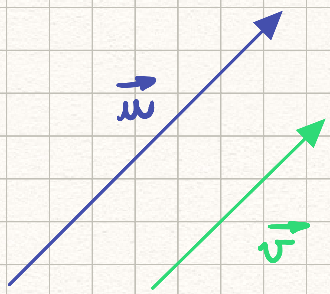
05/05/2021

Dependência Linear:

$$\boxed{a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_n\vec{v_n}} = \vec{0} \quad \text{CL}$$

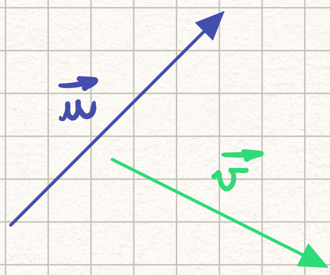
$$\begin{cases} \exists\, a_i \neq 0 \longrightarrow \text{LD} \\ \text{somente } a_i = 0 \longrightarrow \text{LI} \end{cases}$$

SOLUÇÃO TRIVIAL



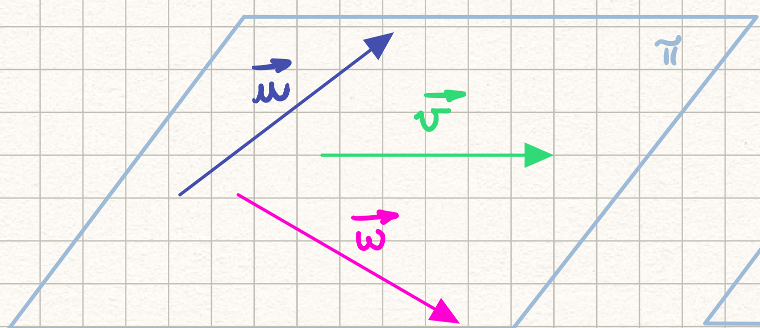
2 vetores LD são paralelos

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \boxed{\vec{u} = \lambda \vec{v}} \quad \text{CL}$$



2 vetores LI não são paralelos

$$\nexists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \vec{u} = \lambda \vec{v}$$



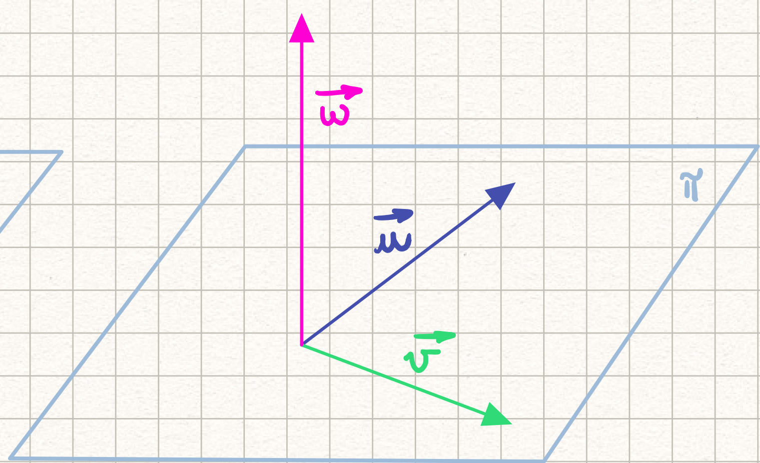
3 vetores LD são coplanares

CL

$$\boxed{\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$



3 vetores LI não são coplanares

Não é possível decompor qualquer dos vetores na direção dos outros $\therefore \nexists$ CL

Vetores no Plano:

Base do Plano $\begin{cases} \text{2 vetores LI} \\ \text{Geram todos os vetores do plano} \end{cases}$

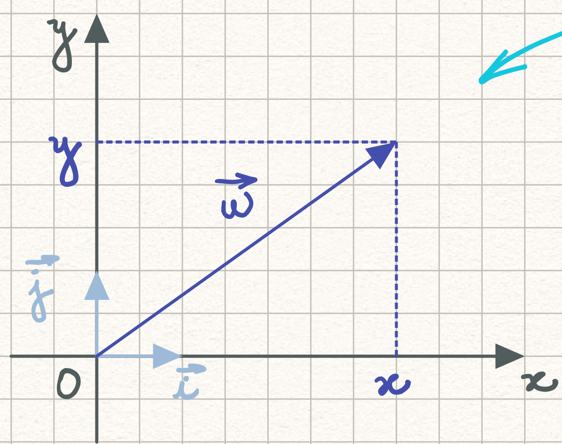
$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

