UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

6. Reta no Plano

LOB 1036 - Geometria Analítica
Profa. Paula C P M Pardal

O que você deve saber

- Base; Combinação Linear.
  - Plano cartesiano; Sistemas de coordenadas.
- Vetores no $\mathbb{R}^2$.
  - Igualdade; Operações.
  - Paralelismo entre vetores.
- Produto Escalar.
  - Módulo.
  - Ângulo (e ortogonalidade) entre dois vetores.

- Geometria Analítica → Rene Descartes.

Ideia:

- Dado um objeto geométrico, encontrar uma **equação que descreva esse objeto** → as propriedades desse objeto são obtidas da análise de tais equações.
- Objetos a serem estudados no $\mathbb{R}^2$:
  - Retas;
  - Cônicas: elipses/circunferências, parábolas, hipérboles.

6.1 Equações da Reta

DEFINIÇÃO: *Vetor Diretor*

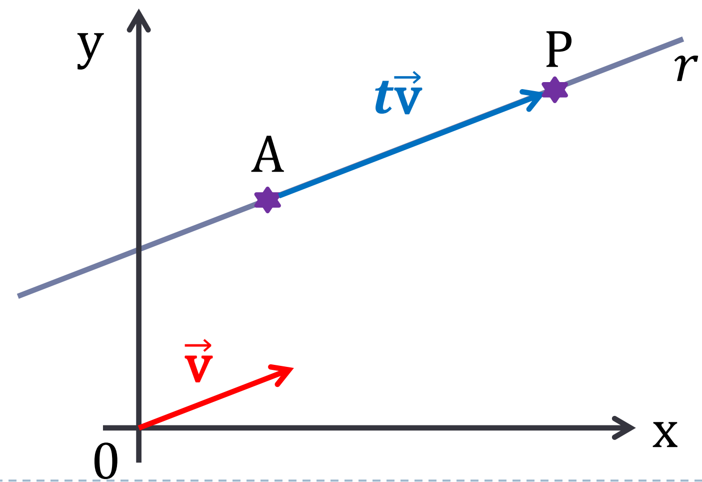
Seja r uma reta e $\vec{v}$ um vetor não nulo, paralelo a r ➔ $\vec{v}$ é chamado vetor diretor da reta r.

- Então, o que é necessário para determinar a equação de uma reta?
  - Existe somente uma reta r que passa por um ponto A e tem a direção de $\vec{v}$.
- Portanto, se A$\in r$ e $\vec{v} \parallel r$, um ponto qualquer do *plano cartesiano* P $\in r \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AP}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$.
  - Desta forma:, portanto:

$$r: \quad \overrightarrow{AP} = t\,\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Equação Vetorial da Reta.

t: parâmetro.



Observações

- Na equação vetorial, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\vec{\mathrm{v}}$, $t \in \mathbb{R}$, quando t percorre os números reais, todos os pontos da reta são determinados.

- Existem infinitas representações da equação vetorial de uma mesma reta, pois A e $\vec{\mathrm{v}}$ podem ser escolhidos de muitas maneiras.

6.2 Equações Paramétricas da Reta

- Considere uma reta r e o *sistema de coordenadas cartesiano* Oxy.

- Tomando em *coordenadas* o ponto e o vetor diretor que definem a reta, isto é, $A(x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$, para que o ponto $P(x, y) \in r$, deve satisfazer:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

A $\vec{\mathbf{v}}$

- Este sistema é conhecido como sistema de Equações Paramétricas da Reta em relação ao sistema de coordenadas fixado, com $\vec{v} \neq \vec{0}$.

6.3 Equações Simétricas da Reta

- A partir das eqs. paramétricas de uma reta e considerando $\boldsymbol{ab \neq 0}$.
- Das eqs. (2), tem-se:

$$r: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \; (= t) \qquad (3)$$

  - Equações Simétricas ou normais da reta r que passa pelo ponto $A(x_0, y_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b)$.

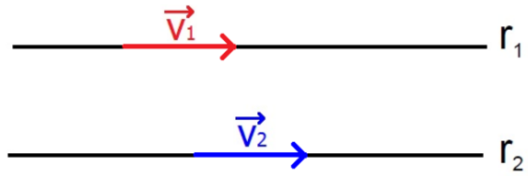
Observação:

- $\frac{3x - 7}{3} = \frac{y}{4}$ não representa as eqs. simétricas de uma reta, pois o coeficiente de x não é 1. Ainda assim, ela representa uma reta cujas eqs. simétricas são $\frac{x - {}^{7}/_{3}}{1} = \frac{y}{4}$.

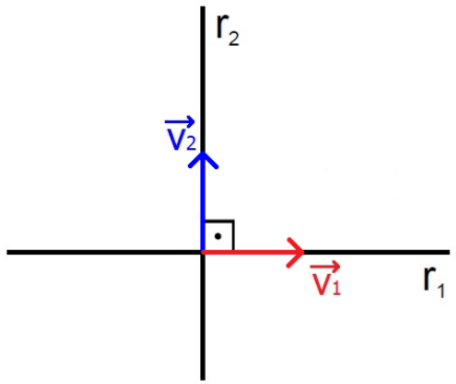
6.4 Paralelismo e Ortogonalidade de Duas Retas

Sejam r_1 e r_2 retas cujos vetores diretores são $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2)$, respectivamente.

