Efeito Aharonov-Bohm

Aluno: **Yuri Asnis**

Seminário Eletrodinâmica Clássica I

11 de maio de 2021

Visão geral

1. **Eletrodinâmica**
   - Transformações de calibre
2. **Hamiltoniano**
   - Formalismo Hamiltoniano da Interação Eletromagnética
3. **Mecânica quântica**
   - Transformações de calibre
4. **Juntando tudo**
   - O efeito Aharonov-Bohm

Transformações de calibre - eletrodinâmica

- Pela equação: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$, podemos escrever $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ como:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}, t)} \tag{1}$$

- E pela Lei de Faraday: $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}$, temos que:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\partial_t \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\mathcal{E}} + \partial_t \boldsymbol{\mathcal{A}}) = 0$$

tal que, podemos escrever **E** como:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}, t) - \partial_t \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}, t)} \tag{2}$$

- Os campos $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ são invariantes sobre tais transformações:

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) \rightarrow \Phi'(\boldsymbol{r}, t) \equiv \Phi(\boldsymbol{r}, t) - \partial_t \chi(\boldsymbol{r}, t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}, t) \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}'(\boldsymbol{r}, t) \equiv \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{\nabla}\chi(\boldsymbol{r}, t) \tag{4}$$

- Onde $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ é uma função qualquer do espaço e do tempo, chamada de *campo de calibre*

Formalismo Hamiltoniano da Interação Eletromagnética

- Vamos demonstrar rapidamente o Hamiltoniano de uma particula de massa m e carga q sob ação de campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.
- Começamos pela equação de movimento não-relativística

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = q\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}\right) \tag{5}$$

- Utilizando os potencias dados por 1 e 3, ficamos com:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = q\left[-\boldsymbol{\nabla}\Phi - \partial_t \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}})\right] \tag{6}$$

- Usando as seguintes propriedades:
  - Derivada convectiva: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})$
  - Propriedade vetorial: $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}\right) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\mathcal{A}}$
- Então, ficamos com:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = -\boldsymbol{\nabla}\left[q\left(\Phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}\right)\right] - q\frac{d\boldsymbol{\mathcal{A}}}{dt} \tag{7}$$

Formalismo Hamiltoniano da Interação Eletromagnética

- Definindo a energia potencial como sendo $\mathcal{U} = q\left(\Phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}\right)$, a força de Lorentz fica:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{F}} = -\boldsymbol{\nabla}\mathcal{U} - q\frac{d\boldsymbol{\mathcal{A}}}{dt}} \tag{8}$$

- A Lagrangiana que descreve o movimento da partícula sob a ação da força $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ é dada por:

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{T} - q\Phi + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}} \tag{9}$$

- Tal qual, o momento conjugado é definido como

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

- Após uma transformação de Legendre, conseguimos expressar o Hamiltoniano desse sistema:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{\mathcal{A}}\right)^2 + q\Phi} \tag{10}$$

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Sabemos que os observáveis não se alteram quando fazemos uma mudança de **fase global** em nossa função de onda,

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) \rightarrow \psi'(\boldsymbol{r}, t) \equiv e^{-i\lambda}\psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{11}$$

- Quais são as consequências de uma mudança de **fase local** em nossa função de onda?

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) \rightarrow \psi'(\boldsymbol{r}, t) \equiv e^{-i\lambda(\boldsymbol{r},t)}\psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{12}$$

- Claro que $|\psi'|^2 = |\psi|^2$, mas e a equação de Schrodinger? Utilizando a hamiltoniana obtida em 10,

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{\mathcal{A}}\right)^2\psi + q\Phi\psi = i\hbar\partial_t\psi \tag{13}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{\mathcal{A}}'\right)^2\psi' = \left(i\hbar\partial_t - q\Phi'\right)\psi'} \tag{14}$$

