Gabarito e Soluções:

1. (d)

2.

(a) 2^9 (b) 3^4

(c) 5^2 (d). 3^3

(e) 3^{-1} (f) $0,0225$

(g) 4 (h) 9

(i) 2^{12} (j) 2^{64}

3. (c)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-3\right)\div\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}-3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-3\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1-\cancel{\frac{\sqrt{6}}{3}}-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\cancel{\frac{\sqrt{6}}{3}}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}-3 \quad = \quad \frac{\sqrt{3}-9}{3}
\end{aligned}$$

4.

1. $x(m+n-p)$
2. $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$
3. $2a(x-4)(x+4)$
4. $(m-n)(m-3)$
5. $(2a-3b)(2a+3b)$
6. $(m^2+4n^2)(m+2n)(m-2n)$
7. $x(x+2y)$
8. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$
9. $4ab$
10. $(x+y)^2$
11. $(1-x-y)(1+x+y)$
12. $(x-y-1)(x-y+1)$
13. $x^2+9x+20$
14. $(x-5)(x-4)$
15. $(y-12)(y+2)$
16. $(t+15)(t-3)$
17. $(x+2)(x^2-2x+4)$
18. $(a-1)(a^2+a+1)$
19. $(a+5)(a^2-5a+25)$
20. $(h-4)(h^2+4h+16)$

5.

(a) $z=\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)$ (d) $z=45+15i$

(b) $z=-1+8i$ (e) $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $z=-5$

6.

(a) $3i,\ -3i$ (b) $-1-i\sqrt{5},\ -1+i\sqrt{5}$

(c) $-\frac{3+3i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{3-i\sqrt{7}}{2},\ \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$

7. (a) $[-2,0)$ (b) $(-1,1)$ (c) $(-\infty,1]$ (d) $\left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\infty\right)$

8. (c)

Seja $a=7,3636\ldots$. Então

$$\begin{array}{rcl}
a &=& 7,3636\ldots\\
100a &=& 736,3636\ldots\\
\hline
99a &=& 729\\
a &=& \dfrac{729}{99}=\dfrac{81}{11}
\end{array}$$

Observe que a divisão

$$\begin{array}{r|l}
81 & 11\\
\cline{2-2}
4 & 7
\end{array}$$

não deixa resto 8. Testemos outra fração equivalente à $\dfrac{81}{11}$, de números naturais, $\dfrac{162}{22}$:

$$\begin{array}{r|l}
162 & 22\\
\cline{2-2}
8 & 7
\end{array}
\quad\equiv\quad
\begin{array}{r|l}
x & y\\
\cline{2-2}
8 & z
\end{array}$$

Portanto, $x=162$, $y=22$ e $z=7$ e daí $x+y+z=191$.

9.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}} &=\\
\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3+1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7+1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{\frac{15+1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{\frac{31+1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{\frac{63+1}{63}} &=\\
\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} &=\\
\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64} &=\\
&= \frac{63}{64}
\end{aligned}$$

10. Supondo que o preço de um produto seja $R\$\ 100,00$, após o primeiro desconto ele passa a custar $\dfrac{60}{100}\cdot 100 = R\$\ 60,00$. Após o segundo desconto, o preço final é $\dfrac{90}{100}\cdot 60 = R\$\ 54,00$. Assim, o desconto total é $100-54=46\%$.

11. (b)

O faturamento mensal da fábrica de Dona Norma é de $1500 \cdot 0,50 + 3500 \cdot 0,40 + 5000 \cdot 0,25 = R\$\ 3.400,00$. Segundo seu estudo, ela passaria a faturar 10% a mais, ou seja, $3400 \cdot 1,1 = R\$\ 3.740,00$. Como o faturamento com quibe e coxinha é $1500 \cdot 0,50 + 3500 \cdot 0,40 = R\$\ 2.150,00$, apenas com os pãezinhos passaria a ser $3740 - 2150 = R\$\ 1.590,00$. Se cada pãozinho deve ser vendido pelo preço de $0,25 \cdot 0,8 = R\$\ 0,20$, sua quantidade total deverá ser $\dfrac{1590}{0,20} = 7.950$, ou seja, $7950 - 5000 = 2.950$ a mais do que já produz.

