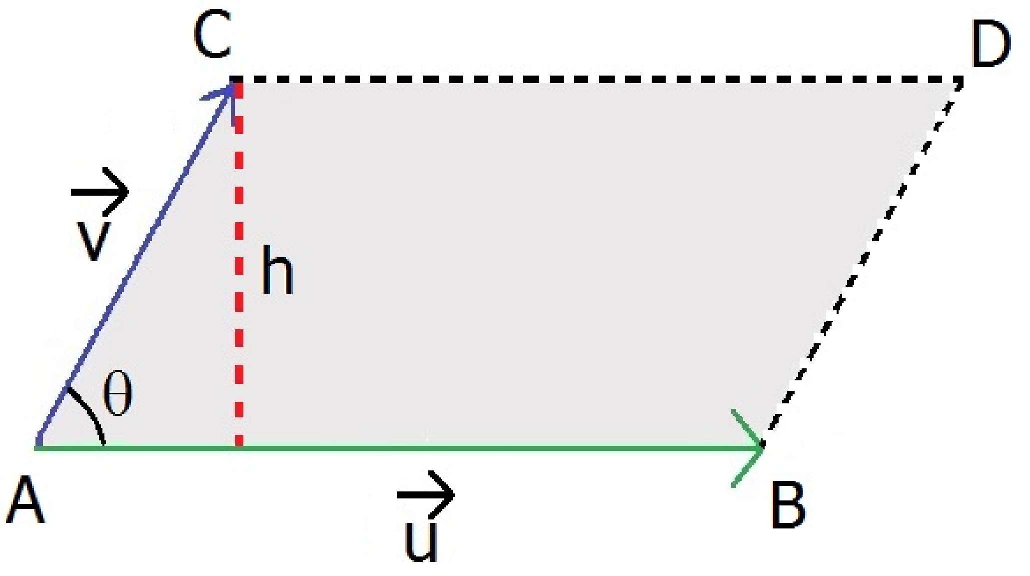
VIII. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\mathrm{sen}\theta$$

IX. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (o produto vetorial não é associativo)

Interpretação Geométrica: Módulo do Produto Vetorial

- Área do paralelogramo ABCD: $A = base \times altura$



Desta forma: $A = |\vec{u}|\ h$

Mas: $h = |\vec{v}|\mathrm{sen}\theta$

Então:

$A = |\vec{u}||\vec{v}|\mathrm{sen}\theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Portanto: $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

EXERCÍCIOS

1. Dados os vetores $\vec{v} = \left(a, 5b, -\frac{c}{2}\right)$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determine x e y para que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

   $x = -15b; y = \frac{3}{2}c$

2. Calcule a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -3, 2)$.

   $6\sqrt{5}$ u. a.

3. Mostre que o duplo vetorial é definido como $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

4. Resolva a equação $(\vec{i} \times \vec{x}) \times \vec{i} + (\vec{x} \times \vec{j}) \times \vec{j} + (\vec{x} \times \vec{k}) \times \vec{k} = \vec{0}$.

   $\vec{x} = \{(0, b, c)\}, \forall\, b, c \in \mathbb{R}$

7.3 Produto Misto

- Dados os vetores: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$; e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, ***tomados nesta ordem***, chama-se **produto misto** o ***escalar***:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{u} \\ \leftarrow \vec{v} \\ \leftarrow \vec{w} \end{array}$$

7.4 Propriedades do Produto Misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$:

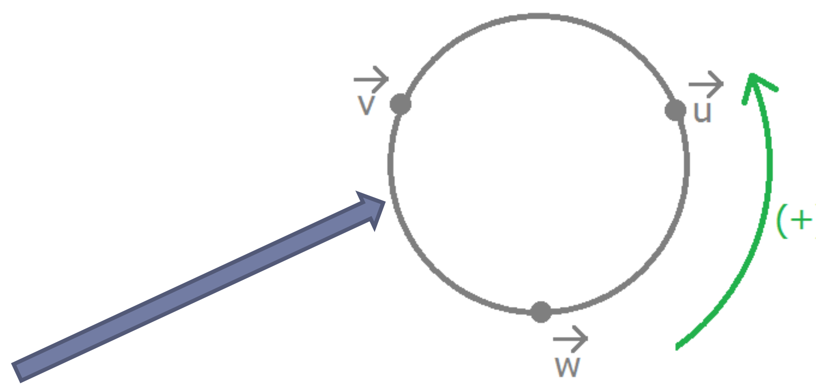
I. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se:

a) Um dos vetores for nulo;

b) Dois vetores forem LD;