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Queremos encontrar quais as transformações $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ e Φ' da equação 14 que deixem a equação de Schrodinger invariante.
  - Sejam: $\boldsymbol{\mathcal{A}}' = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\xi}_{\mathcal{A}}$ e $\Phi' = \Phi + \xi_{\Phi}$ tais que, para os campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ sejam invariantes, devemos ter

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = 0 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\xi_{\phi} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

- Substituindo $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$, Φ' e ψ' na equação 14, ficamos com:

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{\mathcal{A}} - q\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\right)^2 \psi e^{-i\lambda} = \left(i\hbar\partial_t - q\Phi - q\xi_{\Phi}\right)\psi e^{-i\lambda}} \tag{17}$$

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Manipulando um pouco a equação 17, obtemos

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{\mathcal{A}} - q\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} - \hbar\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)^2\psi = \left(i\hbar\partial_t - q\Phi - q\xi_{\Phi} + \hbar\partial_t\lambda\right)\psi \quad (18)$$

- Logo, comparando as equações 18 e 13, para a equação de Schrodinger ser invariante devemos ter que:

$$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = -\frac{\hbar}{q}\boldsymbol{\nabla}\lambda \quad (19)$$

$$\xi_{\Phi} = \frac{\hbar}{q}\frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad (20)$$

- Onde $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ e ξ_{ϕ} satisfazem as condições 15 e 16.

Transformações de calibre - mecânica quântica

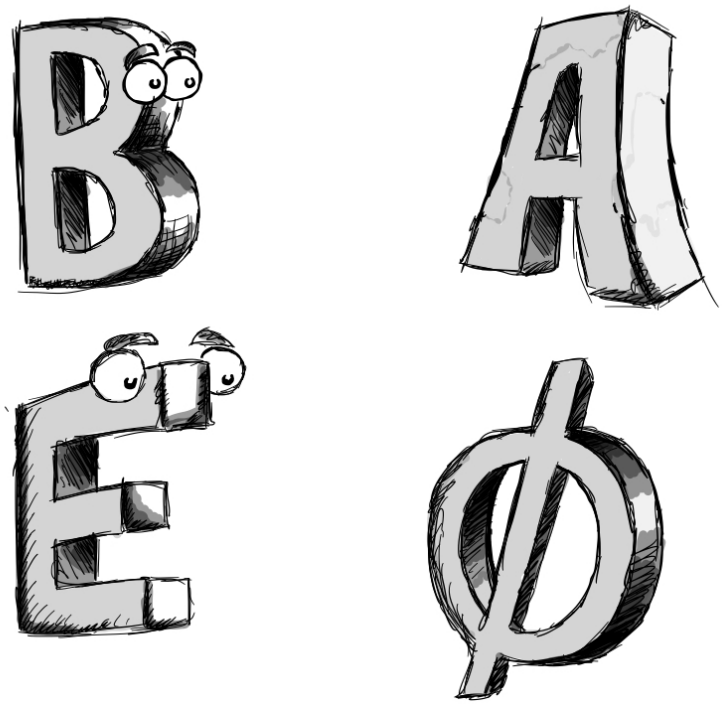
- Obtidas as transformações que deixam a equação de Schrodinger invariantes, $\boldsymbol{\xi_{\mathcal{A}}}$ e ξ_ϕ, para encontrar a relação deles com o campo de calibre $\chi(\boldsymbol{r}, t)$, basta comparar as transformações $\boldsymbol{\mathcal{A}'}$ e Φ' com as equações 4 e 3.
- Assim, obtemos que:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}'} = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\nabla}\chi}, \quad \boxed{\Phi' = \Phi - \partial_t \chi}, \quad \boxed{\lambda(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{q}{\hbar}\chi(\boldsymbol{r}, t)} \tag{21}$$

- Portanto, a transformação de calibre é uma simetria da equação de Schrodinger - todos os observáveis permanecem os mesmos, independentemente da escolha dos potenciais EM e função de onda. Ou seja, as equações 13 e 14 são equivalentes.

