UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

5. Produto Escalar

LOB 1036 - Geometria Analítica
Profa. Paula C P M Pardal

Relembrando ...

- SOs equipolentes ➔ Vetores.
- Dependência e Independência Linear.
  - Base ➔ Todo vetor $\vec{v}$ é CL dos vetores da base ➔ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \therefore \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
- Operações com Vetores ➔ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $m \in \mathbb{R}$:
  - *Igualdade*: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2\ ;\ y_1 = y_2\ ;\ z_1 = z_2$
  - *Adição/Diferença*: $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$
  - *Multiplicação por um n. real*: $m\vec{u} = (mx_1, my_1, mz_1)$
- Vetor definido por dois pontos: se $A(x_a, y_a, z_a)$ e $B(x_b, y_b, z_b)$, então:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

- Paralelismo de dois vetores ➔ LD ➔ *coordenadas dos vetores proporcionais*.

5.1 Produto Escalar

DEFINIÇÃO:

- Sejam $(a_1, b_1, c_1)_{\mathrm{E}}$ e $(a_2, b_2, c_2)_{\mathrm{E}}$ as coordenadas de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ em uma base ortonormal E, respectivamente. O produto escalar ou produto interno usual entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o ***número real*** tal que:

  i. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

  ii. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$.

- Outras representações: $\langle \vec{u}\, , \vec{v} \rangle$; $\vec{u} / \vec{v}$.

Observações

a) O **módulo** de um vetor não nulo $\vec{v}$, indicado por $|\vec{v}|$, é um *escalar*, *não negativo*, dado por $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Se $\vec{v} = (a, b, c)_E \therefore |\vec{v}| = \sqrt{(a, b, c)_E \cdot (a, b, c)_E} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) O **versor** de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o *vetor unitário* $\vec{u}$, com *mesma direção* e *mesmo sentido* de $\vec{v}$, dado por $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

c) A **distância** δ entre dois pontos é definida como $\delta(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$, em que $\overrightarrow{AB} = B - A$.

5.2 Propriedades do Produto Escalar

Sejam: E uma base ortonormal; $(a_1, b_1, c_1)_{\mathrm{E}}$, $(a_2, b_2, c_2)_{\mathrm{E}}$ e $(a_3, b_3, c_3)_{\mathrm{E}}$, as coordenadas dos vetores $\vec{\mathrm{u}}$, $\vec{\mathrm{v}}$ e $\vec{\mathrm{w}}$ na base E, respectivamente; e $m \in \mathbb{R}$. Verificam-se as seguintes propriedades:

I. $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{u}} \geq 0$ e $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathrm{u}} = (0,0,0) = \vec{0}$

II. $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{u}}$ **(Comutativa)**

III. $\vec{\mathrm{u}} \cdot (\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{w}}) = \vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{w}}$ (**Distributiva** em relação à adição de vetores)