c) **Três vetores forem LD.**

II. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$



Observação: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

Propriedade cíclica: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

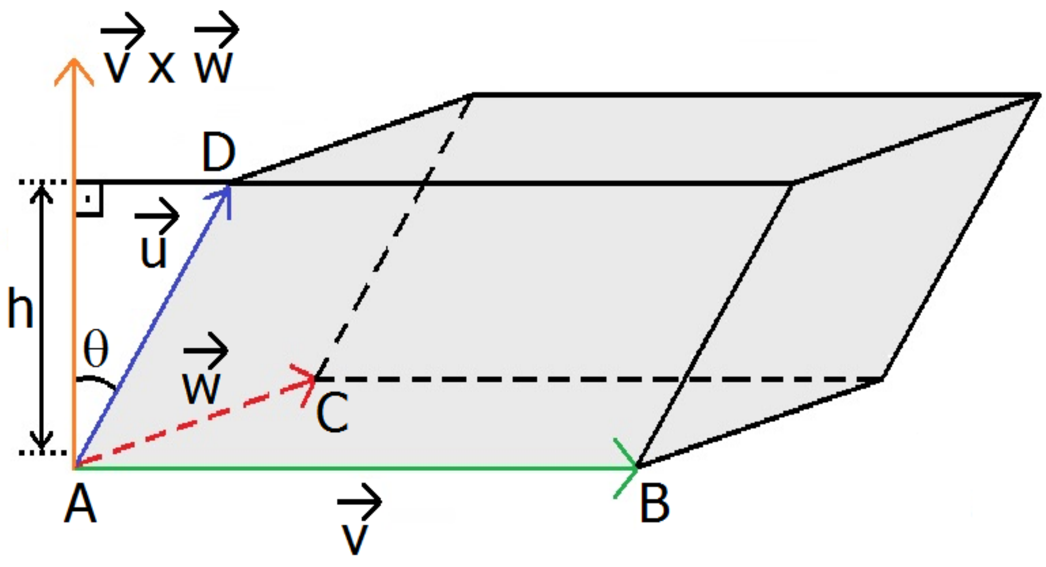
III. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}]$

IV. $[\vec{u}, \vec{v}, m\vec{w}] = [\vec{u}, m\vec{v}, \vec{w}] = [m\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = m[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Interpretação Geométrica: Módulo do Produto Misto

VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

- Volume do paralelepípedo: V = (área da base) × altura = $A_b \times h$



Desta forma:

$V = |\vec{v} \times \vec{w}||\vec{u}||\cos\theta|$ **(1)**

Se $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}$ ∴ $\mathrm{V} = |\vec{u}||\vec{a}||\cos\theta|$

Mas: $\vec{u} \cdot \vec{a} = |\vec{u}||\vec{a}|\cos\theta$

Então: $|\vec{u} \cdot \vec{a}| = |\vec{u}||\vec{a}||\cos\theta|$

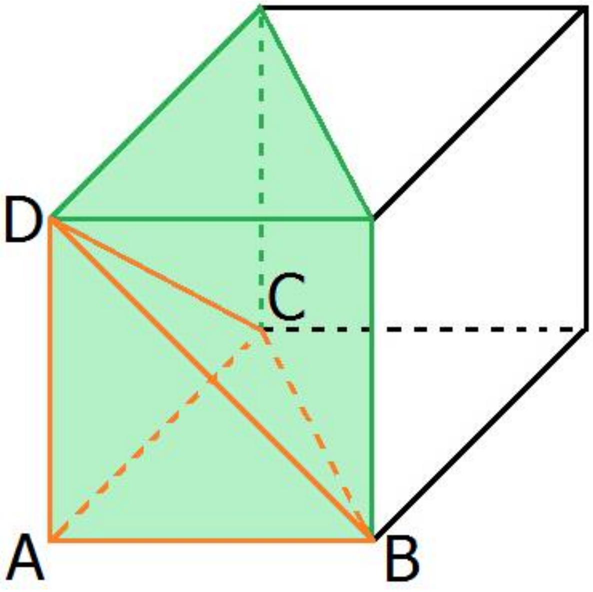
Substituindo $\vec{a}$ por $\vec{v} \times \vec{w}$:

$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}||\cos\theta|$ **(2)**

Comparando as expressões **(1)** e **(2)**: $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$

Observação: Volume do Tetraedro

- Todo paralelepípedo equivale a dois prismas triangulares iguais.
- E todo prisma equivale a três tetraedros, de mesma base e altura do prisma.
- Então, o volume do tetraedro ABCD é:
  - $V_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}}$ e $V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} V_{\text{Paralelepípedo}}$



Logo:

$$V_{\text{ABCD}} = \frac{1}{6} V = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$

desde que A, B, C, e D sejam pontos não colineares.

EXERCÍCIOS

1. Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$. $\sqrt{74}$

2. Os vetores $\vec{\mathrm{a}}=(2,-1,-3)$, $\vec{\mathrm{b}}=(-1,1,-4)$ e $\vec{\mathrm{c}}=(m+1,m,-1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcule m. $m=2$ ou $m=-\frac{8}{3}$

3. Prove que $[\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}]=2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

4. Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=6$, calcule $[2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w},-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-3\vec{w}]$. 24