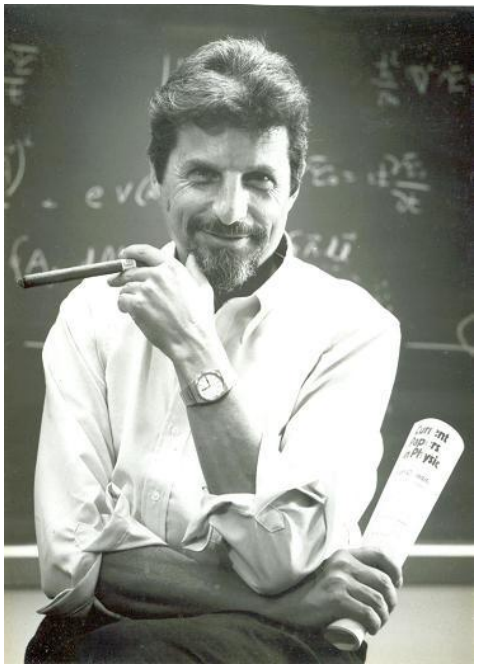
Observáveis

- O único observável na teoria clássica do Eletromagnetismo é a força de Lorentz, que é descrita pelos campos elétricos e magnéticos.
- Podemos introduzir potenciais eletromagnéticos para simplificar os cálculos, porém eles não são observáveis com realidade física.
- Em contraste, na Mecânica Quântica, tais potenciais eletromagnéticos aparentam ser mais fundamentais que os campos. Monstraremos isso através do efeito Aharonov-Bohm.



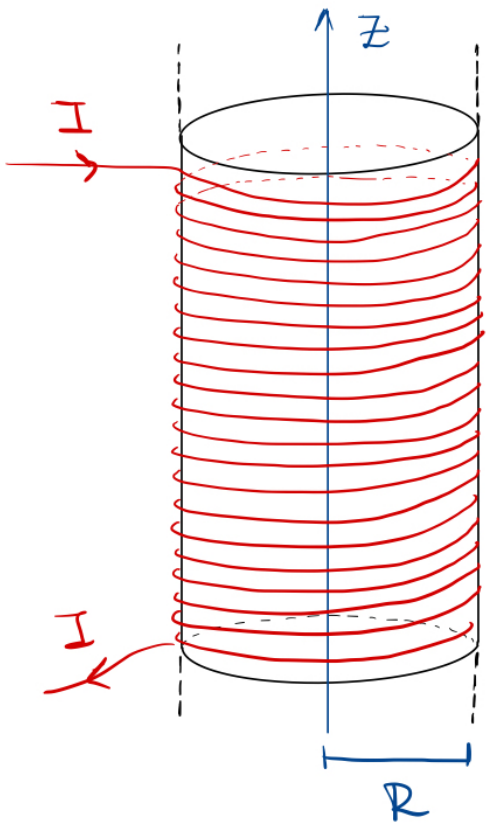
Aharonov e Bohm

- O efeito dos potenciais EM em fenômenos quânticos foi proposto em 1959 por Yakir Aharonov e David Bohm.
- Entender o que acontece com a função de onda quando imersa em uma região livre de campos eletromagnéticos, porém com a presença dos potenciais.



Potencial $\mathcal{A}$ de um solenóide

- Vamos calcular o potencial vetor de um solenóide infinito, com n voltas por unidade de comprimento, raio R e que transporta uma corrente I.



