AULAS ANTERIORES

12/05/2021

Base $\begin{cases} \text{vetores LI}: & a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} = \vec{0}, \text{ em que } a_1 = a_2 = 0 \\ \text{Geram todos os vetores do plano} \end{cases}$

$E = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$

CL dos vetores da base $\xrightarrow{\vec{w} \in \text{plano}}$ $\vec{w} = \underbrace{a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2}}$

$\vec{w} = (a_1, a_2)_E$ ... coordenadas de $\vec{w}$ em relação aos vetores da base E

Base Canônica

* Ortonormal $\begin{cases} \text{vetores unitários}: & \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \\ \text{vetores ortogonais}: & \vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \end{cases}$

$\Sigma\ (O(0,0), \{\vec{i}, \vec{j}\}) = \mathbb{R}^2$ ... plano cartesiano

Operações com Vetores: $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $m \in \mathbb{R}$

* Igualdade: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2\ ;\ y_1 = y_2$

* Adição (Diferença): $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2) \in \mathbb{R}^2$

* Multiplicação por escalar: $m\vec{u} = (m x_1, m y_1) \in \mathbb{R}^2$

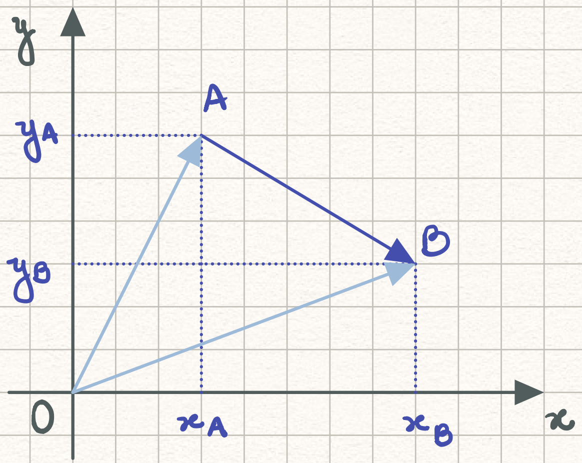
Paralelismo entre Dois Vetores:

$\vec{u} \parallel \vec{v} \longrightarrow \exists\, K \in \mathbb{R} \,/\, \vec{u} = K\vec{v}$

$\therefore \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = K$

As coordenadas dos vetores são proporcionais!

Vetor Definido por Dois Pontos



Como qualquer ponto do plano tem as mesmas coord. de um vetor medido da origem ao ponto:

$$\vec{AB} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

Produto Escalar

$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ... base do plano $\therefore \begin{cases} \vec{u} = (a_1, b_1)_E \\ \vec{v} = (a_2, b_2)_E \end{cases}$

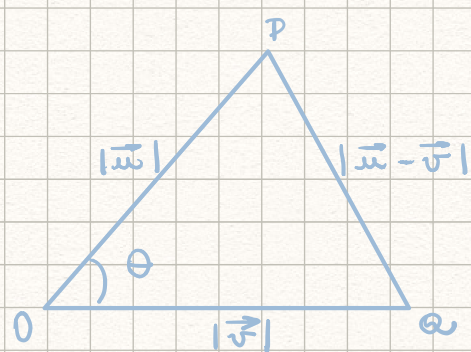
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

O RESULTADO DO PRODUTO ESCALAR É UM NÚMERO!

Módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

Ângulo entre Dois Vetores:



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \cos\theta$$

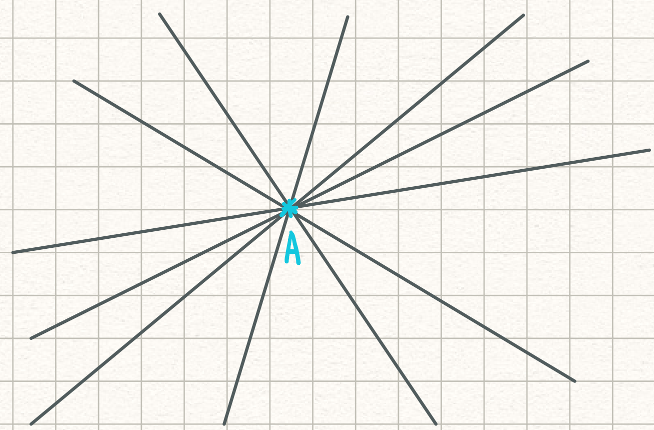
Ortogonalidade entre Dois Vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