CL dos vetores da base $\xrightarrow{\vec{w} \in \text{plano}}$ $\vec{w} = \underbrace{a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2}$

$\vec{w} = (a_1, a_2)_E$ ... coordenadas de $\vec{w}$ em relação aos vetores da base E

Base Canônica

* Base Ortonormal $\begin{cases} \text{vetores unitários} : |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \\ \text{vetores ortogonais} : \vec{i} \perp \vec{j} \end{cases}$



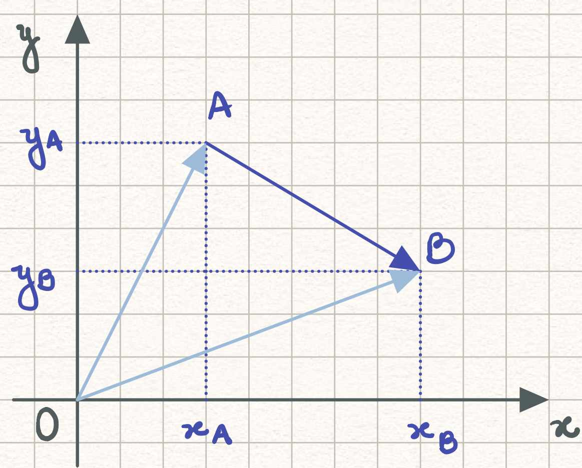
Plano Cartesiano ($\mathbb{R}^2$) $\begin{cases} O(0,0) \\ \{\vec{i}, \vec{j}\} \end{cases}$

$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$

projeção ORTOGONAL de $\vec{w}$ sobre o eixo y

projeção ORTOGONAL de $\vec{w}$ sobre o eixo x

Vetor Definido por Dois Pontos

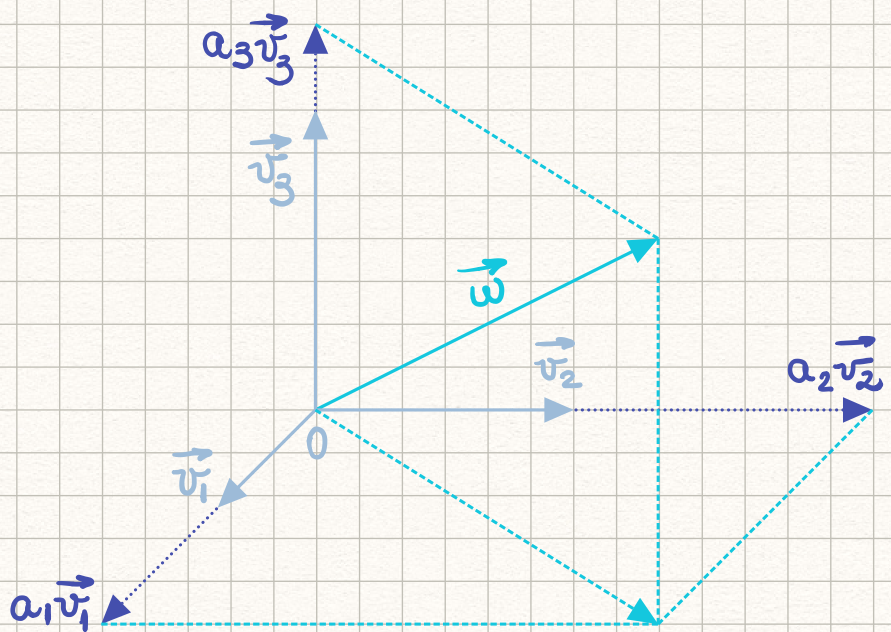


Considerando que qualquer ponto do plano tem as mesmas coord. de um vetor medido da origem ao ponto:

$\vec{AB} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a)$

4. Vetores no Espaço

Slide 17



CL

$$\vec{w} = \boxed{a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}}$$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v_3}$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v_2}$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v_1}$

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$: **BASE** do espaço $\begin{cases} \text{3 vetores LI (não coplanares)} \\ \text{geram o espaço} \end{cases}$

Slide 18

Teorema V:

Suponha que $\vec{w}$ pode ser escrito de duas maneiras diferentes como CL dos vetores da base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, isto é:

$$\vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}$$

e

$$\vec{w} = b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} + b_3\vec{v_3}$$

Como $\vec{w} = \vec{w}$, tem-se:

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} = b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} + b_3\vec{v_3}$$

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{c_1}\vec{v_1} + \underbrace{(a_2 - b_2)}_{c_2}\vec{v_2} + \underbrace{(a_3 - b_3)}_{c_3}\vec{v_3} = \vec{0}$$

E por ser base, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ é um conjunto LI (todos $c_i = 0$), portanto:

$$a_1 = b_1$$
$$a_2 = b_2$$
$$a_3 = b_3$$

e a CL é única!