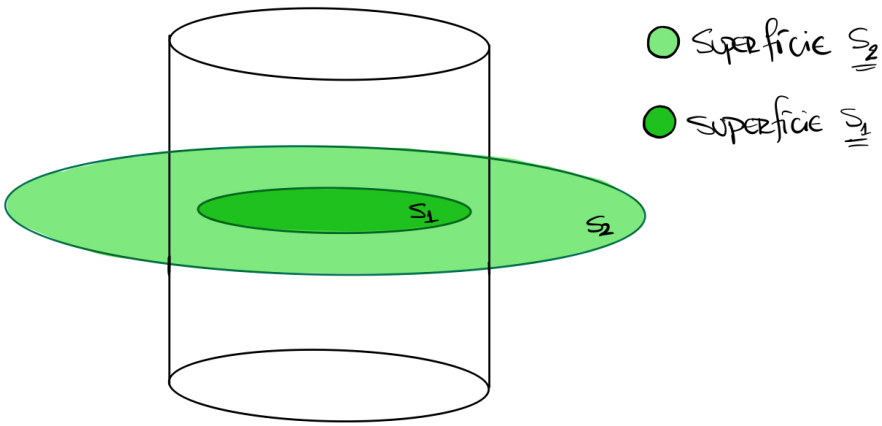
- Se tentármos calcular $\mathcal{A}$ por:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\ell}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad (22)$$

chegaremos em uma divergência, pois o solenóide é infinito.

- Vamos usar o teorema de Stokes, dado que $\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$

Potencial $\mathcal{A}$ de um solenóide



- Integrando em uma superfície $\mathcal{S}$, temos que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\boldsymbol{s} = \Phi_{\mathcal{B}} = \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) \cdot d\boldsymbol{s}$$

- Usando o teorema de Stokes,

$$\oint_{\Gamma(\mathcal{S})} \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}} \qquad (23)$$

Potencial $\mathcal{A}$ de um solenóide

- Superície interna $\mathcal{S}_1$ $(\rho < R)$
  - $\Phi_{\mathcal{B}} = \mu_0 n I \pi \rho^2$
  - $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ e $d\boldsymbol{\ell} = d\ell\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
  - Então a equação 23 fica:

$$A\, 2\pi\rho = \mu_0 n I \pi \rho^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{in}(\rho) = \frac{\mu_0 n I}{2}\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\phi} \qquad (24)$$

- Superície externa $\mathcal{S}_2$ $(\rho > R)$
  - $\Phi_{\mathcal{B}} = \mu_0 n I \pi R^2$
  - $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ e $d\boldsymbol{\ell} = d\ell\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
  - Então a equação 23 fica:

$$A\, 2\pi\rho = \mu_0 n I \pi R^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{out}(\rho) = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{R^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi} \qquad (25)$$

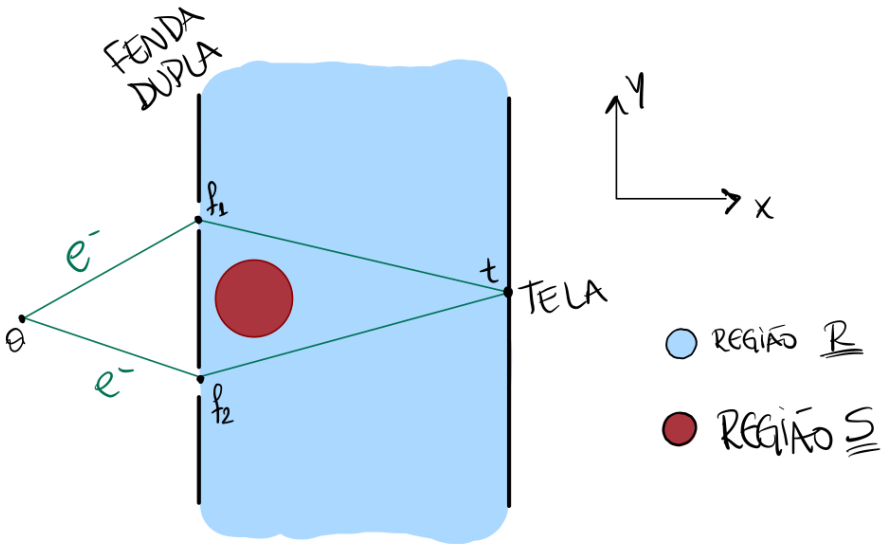
Vemos que, mesmo não havendo campo magnético fora do solenóide, há potencial vetor!