6. RETA NO PLANO

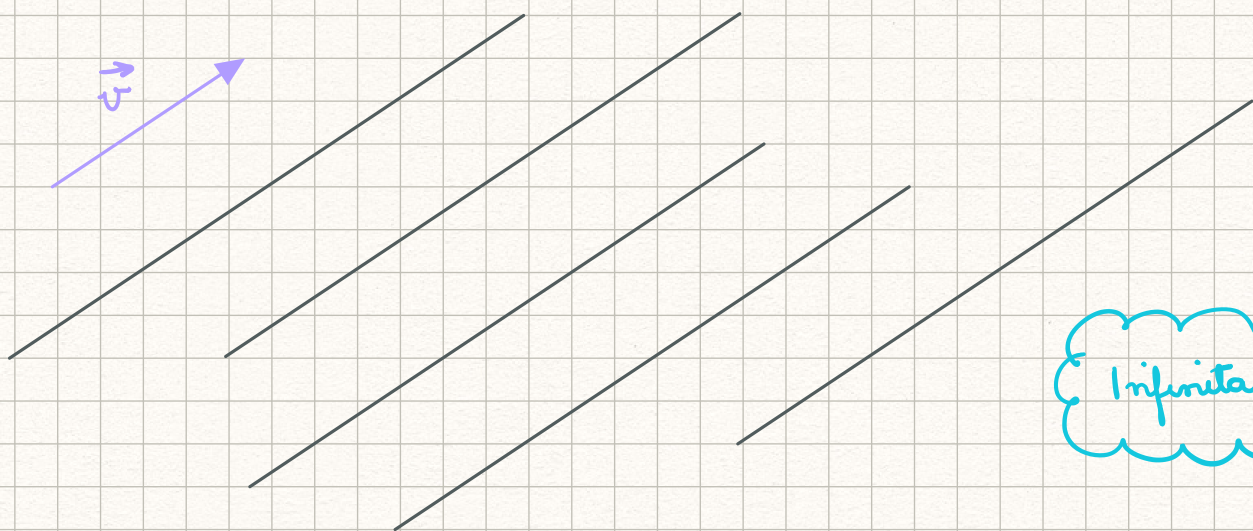
Slide 04

Quantas retas passam pelo ponto A?



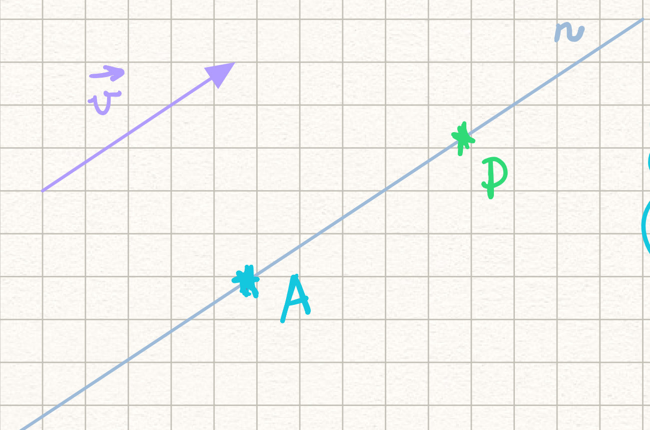
Infinitas

Quantas retas são paralelas ao vetor $\vec{v}$?



Infinitas

Agora: quantas retas passam pelo ponto A e são paralelas ao vetor $\vec{v}$?



Existe somente <u>1</u> reta que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$

E quando o ponto $P \in r$?

Se e somente se P formar com A um vetor paralelo ao vetor diretor da reta: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$, o que implica:

$$r: \overrightarrow{AP} = t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$ Eq. Vetorial da Reta r

parâmetro

Slide 06

As Eqs. Paramétricas de uma reta são obtidas a partir da Eq. Vetorial. Sejam as coordenadas:

$A(x_0, y_0)$ ∴ $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (a, b)$ $\quad P - A = t\vec{v}$

$P(x, y)$ $\quad P = A + t\vec{v}$

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$$

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$ Eqs. Paramétricas da Reta r

** As eqs. param. dissociam a coord. x da coord. y ao obter:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Slide 06

As Eqs. Simétricas de uma reta são obtidas a partir das Eqs. Paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Isolando t nas duas eqs. acima:

$$t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$t = \frac{y - y_0}{b}, \quad \text{desde que} \quad ab \neq 0$$

Desta forma:

$$r: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Eqs. Simétricas ou Normais da Reta r

Qual a forma padrão das Eqs. Simétricas?

$$\frac{1x - x_0}{a} = \frac{1y - y_0}{b}$$

Pergunta: $\frac{3x - 7}{3} = \frac{y}{4}$ representa as Eqs. Sim. de uma reta? Por que?

