Derivadas

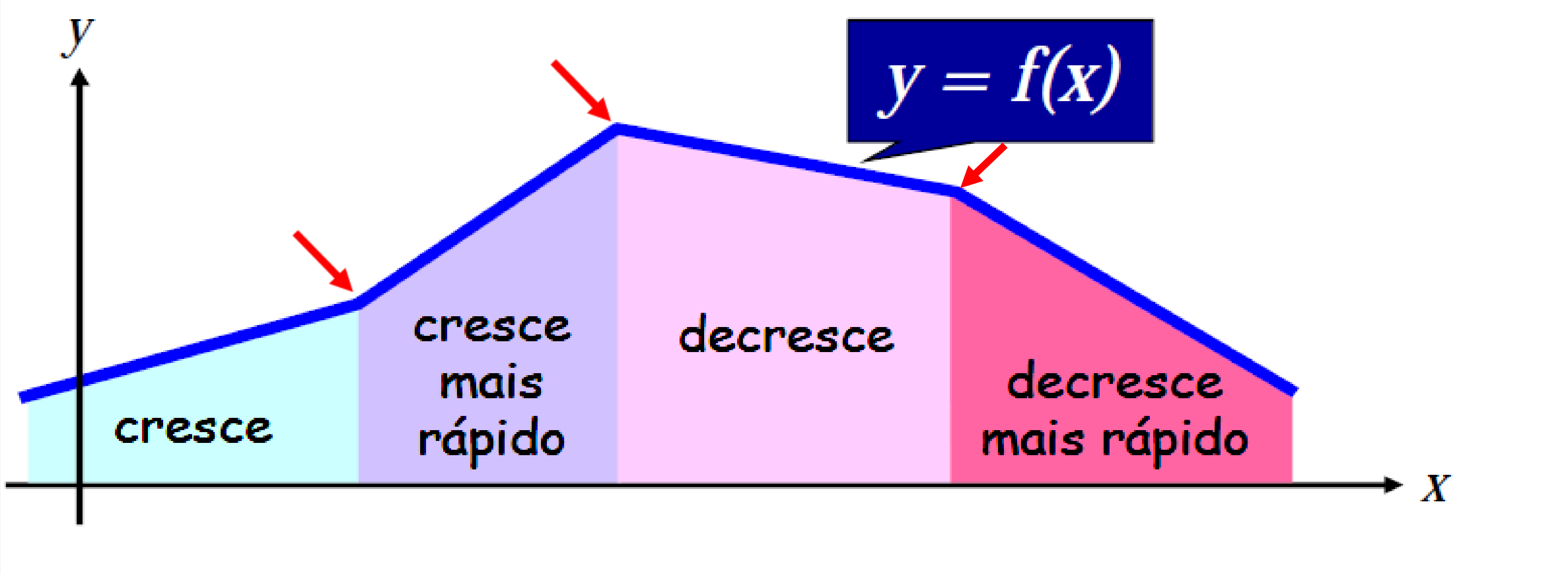
Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

- ✓ **O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema para encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite. Esse tipo especial de limite é denominado *Derivada*.**

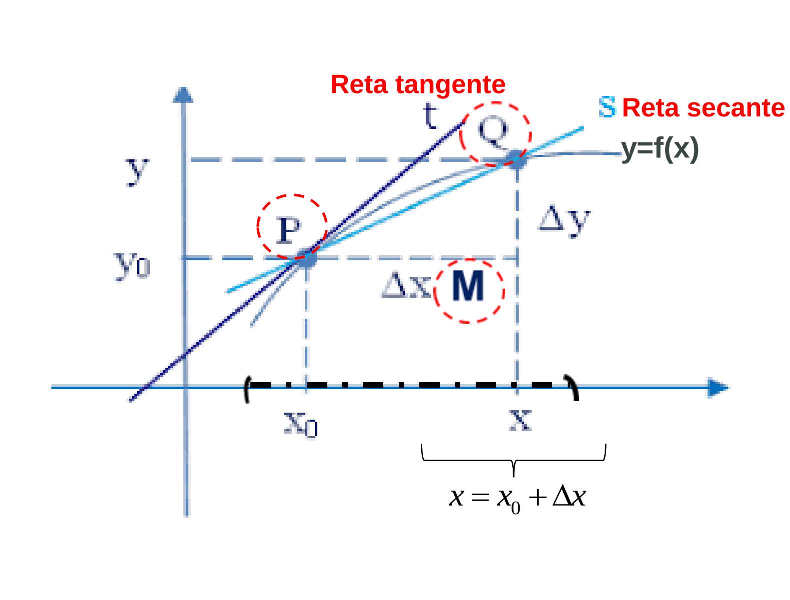
DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO



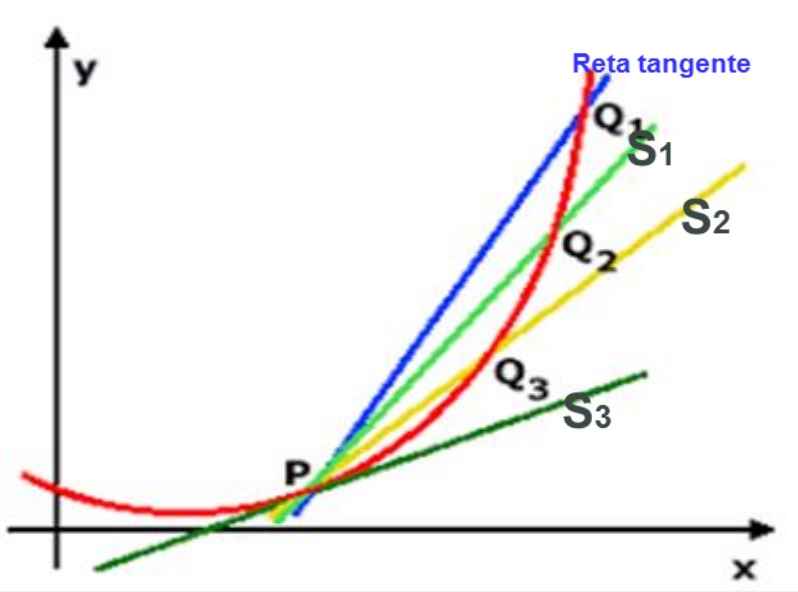
O coeficiente angular da reta tangente à curva pode indicar se há crescimento ou decrescimento, além da intensidade da mudança.

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

Considere as seguintes figuras:

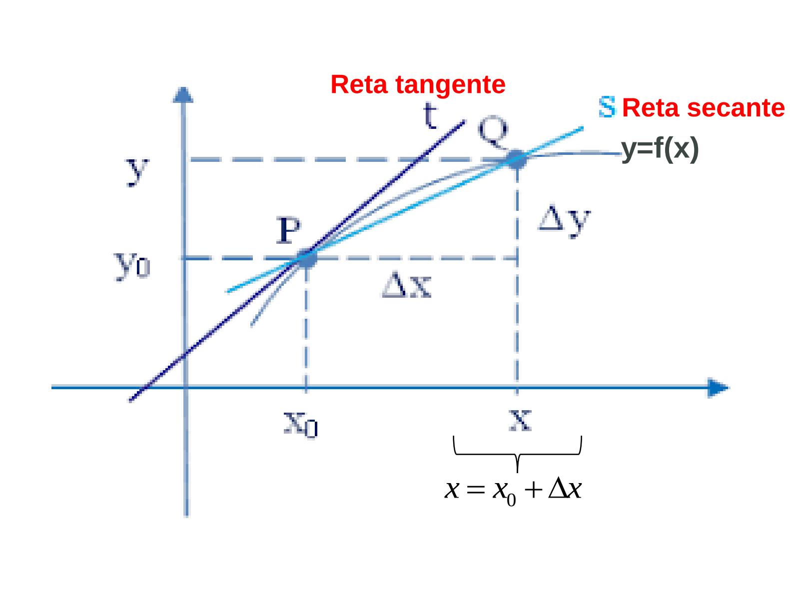


$$tg\alpha = m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Taxa de variação de f(x)

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO



$$tg\alpha = m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(y) - f(y_0)}{x - x_0}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\boxed{f'(x)}}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

Correspondente a derivada de f(x) em x, se este limite existir. Para um x qualquer, x $\in$ (a, b), tem-se:

$$f\,'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f^{'}(x) = \frac{dy}{dx}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 1:

Determine a inclinação da reta tangente à curva definida pela função $f(x) = x^2/2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(2+\Delta x)^2}{2} - \dfrac{2^2}{2}}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{2\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{2\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x}{2}$$

$$\boxed{m = 2}$$

$$f\,'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f\,'(x) = \frac{dy}{dx}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

$$tg\alpha = m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = tg\alpha \Delta x$$

$$(y - y_0) = tg\alpha.(x - x_0)$$

$$(y - y_0) = f^{'}(x).(x - x_0)$$ **Equação da reta tangente**

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 1: Continuação

$$(y - y_0) = f'(x).(x - x_0)$$

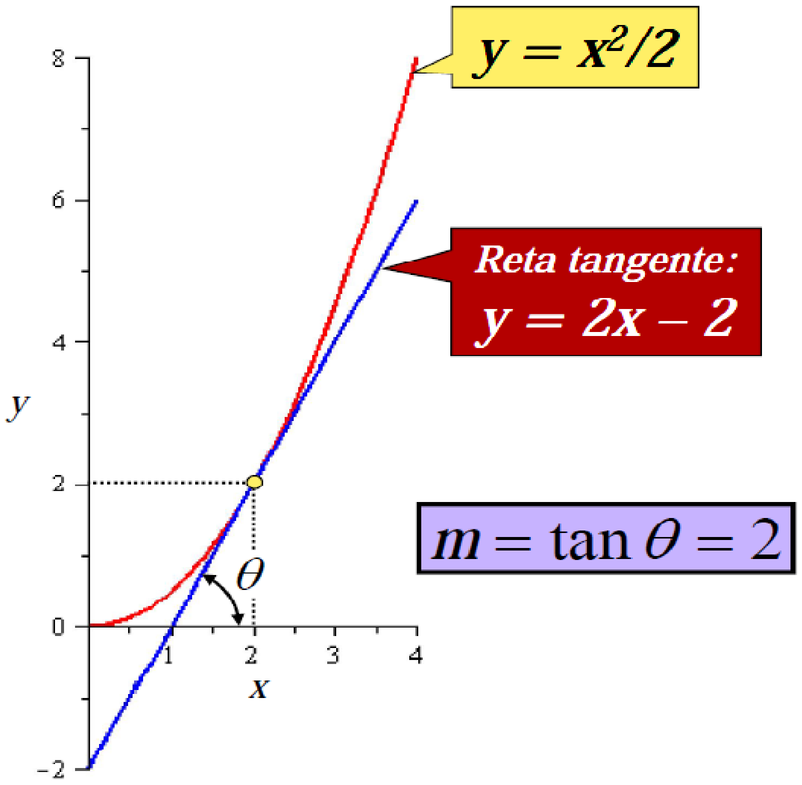
A reta tangente:

$$y = mx + b$$

Como o ponto (2, $f(2)$) da curva também pertence a esta reta, calcula-se o coeficiente linear b impondo-se o atendimento da equação

$$\therefore\ f(2) = 2m + b$$

$$\Rightarrow b = f(2) \quad 2m$$



DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 2:

Calcule a derivada da função $f(x) = x^3 + 2x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)] - (x^3 + 2x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x + 2\Delta x) - (x^3 + 2x)}{\Delta x}$$