O efeito Aharonov-Bohm

- Vamos considerar a dinâmica de uma partícula não-relativística que tem carga q na presença apenas de um campo magnético estático $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r})$
- Como $\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$ e $\partial_t \boldsymbol{\mathcal{A}} = 0$ então $\Phi = cte = 0$. Logo, a equação 13 fica somente

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{\mathcal{A}}\right)^2 \psi = i\hbar\partial_t\psi \tag{26}$$

Aparato experimental - dupla fenda



- Região S e R são desconexas
- Região S: solenóide infinito ($\boldsymbol{\mathcal{B}} \neq 0$)
- Região R: livre de campos ($\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$)

O efeito Aharonov-Bohm

- Vamos supor que sabemos a solução $\psi_0(\boldsymbol{r}, t)$ da equação de Schrodinger para uma partícula livre ($\boldsymbol{\mathcal{A}} = 0$)
- O que podemos falar sobre a solução $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ da equação 26?
  - Se a partícula estiver confinada na região R, então a solução será dada por

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = exp\left[i\frac{q}{\hbar}\chi(\boldsymbol{r}, t)\right]\psi_0(\boldsymbol{r}, t) \tag{27}$$

  - Como $\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$ em R $\rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}} = -\boldsymbol{\nabla}\chi$
  - Integrando de uma origem $\mathcal{O}$ até uma posição $\boldsymbol{r}$, e definindo $\chi(\mathcal{O}) = 0$

$$\chi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathcal{O},\mathcal{C}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' \tag{28}$$

- Onde $d\boldsymbol{r}'$ é elemento de linha infinitesimal tangente a curva $\mathcal{C}$ que está na região R.

O efeito Aharonov-Bohm

- Sendo a partícula em questão o elétron ($q = -e$) e substituindo o resultado 28 em 27, ficamos com

$$\boxed{\psi(\boldsymbol{r}, t) = exp\left[\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},\mathcal{C}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}'\right]\psi_0(\boldsymbol{r}, t)} \tag{29}$$

- A função de onda 29 satisfaz a equação 26

O efeito Aharonov-Bohm: finalmente

- Suporemos no nosso aparato experimental que um feixe coerente de elétrons com um comprimento de onda de De Broglie λ_e definido chegue à fenda dupla.
- Suporemos também que λ_e é muito maior que o diâmeto do solenóide, assim, os elétrons não o "enxergarão"e poderemos utilizar 27.
- Após passarem pelas fendas f_1 e f_2 (localizadas em $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$, respectivamente), os elétrons atingirão a tela fotográfica em $\boldsymbol{r}_t$.
- A função de onda $\psi(\boldsymbol{r}_t, t)$ é dada pela superposição das ambas funções de ondas correspondentes a propagação pelas duas fendas.

$$\psi(\boldsymbol{r}_t, t) = e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},c_1}^{\boldsymbol{r}_t} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'} \psi_1(\boldsymbol{r}_t, t) + e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},c_2}^{\boldsymbol{r}_t} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'} \psi_2(\boldsymbol{r}_t, t) \qquad (30)$$

O efeito Aharonov-Bohm: finalmente

- Podemos colocar um dos fatores de fase em evidência:

$$\psi = e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},c_2}^{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'}\left[\psi_2 + e^{\frac{ie}{\hbar}\left(\int_{\mathcal{O},c_1}^{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}' - \int_{\mathcal{O},c_2}^{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}'\right)}\psi_1\right] \tag{31}$$

$$\psi = e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},c_2}^{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'}\left[\psi_2 + e^{\frac{ie}{\hbar}\left(\int_{\mathcal{O},c_1}^{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}' + \int_{\boldsymbol{r}_t,c_2}^{\mathcal{O}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}'\right)}\psi_1\right] \tag{32}$$

$$\psi = e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},c_2}^{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'}\left[\psi_2 + e^{\frac{ie}{\hbar}\oint_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}'}\psi_1\right] \tag{33}$$