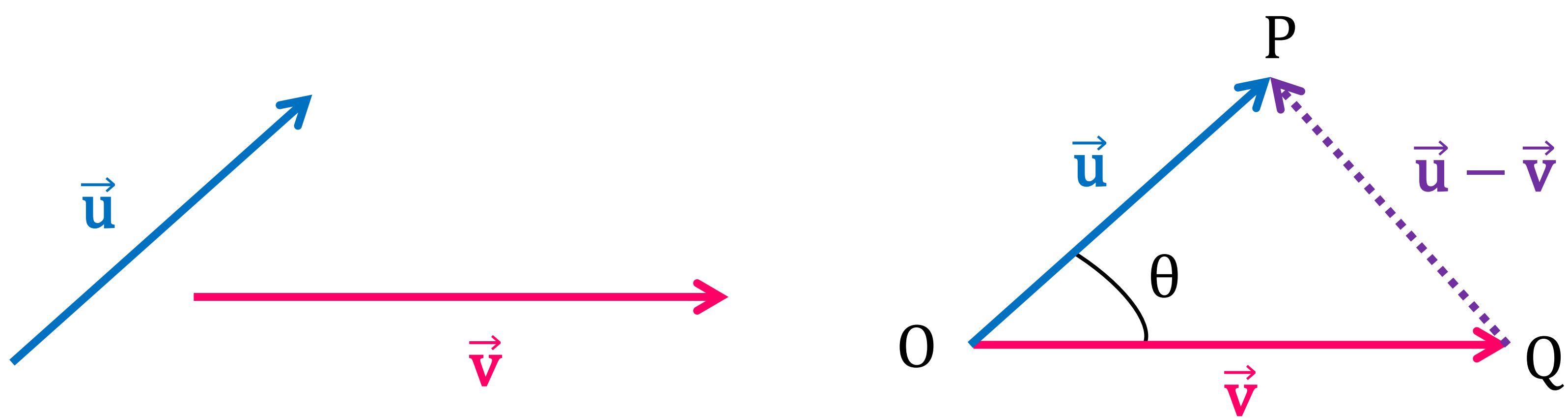
IV. $(m\vec{\mathrm{u}}) \cdot \vec{\mathrm{v}} = m(\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{v}}) = \vec{\mathrm{u}} \cdot (m\vec{\mathrm{v}})$ **(Associativa)**

V. $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = |\vec{\mathrm{u}}|^2$

5.3 Ângulo entre Dois Vetores

DEFINIÇÃO:

- Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. O ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a ***medida*** do **menor ângulo** entre os representantes $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, respectivamente.



- $0 \leq \theta \leq \pi$ rad.

- Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é estabelecida a relação: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$.

Observações

a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

i. Se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$, $\cos\theta$ deve ser um número positivo, o que implica $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \therefore$ θ ***é um ângulo agudo ou nulo***.

ii. Se $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$, $\cos\theta$ deve ser um número negativo, o que implica $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \therefore$ θ ***é um ângulo obtuso ou raso***.

iii. Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, $\cos\theta$ deve ser igual a zero, o que implica $\theta = \frac{\pi}{2} \therefore$ θ ***é um ângulo reto*** e os vetores são perpendiculares entre si.

b) É sempre possível escolher uma ***base ortonormal***?

$E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ será uma base ortonormal se e somente se:

1) $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_3} = 1$

2) $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = 0$

EXERCÍCIOS

1. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m + 2)$ é $\frac{\pi}{3}$, determine m.

   $\boldsymbol{m = -4}$

2. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determine a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

   $\boldsymbol{a = 2}$

3. Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1,2, 1)$, determine o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

   $\boldsymbol{\vec{u} = \left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)}$

4. Dados os pontos $A(3, m - 1, -4)$ e $B(8, 2m - 1, m)$, determine m tal que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$.