12.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{4}{25}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{1}{2^7} + 3^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{2^7} + 27 = -\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + 27 = 27 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \cdot (2B - 14) = \frac{4}{5} \cdot (2 \cdot 27 - 14) = 32$$

13. (e)

Sejam x e y dois números inteiros. Então

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - (x^2 + y^2) &= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 \\ &= 2xy \end{aligned}$$

Note que essa diferença resulta em um número par e, portanto, não pode ser igual a 9.

14. $P = [-1, 0] \cup (2, 4]$

15. O carro consumiu $\dfrac{133,86}{3,88} = 34,5$ litros. Como a distância percorida foi $300km$, o consumo do carro é de $\dfrac{300}{34,5} \approx 8,70km$ por litro.

16. Suponha que a população seja de 1000 pessoas. Das quais, 100 estão intectadas. Dentre essas, o teste acerta 90% das vezes, portanto o teste identificou 90 pessoas com o vírus (e de fato elas o têm). No grupo das que não estão doentes, 20% são falsos positivos, portanto $0,20 \cdot 900 = 180$ estão sadias mas com teste positivo. Daí, as pessoas que o teste identificou como infectadas foram $90 + 180 = 270$ e as que estão com o vírus (pelo teste) foram 90. Por fim, o percentual fica em $\dfrac{90}{270} = \dfrac{1}{3} \approx 33,33\%$.

17.

$$\begin{aligned} 16^8 \times 125^9 &= (2^4)^8 \times (5^3)^9 \\ &= 2^{32} \times 5^{27} \\ &= 2^5 \times 2^{27} \times 5^{27} \\ &= 32 \times (2 \times 5)^{27} \\ &= 32 \times 10^{27} \end{aligned}$$

Isto quer dizer que o número $16^8 \times 125^9$ tem 27 algarismos zeros mais 2 algarismos de 32 e, assim, tem o total de 29 algarismos.

18. (c)

Como $-192x^5b$ é um termo do binômio $(ax+b)^n$ e a soma dos seus expoentes é igual a $5 + 1 = 6$, temos que $n = 6$. Além disso, $b < 0$. Pelo desenvolvimento do binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned} (ax - b)^6 &= (ax)^6 - 6(ax)^5 b + 15(ax)^4 b^2 \\ &- 20(ax)^3 b^3 + 15(ax)^2 b^4 - 6(ax) b^5 + b^6 . \end{aligned}$$

Logo,

$$-6a^5x^5b = -192x^5b \Rightarrow 6a^5 = 192 \Rightarrow a^5 = 32 \Rightarrow a = 2 ,$$

e, portanto, a é um número par menor que 8.

19. (c)

Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{a_n})^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{a_n} + a_n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n} . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + a_1 &\geq 2\sqrt{a_1} \\ 1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_2} \\ &\vdots \\ 1 + a_n &\geq 2\sqrt{a_n} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) &\geq 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{a_n} \\ &\geq 2^n \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \\ &\geq 2^n \cdot \sqrt{4} \\ &\geq 2^n \cdot 2 \\ &\geq 2^{n+1} \end{aligned}$$

Isto é, $P \geq 2^{n+1}$.

20. (c)

Das hipóteses no enunciado, temos:

$$\begin{cases} z_1 = a + xi \\ z_2 = a + yi \\ z_1 \cdot z_2 = 2 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+xi)(a+yi) = 2 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - xy) + a(y+x)i = 2 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - xy = 2 \\ a(y+x) = 0 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - xy = 2 \\ y + x = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - xy = 2 \\ y = -x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - x(-x) = 2 \\ a^2 - (-y)y = 2 \\ y = -x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + x^2 = 2 & \text{(I)} \\ a^2 + y^2 = 2 & \text{(II)} \\ y = -x \neq 0 \end{cases}$$

De (I) e (II), temos:

$$\begin{array}{l} a^2 + x^2 = 2 \iff \sqrt{|a+xi|} = 2 \iff |z_1| = \sqrt{2} \\ a^2 + y^2 = 2 \iff \sqrt{|a+yi|} = 2 \iff |z_2| = \sqrt{2} \end{array}$$

Além disso,

$$z_1 = a + xi = a - yi = \overline{z}_2.$$