- Onde, $\mathcal{C}$ é um contorno fechado que liga $\mathcal{O} - \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{r}_2 - \mathcal{O}$ e se encontra puramente na região R.
- Aqui se encontra a surpresa, utilizando o teorema de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}' = \iint_{\mathcal{S}(\mathcal{C})}\boldsymbol{\mathcal{B}}\cdot d\boldsymbol{s} = \Phi_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{\mathcal{S}} \equiv \Phi \tag{34}$$

O efeito Aharonov-Bohm: finalmente

- $\mathcal{S}$ é a superfície cujo contorno é dado por $\mathcal{C}$ e $d\boldsymbol{s}$ é um elemento infinitesimal de área de $\mathcal{S}$.
- Por mais que $\mathcal{C}$ se encontra na região livre de campos (região R), a superfície $\mathcal{S}$ é "perfurada"pelo campo magnético do solenóide.
- Portanto, a função de onda na tela é dado por

$$\boxed{\psi(\boldsymbol{r}_t, t) = e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathcal{O},c_2}^{\boldsymbol{r}_t} \boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot d\boldsymbol{r}'} \left[\psi_2(\boldsymbol{r}_t, t) + e^{\frac{ie}{\hbar}\boldsymbol{\Phi}}\psi_1(\boldsymbol{r}_t, t)\right]} \tag{35}$$

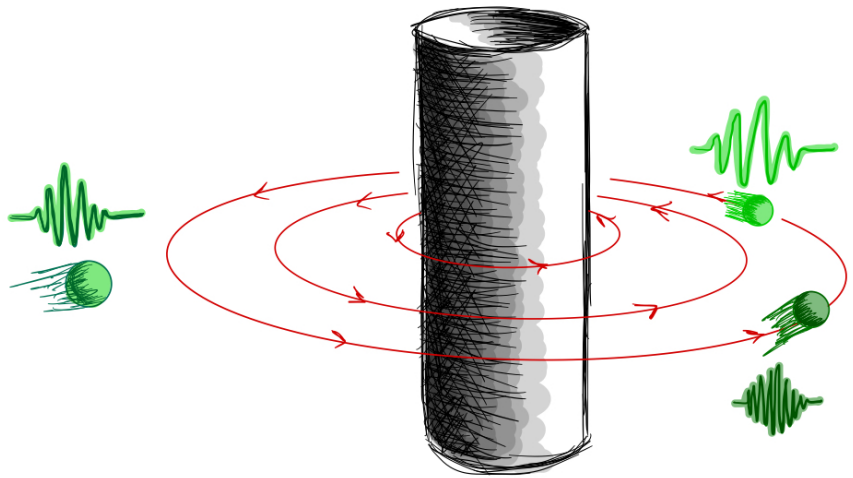
- A probabilidade de achar um elétron em um volume infinitesimal na posição da tela é dada por:

$$P\left(\boldsymbol{r}_t, t\right) = \left|\psi(\boldsymbol{r}_t, t)\right|^2 dV = \left|\psi_2(\boldsymbol{r}_t, t) + e^{\frac{ie}{\hbar}\boldsymbol{\Phi}}\psi_1(\boldsymbol{r}_t, t)\right|^2 dV \tag{36}$$

- Observa-se da equação 36 que, caso não haja corrente no solenóide, então o padrão de interferência será dado por $|\psi_1 + \psi_2|^2$. Quando liga-se uma corrente, haverá um deslocamento das franjas de interferência.

Conclusão

- Vimos que existem propriedades interessantes para o potencial vetor magnético no regime quântico.
- Ao contrário da mecânica clássica, existem efeitos dos potenciais em partículas carregadas, mesmo em regiões onde os campos (e portanto as forças na partícula) são nulos.
- A simetria de calibre articula como os potenciais EM devem se acoplar com as funções de ondas que descrevem partículas.



Referências

- https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.115.485
- https://arxiv.org/pdf/2010.12010.pdf
- *Quantum Mechanics applied to Atoms and Light*, Ph. W. Courteille, IFSC/USP