Derivada

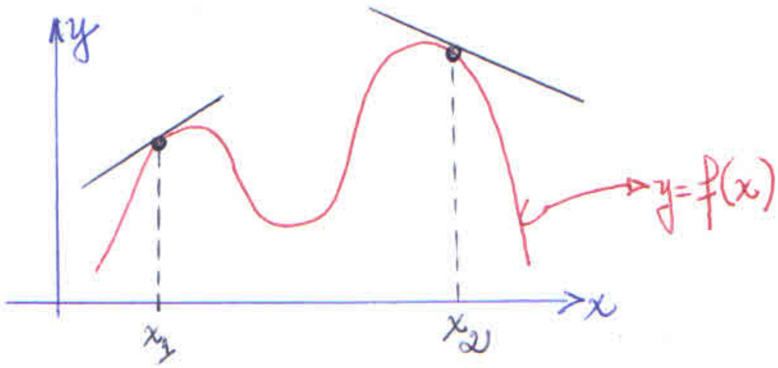
A derivada de uma função

Definição

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se esse limite existir. Dizemos que a função é derivável (diferenciável), quando existe a derivada em todos os pontos do seu domínio. Por exemplo:



Exemplo:

1) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 6x + 8$ no ponto (x_1, y_1).

$$\boxed{\underbrace{f'(x)}_{m_s} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$f(x_1) = x_1^2 - 6x_1 + 8$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 6(x_1 + \Delta x) + 8$$

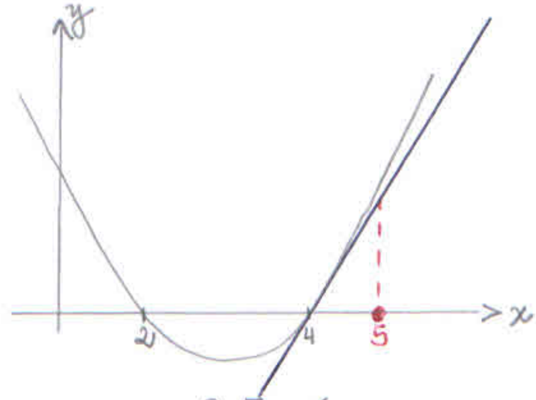
$$f(x_1 + \Delta x) = x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 6x_1 - 6\Delta x + 8$$

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_1^2} + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 \cancel{- 6x_1} - 6\Delta x \cancel{+8} \cancel{- x_1^2} \cancel{+ 6x_1} \cancel{- 8}}{\Delta x}$$

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 6\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_1 + \Delta x - 6)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$m_s = 2x_1 - 6$$



$$m_s = 2.5 - 6$$

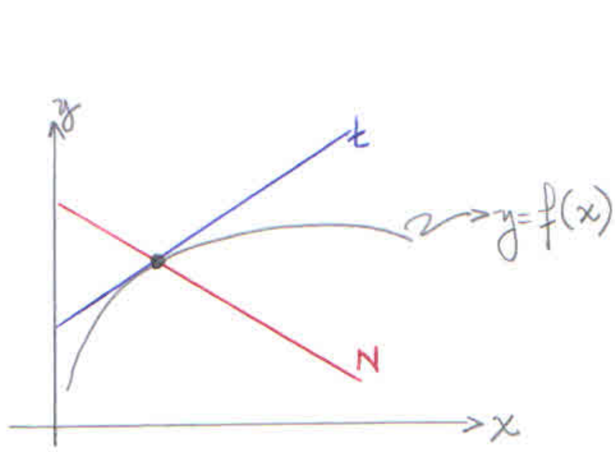
$\boxed{m_s = 4}$ $\Rightarrow$ coef. angular positivo
↳ reta tg crescente

Reta Normal a uma curva

Se duas retas não verticais s_1 e s_2 são perpendiculares, seus coeficientes angulares m_1 e m_2 satisfazem $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Então cada coeficiente angular é o "inverso do oposto" do outro.

