AULAS ANTERIORES

07/05/2021 (GRAVADA)

PRODUTO ESCALAR:

$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ... base do espaço $\therefore$ $\begin{cases} \vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E \\ \vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E \end{cases}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad , \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Versor: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\forall \ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} |\vec{u}| = 1 \\ \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ têm mesmo sentido} \end{cases}$

Distância: $\delta(A, B) = |\vec{AB}|$

Propriedades:

I) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \forall \ \vec{u} \neq \vec{0}$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

II) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Comutativa)

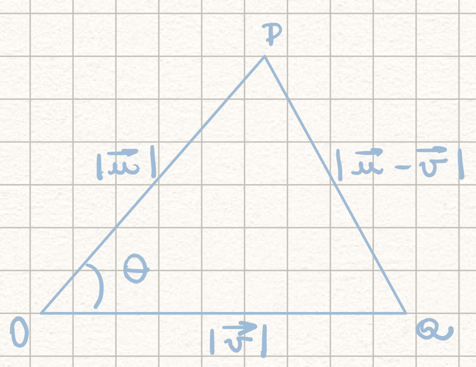
III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ (Distributiva)

IV) $(m\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$ (Associativa)

V) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

Ângulo entre Dois Vetores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \cos\theta$$



Lei dos Cossenos

PROJEÇÃO ORTOGONAL

TEOREMA I:

Se $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ então $\begin{cases} \vec{w} \parallel \vec{v} & (i) \\ \vec{u} - \vec{w} \perp \vec{v} & (ii) \end{cases}$

Portanto, provar que $\vec{w}$ existe e é único equivale a provar que existe um único número real k tal que:

$$\vec{w} = k\,\vec{v} \quad (i)$$

e

$$(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \therefore \quad (\vec{u} - k\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (ii)$$

Aplicando a Distributiva e a Associativa em (ii):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} - k\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$$

Logo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} - k\,(|\vec{v}|^2) = 0$$

E:

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad \text{ou} \quad k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Como existe somente um número real que representa o produto escalar entre dois vetores, então k é a única solução de (ii). Desta forma, em (i) tem-se que:

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right)\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$$

Observações:

i) Calculando o módulo de $\vec{w}$:

$$\underbrace{|\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}|}_{=\vec{w}} = \left|\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}\right|$$

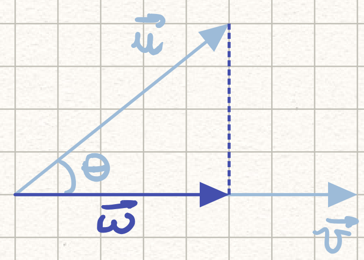
$$= \left|\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\right| |\vec{v}|$$

$$= \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|\,\cancel{|\vec{v}|}}{|\vec{v}|^{\cancel{2}}} \quad \therefore \quad |\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Mas, se for conhecido o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser associado com o cosseno de θ e o módulo do vetor projeção pode ser reescrito da seguinte forma:

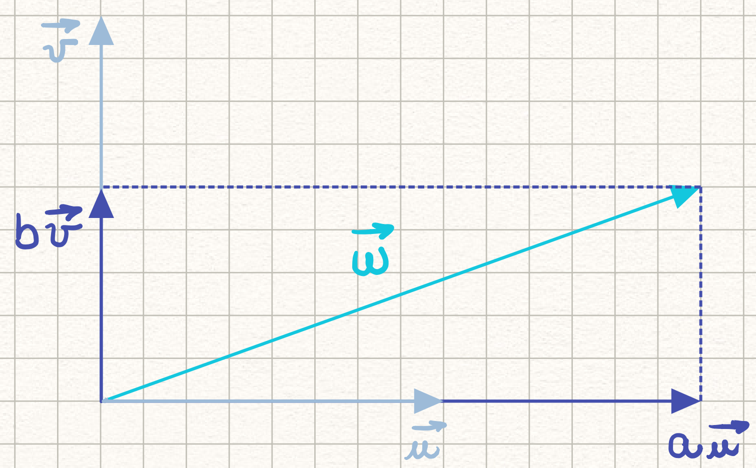
$$|\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}| = \frac{|\vec{u}|\,\cancel{|\vec{v}|}\cos\theta}{\cancel{|\vec{v}|}}$$

$$\longrightarrow |\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}| = |\vec{u}|\cos\theta$$



$$|\vec{w}| = |\vec{u}|\cos\theta$$

ii) Relação entre projeção e os coeficientes da CL:



$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \qquad (1)$$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$