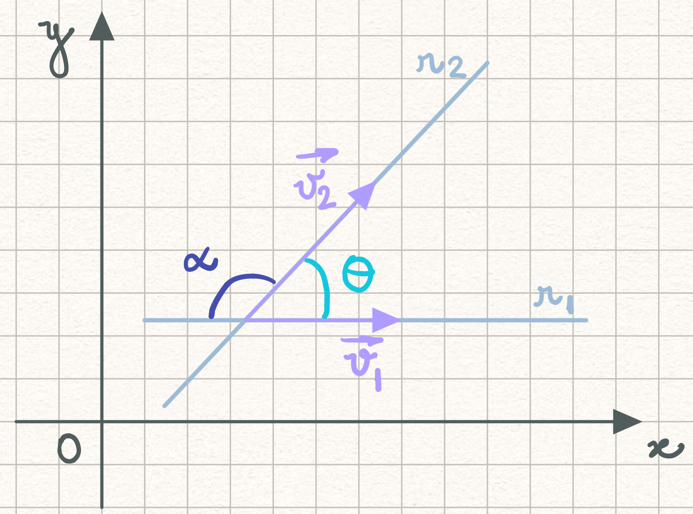
Não representam, pois $\underline{\underline{3}}$ multiplica x e não $\underline{\underline{1}}$.

Poderia ser reescrita?

Sim:

$$\frac{x - 7/3}{1} = \frac{y}{4}$$

Slide 09



Entre duas retas r_1 e r_2, formam-se dois ângulos:

θ ... ângulo agudo

α ... ângulo obtuso

Qual escolher?

SEMPRE o menor: θ

Portanto:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|\,|\vec{v_2}|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Slide 11

Teste da Posição Relativa entre Duas Retas

A partir das Eqs. Simétricas, é possível obter a seguinte equação:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{x_0}{a} = \frac{y}{b} - \frac{y_0}{b}$$

$$\underbrace{\frac{1}{a}}_{=\alpha} x - \underbrace{\frac{1}{b}}_{=\beta} y \underbrace{- \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}_{=\delta} = 0$$

$$r: \underbrace{\alpha x + \beta y + \delta}_{(\alpha, \beta, \delta)} = 0$$

Eq. Reduzida da Reta r

EXERCÍCIOS

1) $\vec{v} \parallel (\vec{i} - \vec{j}) \quad \therefore \quad \vec{v} = k(\vec{i} - \vec{j})$

$\vec{v} = k[(1,0) - (0,1)] = k(1,-1) \quad k \neq 0$

$k = 1 \quad \therefore \quad \vec{v} = (1,-1)$

$$\left.\begin{array}{l} A(4,-1) \in r \\ \vec{v} = (1,-1) \parallel r \end{array}\right\} \quad P(x,y) \in r \iff \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = t\vec{v} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

$P - A = t\vec{v}$

$P = A + t\vec{v}$

$r: \ (x,y) = (4,-1) + t(1,-1) \ , \ t \in \mathbb{R}$ Eq. vetorial

E Vetorial ⟶ E Paramétricas

$(x,y) = (4,-1) + t(1,-1) \ , \ t \in \mathbb{R}$

$(x,y) = (4,-1) + (t,-t)$

$(x,y) = (4+t \ , -1-t)$

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$$ Eqs. Paramétricas

E Paramétricas ⟶ E Simétricas

Isolando t:

$t = x - 4$

$t = -1 - y$

$r: \ x - 4 = -1 - y$ Eqs. Simétricas

E Simétricas $\longrightarrow$ E Reduzida

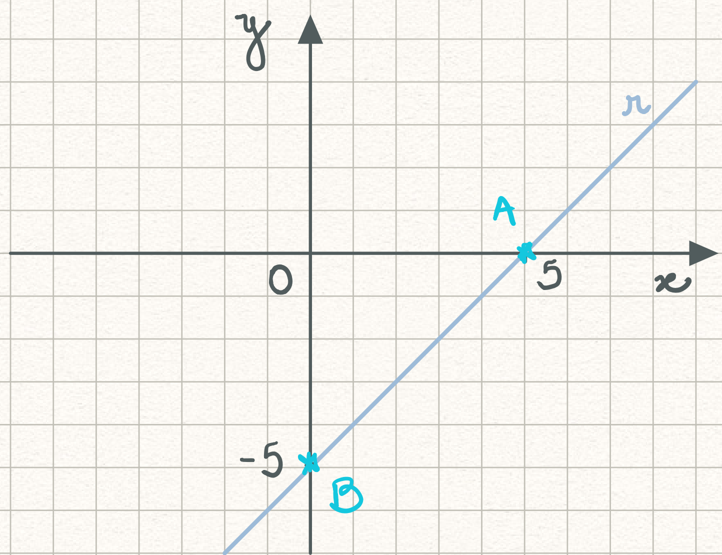
$x - 4 = -1 - y \quad \therefore \quad r: x + y - 3 = 0$ Eq. Reduzida