Ex: $\boxed{m_s = \frac{2}{3} \quad := -\frac{3}{2}}$

No plano cartesiano tem-se:



2) Encontre a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 8$ no ponto cuja abscissa é 1.

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x_1) = -2x_1^2 + 8$$

$$f(x_1 + \Delta x) = -2(x_1 + \Delta x)^2 + 8$$

$$= -2(x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2) + 8$$

$$= -2x_1^2 - 4x_1\Delta x - 2\Delta x^2 + 8$$

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{-2x_1^2} - 4x_1\Delta x - 2\Delta x^2 \cancel{+8} + \cancel{2x_1^2} \cancel{-8}}{\Delta x}$$

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(-4x_1 - 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$m_s = \lim_{\Delta x} = -4x_1$$

Substituindo $x = 1$

$$m_s = -4 \qquad m_N = \frac{1}{4}$$

Obs. Se considerarmos o ponto $P(1,6)$, tem-se:

$$y - y_0 = m_s(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$4y - 24 = x - 1$$

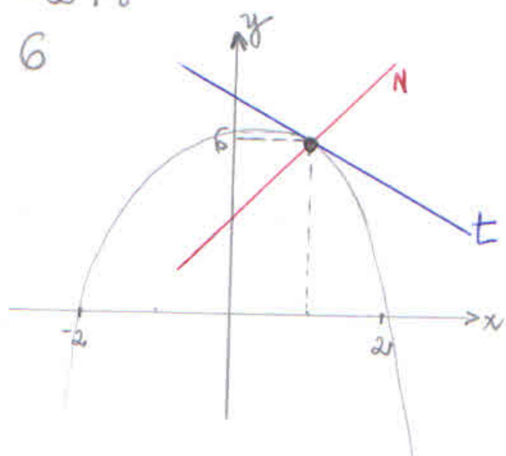
$$4y = x + 23$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{23}{4}$$

$$f(x) = -2x^2 + 8$$

$$f(1) = -2 + 8$$

$$f(1) = 6$$



Complementação das Regras de Derivação

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$y = x$

$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = 1$

$y = 4x$

$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = 4$

a) $\underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{2\pi}_{C}$

$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = 0$

b) $y = 8x.k$

$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = 8.k$

c) $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = 2x\pi + 7x$

$h(x) = f(x) + g(x)$

$h(x) = 2x + 3 + 2x\pi + 7x$

$h'(x) = f'(x) + g'(x)$

$\underbrace{h'(x)}_{\frac{dh}{dx}} = 2 + 2\pi + 7 = 2\pi + 9$

d) $\underbrace{F(x)}_{\frac{dF}{dx}} = -4x^{10}$

$\frac{dF}{dx} = -10.4x^9 = -40x^9$

e) $h(x) = \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)}_{v}$

$f(x) = 2x+3$

$g(x) = 3x^2$

$h(x) = u \cdot v$

$u = 2x+3$

$\underbrace{\frac{dh}{dx}}_{h'(x)} = u \cdot dv + v \cdot du$

$\frac{du}{dx} = 2$

$h'(x) = (2x+3) \cdot 6x + 3x^2 \cdot (2)$

$v = 3x^2$

$\frac{dv}{dx} = 6x$

$h'(x) = 12x^2 + 18x + 6x^2$

$h'(x) = 18x^2 + 18x$

$h'(x) = 18x(x+1)$

f) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\overbrace{f(x)}^{u} = 2x+1$

$\underbrace{g(x)}_{v} = 4x$

$h'(x) = \frac{v \cdot du - u\,dv}{v^2}$

$\frac{du}{dx} = 2$

$h'(x) = \frac{4x \cdot 2 - (2x+1) \cdot 4}{(4x)^2}$

$\frac{dv}{dx} = 4$

$h'(x) = \frac{\cancel{8x} - \cancel{8x} - 4}{16x^2}$

$h'(x) = \frac{-4}{16x^2} = \frac{-1}{4x^2}$