Slide 20

Teorema VI:

coordenadas dos vetores na base E

O conjunto $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, com $\begin{cases} \vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)_E \\ \vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)_E \\ \vec{v_3} = (a_3, b_3, c_3)_E \end{cases}$

será LD se, e somente se a equação:

$$\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3} = \vec{0} \qquad (1)$$

admitir solução não trivial ($\exists\, \alpha, \beta$ ou $\gamma \neq 0$).

Considerando a base $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, a eq. (1) pode ser reescrita como:

$$\alpha \underbrace{(a_1\vec{e_1} + b_1\vec{e_2} + c_1\vec{e_3})}_{\vec{v_1}} + \beta \underbrace{(a_2\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + c_2\vec{e_3})}_{\vec{v_2}} + \gamma \underbrace{(a_3\vec{e_1} + b_3\vec{e_2} + c_3\vec{e_3})}_{\vec{v_3}} = \vec{0}$$

Reagrupando os termos:

$$\underbrace{(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3)}_{=K_1}\vec{e_1} + \underbrace{(\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3)}_{=K_2}\vec{e_2} + \underbrace{(\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3)}_{=K_3}\vec{e_3} = \vec{0}$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 0 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

porque $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é base e todos $K_i = 0$

E o conjunto $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ será LD se, e somente se, o Sistema Linear Homogêneo (SLH) definido na eq. (2) admitir solução não trivial. De acordo com a Regra de Cramer, isso acontecerá quando:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{, ou ainda ,} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\det M = \det M^T$

EXERCÍCIOS

1) $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD ou LI?

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1,-1,2)_E \\ \vec{v} = (0,1,3)_E \\ \vec{w} = (4,-3,11)_E \end{array}\right\} \quad \text{Pela definição: } \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$$

Substituindo as coord. na equação:

$$\alpha(1,-1,2)_E + \beta(0,1,3)_E + \gamma(4,-3,11)_E = \vec{0}$$

$$(\alpha, -\alpha, 2\alpha)_E + (0, \beta, 3\beta)_E + (4\gamma, -3\gamma, 11\gamma)_E = \vec{0}$$

$$(\alpha + 4\gamma, -\alpha + \beta - 3\gamma, 2\alpha + 3\beta + 11\gamma)_E = (0,0,0)_E$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 4\gamma = 0 & (i) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (ii) \\ 2\alpha + 3\beta + 11\gamma = 0 & (iii) \end{cases}$$

De (i): $\alpha = -4\gamma$

De (ii): $\beta = -\gamma$

$(-11+11)\gamma = 0$

$\alpha, \beta \longrightarrow$ (iii): $-8\gamma - 3\gamma + 11\gamma = 0$

$0 = 0$ ou $0\gamma = 0 \therefore \gamma \in \mathbb{R}$

Como $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \neq 0$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um conjunto LD.

2) CL: $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, $\alpha, \beta, \gamma = ?$

$\vec{t} = (4, 0, 13)_E$

$\vec{u} = (1, -1, 3)_E$

$\vec{v} = (2, 1, 3)_E$

$\vec{w} = (-1, -1, 4)_E$

Substituindo as coord. na equação, encontram-se α, β e γ:

$$(4,0,13)_E = \alpha(1,-1,3)_E + \beta(2,1,3)_E + \gamma(-1,-1,4)_E$$

$$(4,0,13)_E = (\alpha, -\alpha, 3\alpha)_E + (2\beta, \beta, 3\beta)_E + (-\gamma, -\gamma, 4\gamma)_E$$

$$(4,0,13)_E = (\alpha + 2\beta - \gamma, -\alpha + \beta - \gamma, 3\alpha + 3\beta + 4\gamma)_E$$

A solução da igualdade acima leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 4 & (i) \\ -\alpha + \beta - \gamma = 0 & (ii) \\ 3\alpha + 3\beta + 4\gamma = 13 & (iii) \end{cases}$$