2. a) $y = x - 5$

$y = 0 \rightarrow x = 5$

$x = 0 \rightarrow y = -5$

$\therefore \begin{cases} A(5,0) \\ B(0,-5) \end{cases} \in r$

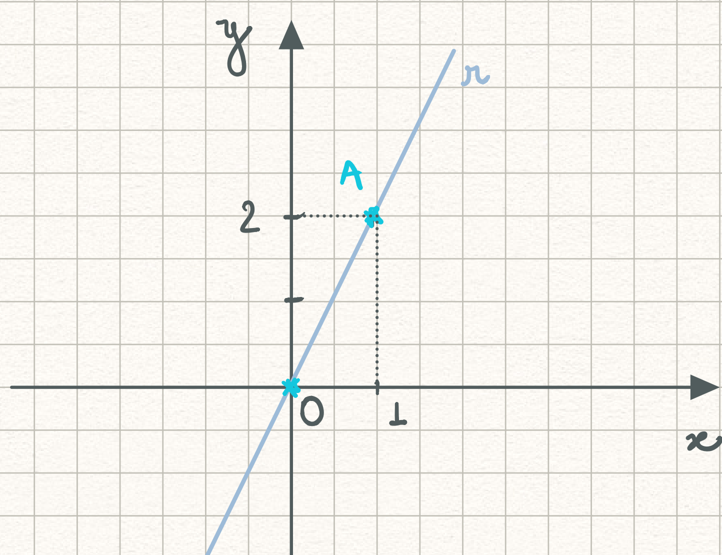


b) $y = 2x$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

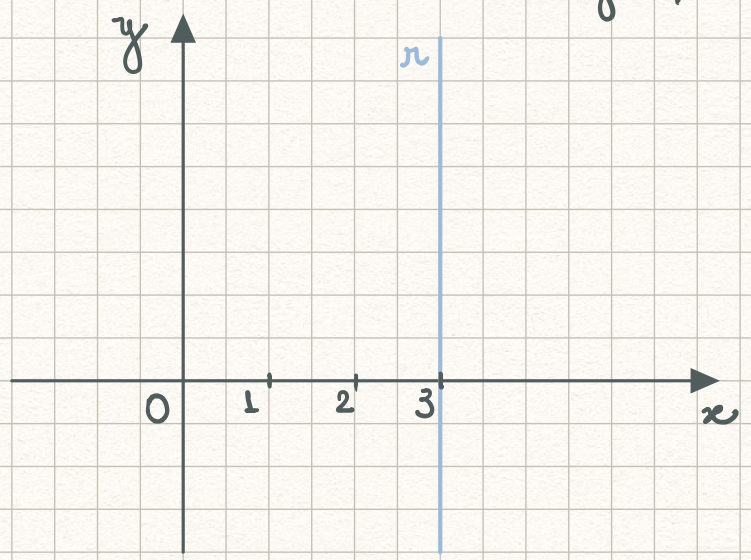
$x = 1 \rightarrow y = 2$

$\therefore \begin{cases} O(0,0) \\ A(1,2) \end{cases} \in r$



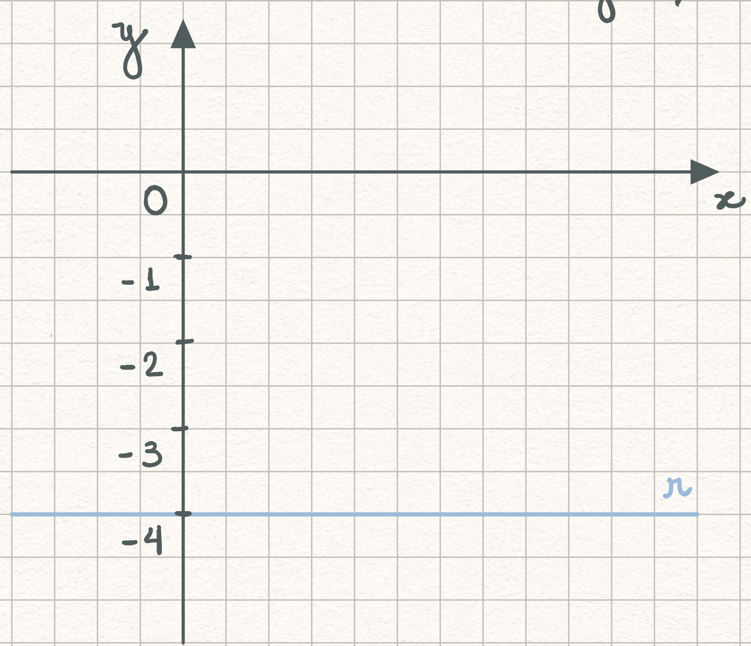
c) $x = 3$ $\longrightarrow$ Esta equação traz a seguinte informação: todos os pontos $\in r$ têm a coord. x fixa em $\underline{\underline{3}}$ e são do tipo $P(3, y)$.

Logo, $r \, // \, Oy$ e $r \cap Ox = (3,0)$



d) $y = -4$ $\longrightarrow$ Esta equação traz a seguinte informação: todos os pontos $\in r$ têm a coord. y fixa em $\underline{\underline{-4}}$ e são do tipo $P(x, -4)$

Logo, $r \, // \, Ox$ e $r \cap Ox = (0,-4)$



3) Para encontrar a posição relativa entre as retas é preciso escrevê-las na forma reduzida: $\alpha x + \beta y + \delta = 0$.

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} \quad : \quad 4x - 2y + 4 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = -2 \\ \delta_1 = 4 \end{cases}$$

$$s: (x, y) = (0,0) + t(1,2)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{matrix} x = t \\ y = 2t \end{matrix} \longrightarrow x = \frac{y}{2} \quad : \quad 2x - y = 0 \quad \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \beta_2 = -1 \\ \delta_2 = 0 \end{cases}$$

Teste da Posição Relativa:

i) Paralelas e Coincidentes:

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, (\alpha_1, \beta_1, \delta_1) = k(\alpha_2, \delta_2, \beta_2)$$

$$(4, -2, 4) = k(2, -1, 0) \quad \therefore \nexists\, k \in \mathbb{R}$$

ii) Paralelas e Não Coincidentes:

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, (\alpha_1, \beta_1) = k(\alpha_2, \beta_2)$$

$$(4, -2) = k(2, -1)$$

$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = k \quad \therefore \exists\, k \in \mathbb{R}$$

Logo, r e s são paralelas e não coincidentes.

4) $\exists\, I$ tal que $r \cap s = I \iff r$ e s forem concorrentes.

Para encontrar a posição relativa entre as retas é preciso escrevê-las na forma reduzida: $\alpha x + \beta y + \delta = 0$.

$r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} \;\therefore\; 3x - 2y - 6 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \beta_1 = -2 \\ \delta_1 = -6 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

Isolando t

$x - 5 = \dfrac{y-2}{-1} \;\therefore\; -x - y + 7 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = -1 \\ \delta_2 = 7 \end{cases}$

As retas r e s são concorrentes se e somente se:

$$\nexists\, k \in \mathbb{R} \,/\, (\alpha_1, \beta_1) = k(\alpha_2, \beta_2)$$

$$(3, -2) = k(-1, -1)$$

$$\frac{3}{-1} = \frac{-2}{-1} = k \;\therefore\; \nexists\, k \in \mathbb{R}$$

Logo, r e s são concorrentes e I é a solução do sistema formado pelas eqs. reduzidas:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ -x - y + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 6 & \text{(i)} \\ x + y = 7 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(ii) $y = 7 - x$

$y \longrightarrow$ (i): $3x - 2(7 - x) = 6$

$3x - 14 + 2x = 6$

$x = 4$

$x \longrightarrow y$

$y = 7 - 4 = 3$

Então:

$I(4,3)$