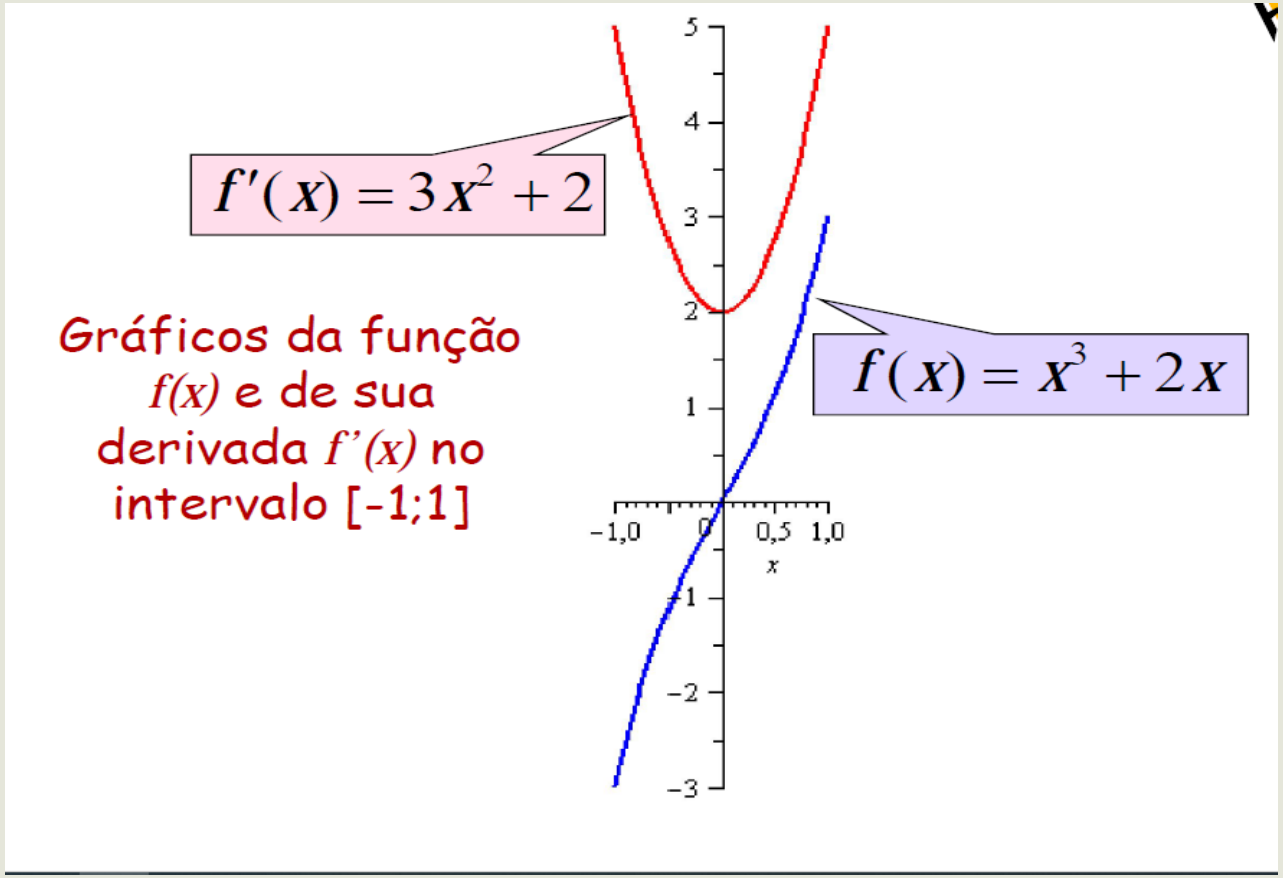
$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 2: Continuação



DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

1- DEFINIÇÃO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Sejam f uma função e p um ponto do seu domínio. O limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por f’(x). Assim:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

“Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p”.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

<u>PROPOSIÇÃO 1</u>- Derivada de uma Constante

Se C é uma constante e $f(x) = C$ para todo x, então $f'(x)= 0$.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u>- Derivada do Produto de uma Constante por uma Função

Sejam f uma função e C uma constante e g a função definida por $g(x) = C.\ f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então

$$g'(x) = C.f'(x)$$

<u>PROPOSIÇÃO 3</u>- Derivada de uma Soma

Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 4- Regra da Potência

Se n é um número positivo e f(x) = x^n então $f'(x) = nx^{n-1}$

PROPOSIÇÃO 5- Derivada de um Produto

Sejam f e g funções e h a função h(x) = f(x).g(x), se f'(x) e g'(x) existirem, então

h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x); **h'(x) = u.dv + du.v; u = f(x) e g(x) = v**
du = f'(x) e dv = g'(x)

PROPOSIÇÃO 6- Derivada do Quociente

Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Se f'(x) e g'(x) existem, então

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

<u>PROPOSIÇÃO 7</u>- Derivada de uma Função Exponencial

Se f(x) = a^x **, (a>0 e a $\neq$1), então f'(x) =** $a^x \ln a$

<u>PROPOSIÇÃO 8</u>- Regra da Cadeia

Sendo y = g(u), u = f(x) e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ **existem, então a função composta y = g[f(x)] tem a derivada dada por**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 9- Derivada de uma Função Logarítmica

Se $y = \log_a x$ **(a>0 e a $\neq$1), então** $y' = \frac{1}{x}\log_a e$

A função logarítmica natural y = lnx

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.dx$$