   $\boldsymbol{m = -1}$ **ou** $\boldsymbol{m = -3}$

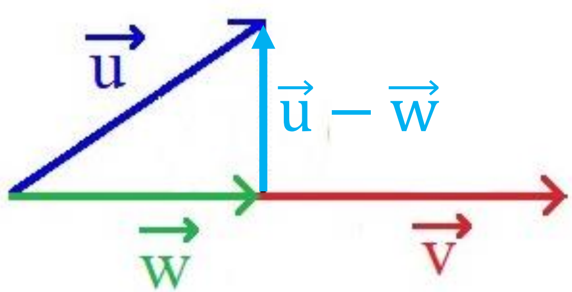
5.4 Projeção Ortogonal

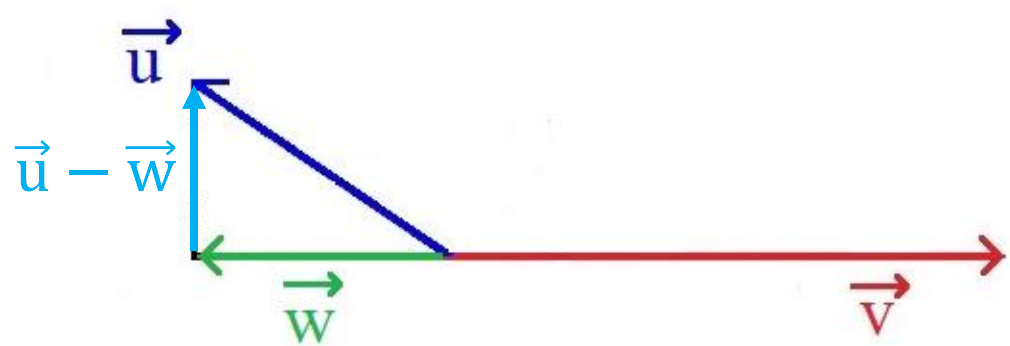
DEFINIÇÃO:

- Sejam dois vetores ***não nulos*** $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Existe um vetor $\vec{w}$ que é a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, indicado por $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, se satisfizer as seguintes condições:

$$\vec{w} \parallel \vec{v}$$

$$\vec{u} - \vec{w} \perp \vec{v}$$





- O Teorema I garante a existência da projeção ortogonal sobre vetores não nulos.

TEOREMA I: *Existência e Unicidade da Projeção Ortogonal*

- Sejam $\vec{v}$ um vetor não nulo e $\vec{u}$ um vetor qualquer. Existe uma única projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ tal que:

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$$

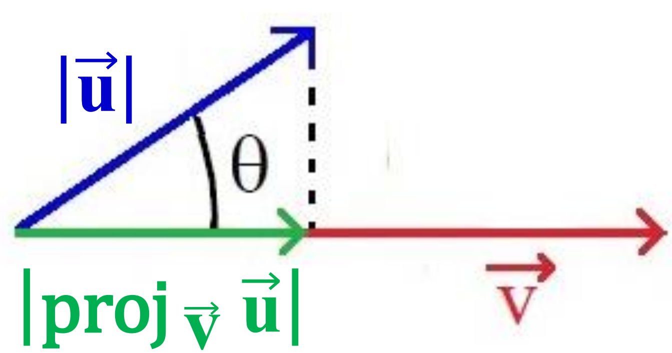
Observações

i. Segue do Teorema I que:

$$\left|\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\right| = \left|\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}\right| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|^2}\,|\vec{v}| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Mais ainda: se θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tem-se:

$$\left|\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\right| = \frac{\left||\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\right|}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|\cos\theta$$



ii. Note que se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, então são LI (não são paralelos). Por Teorema, sabe-se que todo vetor $\vec{w}$ no plano pode ser escrito como CL de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, isto é, existem escalares a e b tal que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Deseja-se calcular a e b.

Para tanto, aplique o produto escalar por $\vec{u}$ em ambos os lados, obtendo:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{u} = a\vec{u} \cdot \vec{u} + b\vec{v} \cdot \vec{u} = a|\vec{u}|^2 \therefore a = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Analogamente, aplicando o produto escalar por $\vec{v}$ em ambos os lados:

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = b|\vec{v}|^2 \therefore b = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

CONCLUSÃO:

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores ortogonais e $\vec{w}$ é um vetor qualquer do plano, formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u} + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v}$$

ou

$$\vec{w} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{w} + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}$$

EXERCÍCIOS

5. Dados: a base ortonormal E e os vetores $\vec{w} = (1,1)_E$, $\vec{u} = (-2,1)_E$ e $\vec{v} = (1,2)_E$. Escreva $\vec{w}$ como CL de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$. Resolva através do conceito de projeção. Explique porque é possível resolver através de projeção. $\vec{w} = -\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v}$

6. Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal do espaço ($\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$) e $\vec{t}$ é um vetor qualquer do espaço, então:

$$\vec{t} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{t} + \text{proj}_{\vec{v}}\vec{t} + \text{proj}_{\vec{w}}\vec{t}$$