- ***Condição de Paralelismo***: $\overrightarrow{v_1} = k\,\overrightarrow{v_2}\,,\ \ k \in \mathbb{R}$

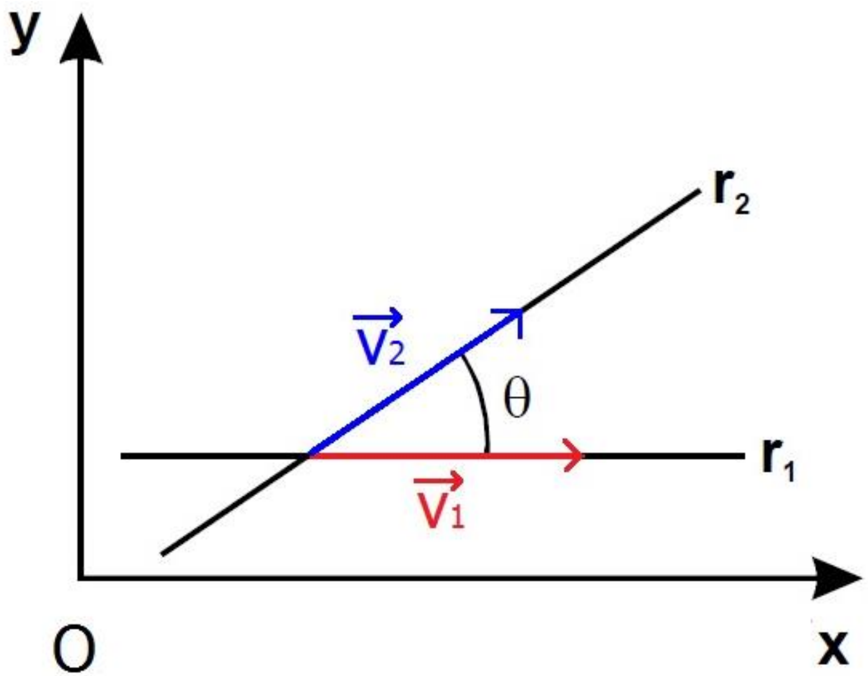


- ***Condição de Ortogonalidade***: $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$



6.5 Ângulo entre Duas Retas

- Sejam as retas:
  - r_1: passa pelo ponto $A(x_1, y_1)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1)$;
  - r_2: passa pelo ponto $B(x_2, y_2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2)$.



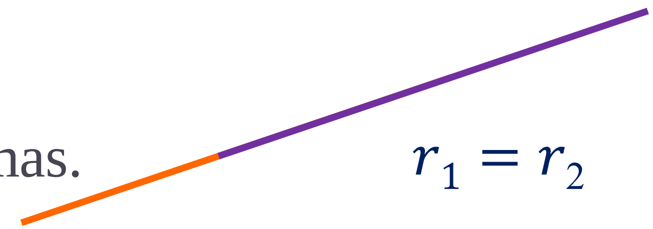
Ângulo entre duas retas é o **menor ângulo** formado entre o vetor diretor de r_1 e o vetor diretor de r_2.

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|\,|\overrightarrow{v_2}|}, \text{com } 0 \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{2}$$

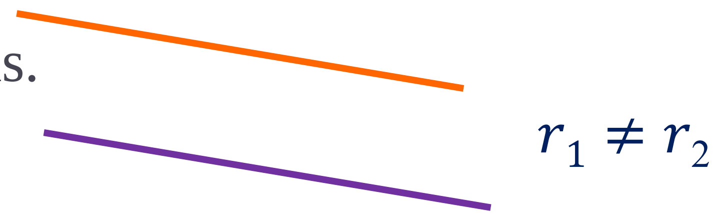
6.6 Posições Relativas de Duas Retas

As retas r_1 e r_2, no plano, podem ser:

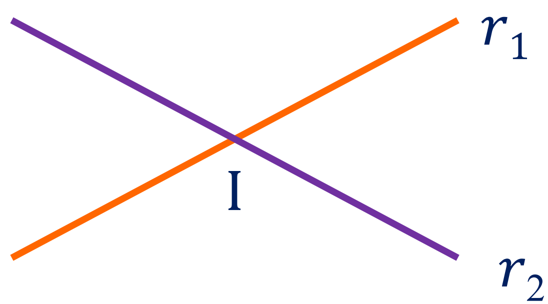
- **Paralelas:**
  - ***Coincidentes***: se as duas retas são as mesmas.
    - $r_1 = r_2$.



  - ***Não coincidentes***: retas distintas.
    - $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.



- **Concorrentes:**
    - $r_1 \cap r_2 = \{\mathrm{I}\}$.



TEOREMA:

- Sejam r_1 e r_2 duas retas representadas, respectivamente, pelas equações $\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0$ e $\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0$. Elas serão:

i. ***Paralelas e Coincidentes*** $\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}\ /\ (\alpha_1, \beta_1, \delta_1) = k(\alpha_2, \beta_2, \delta_2)$.

ii. ***Paralelas e Não Coincidentes*** $\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}\ /\ (\alpha_1, \beta_1) = k(\alpha_2, \beta_2)$.

iii. ***Concorrentes*** se $\nexists k \in \mathbb{R}\ /\ (\alpha_1, \beta_1) = k(\alpha_2, \beta_2)$.

  - O ponto de intersecção será a solução do sistema formado pelas equações $\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0$ e $\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Determine as eqs. da reta r que passa pelo ponto A$(4, -1)$ e tem a direção do vetor $\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}}$.
2. Represente graficamente as retas cujas equações são:
   a) $y = x - 5.$
   b) $y = 2x.$
   c) $x = 3.$
   d) $y = -4.$
3. Determine a posição relativa das retas r e s:

   $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{4};$ $\qquad s: (x, y) = (0, 0) + t(1,2), t \in \mathbb{R}.$

4. Se houver, calcule o ponto de intersecção I entre as retas:

   $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3};$ $\qquad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ $\qquad I(4,3)$