De (ii): $\gamma = -\alpha + \beta$

$\gamma \longrightarrow (i): \beta = 4 - 2\alpha$

$\beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \gamma = 4 - 3\alpha$

$\beta, \gamma \longrightarrow (iii): 3\alpha + 3(4-2\alpha) + 4(4-3\alpha) = 13$

$3\alpha + 12 - 6\alpha + 16 - 12\alpha = 13$

$-15\alpha = 13 - 28$

$\alpha = 1 \quad \therefore \begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$

E a CL de $\vec{t}$ pode ser escrita como: $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$

3) $(3,7,1) + 2\vec{v} = (6,10,4) - \vec{v}$, $\vec{v} = ?$

$2\vec{v} + \vec{v} = (6,10,4) - (3,7,1)$

$(2+1)\vec{v} = (6-3, 10-7, 4-1)$

$3\vec{v} = (3,3,3)$

$\vec{v} = \frac{1}{3}(3,3,3) = \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{3}\right)$

$\longrightarrow \vec{v} = (1,1,1)$

4) Se $\vec{u} \parallel \vec{v} \therefore \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{u} = k\vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (4, 1, -3) \\ \vec{v} = (6, a, b) \end{array}\right\} \quad \vec{u} = k\vec{v}$$

Substituindo as coord. na equação:

$$(4, 1, -3) = k\,(6, a, b)$$

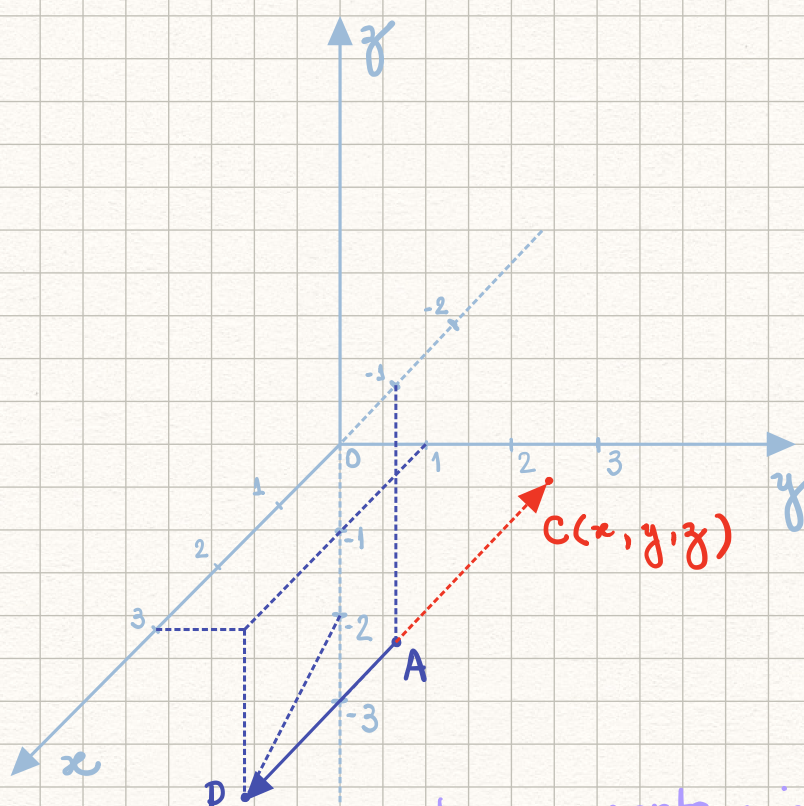
$$(4, 1, -3) = (6k, ak, bk)$$

A igualdade acima leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6k = 4 \longrightarrow k = 2/3 \\ ak = 1 \\ bk = -3 \end{cases}$$

$a = \dfrac{3}{2}$; $b = -\dfrac{9}{2}$

5) O simétrico de P em relação a A está à mesma distância de A, porém no sentido contrário:



$P(3, 1, -2)$; $A(-1, 0, -3)$

$$\vec{AP} = -\vec{AC}$$

$$P - A = -(C - A)$$

$$(4, 1, 1) = (-x-1, -y, -z-3)$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} -x-1 = 4 \\ -y = 1 \\ -z-3 = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} x = -5 \\ y = -1 \\ z = -4 \end{array}$$

Logo, o ponto simétrico tem coord. $(-5, -1, -4)$