Mostrar que: $\vec{w} = proj_{\vec{u}}\vec{w} + proj_{\vec{v}}\vec{w}$ implica mostrar que:

$$a = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \quad ; \quad b = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Para calcular a, aplique o produto escalar por $\vec{u}$ em ambos os lados da eq. (1):

$$\vec{w}\cdot\vec{u} = a(\vec{u}\cdot\vec{u}) + b\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{u})}_{=0\ (\vec{u}\perp\vec{v})}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{u} = a(\vec{u}\cdot\vec{u})$$

$$\therefore \quad a = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Para calcular b, aplique o produto escalar por $\vec{v}$ em ambos os lados da eq. (1):

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = a\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{=0\ (\vec{u}\perp\vec{v})} + b(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = b(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$\therefore \quad b = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Substituindo a e b na eq. (1):

$$\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} + \left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

$$\longrightarrow \vec{w} = proj_{\vec{u}}\vec{w} + proj_{\vec{v}}\vec{w}$$

EXERCÍCIOS : 5 e 6

5) E ... base ortonormal $\begin{cases} \text{vetores unitários} \\ \text{vetores ortogonais} \end{cases}$

$\vec{w} = (1,1)_E$; $\vec{u} = (-2,1)_E$; $\vec{v} = (1,2)_E$

$\vec{w} = ?$ $\longrightarrow$ CL de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ utilizando projeção.

Considerando que E é uma base ortonormal, seus vetores são ortogonais. Com isso, a CL de qualquer vetor E plano equivale à soma de suas projeções ortogonais nas direções dos vetores da base. Desta forma, a abordagem por projeção para encontrar $\vec{w}$ como CL de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ somente será possível se $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(-2,1)_E \cdot (1,2)_E = -2+2 = 0$$

Logo, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Portanto:

$$\vec{w} = proj_{\vec{u}}\vec{w} + proj_{\vec{v}}\vec{w}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} + \left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = (1,1)_E \cdot (-2,1)_E = -1$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = (-2,1)_E \cdot (-2,1)_E = 5$

$\vec{w}\cdot\vec{v} = (1,1)_E \cdot (1,2)_E = 3$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = (1,2)_E \cdot (1,2)_E = 5$

Substituindo os produtos escalares na eq. anterior, tem-se que:

$$\vec{w} = -\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v}$$

6) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ... base ortonormal do espaço $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases}$

Se $\vec{t} \in$ espaço, então:

$$\vec{t} = \boxed{proj_{\vec{u}}\vec{t}} + \boxed{proj_{\vec{v}}\vec{t}} + \boxed{proj_{\vec{w}}\vec{t}}$$

$$\vec{t} = \boxed{a\vec{u}} + \boxed{b\vec{v}} + \boxed{c\vec{w}} \quad (1)$$

$a, b, c = ?$

Para calcular a, aplique o produto escalar por $\vec{u}$ em ambos os lados da eq. (1):

$$\vec{t}\cdot\vec{u} = a(\vec{u}\cdot\vec{u}) + b\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{u})}_{=0}^{(\vec{v}\perp\vec{u})} + c\underbrace{(\vec{w}\cdot\vec{u})}_{=0}^{(\vec{w}\perp\vec{u})}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{u} = a(\vec{u}\cdot\vec{u}) \quad \therefore \quad a = \frac{\vec{t}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \;//$$

Para calcular b, aplique o produto escalar por $\vec{v}$ em ambos os lados da eq. (1):

$$\vec{t}\cdot\vec{v} = a\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{=0}^{(\vec{v}\perp\vec{u})} + b(\vec{v}\cdot\vec{v}) + c\underbrace{(\vec{w}\cdot\vec{v})}_{=0}^{(\vec{w}\perp\vec{v})}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{v} = b(\vec{v}\cdot\vec{v}) \quad \therefore \quad b = \frac{\vec{t}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} \;//$$

Para calcular c, aplique o produto escalar por $\vec{w}$ em ambos os lados da eq. (1):

$$\vec{t} \cdot \vec{w} = a\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{w})}_{=0}^{(\vec{w} \perp \vec{u})} + b\underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{w})}_{=0}^{(\vec{w} \perp \vec{v})} + c(\vec{w} \cdot \vec{w})$$

$$\vec{t} \cdot \vec{w} = c(\vec{w} \cdot \vec{w}) \quad \therefore \quad c = \frac{\vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \,//$$

Substituindo a, b e c na eq. (1), tem-se:

$$\vec{t} = \left(\frac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u} + \left(\frac{\vec{t} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right)\vec{v} + \left(\frac{\vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\right)\vec{w}$$

Portanto:

$$\vec{t} = \operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{t} + \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{t} + \operatorname{proj}_{\vec{w}}\vec{t}$$