UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

3. Dependência Linear

LOB1036 - Geometria Analítica
Profa. Paula C P M Pardal

3.1 Dependência Linear

- No estudo da Geometria em duas e três dimensões é frequente o paralelismo e a coplanaridade ➔ dependência linear é uma ferramenta importante no tratamento destas situações.
- Um vetor não nulo $\vec{u}$ será paralelo a uma reta r (ou a um plano π) se existir um representante desse vetor paralelo à reta (ou ao plano).
  - **Notação:** $\vec{u} \parallel r$ e $\vec{u} \parallel \pi$.
  - Dois vetores paralelos a uma reta são paralelos entre si, mas dois vetores paralelos a um plano, não são necessariamente paralelos.
  - Se um vetor $\vec{u}$ é paralelo à reta r (ou ao plano π), então existe um representante desse vetor contido em r (ou em π).
- Um vetor será coplanar com outros vetores se eles forem paralelos ou se um puder ser escrito em termos dos outros ➔ soma ponderada.

DEFINIÇÃO: *Combinação Linear*

- O vetor não nulo $\vec{v}$ é combinação linear (CL) dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que, sendo os vetores tomados na sequência apresentada, tem-se:

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}$$

  - Diz-se também que o vetor $\vec{v}$ é gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.
  - Os a_i , $i = 1, \cdots, n$ são chamados coeficientes da CL.

- Exemplo:
  - $\vec{0} = 0\,\overrightarrow{v_1} + 0\,\overrightarrow{v_2} + \ \ldots + 0\,\overrightarrow{v_n}$ ➔ expressão trivial do vetor nulo.

DEFINIÇÃO: *Conjunto LD*

- Um conjunto de vetores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ é dito linearmente dependente (LD) se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

DEFINIÇÃO: *Conjunto LI*

- Um conjunto de vetores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é dito linearmente independente (LI) se e somente se a única solução que a equação

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

admite é a solução trivial $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Observações

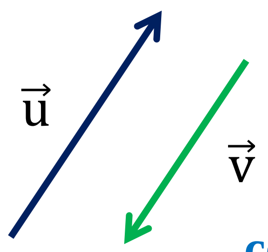
i. Um conjunto formado por um único vetor $\{\vec{u}\}$ é LD $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

ii. Se em um conjunto de n vetores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ algum dos vetores é o vetor nulo, ou seja, $\exists\ \overrightarrow{v_i} = \vec{0}$, então o conjunto é LD, pois tomando $a_i \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, tem-se:

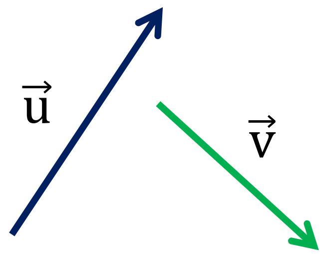
$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ \dots + a_i\vec{0} + \ \dots + a_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

e os a_i não são todos nulos.

iii. Um conjunto formado por dois vetores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} /\ \vec{u} = \lambda\vec{v}$.



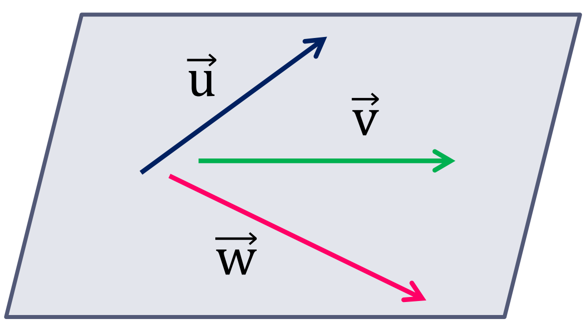
conjunto LD



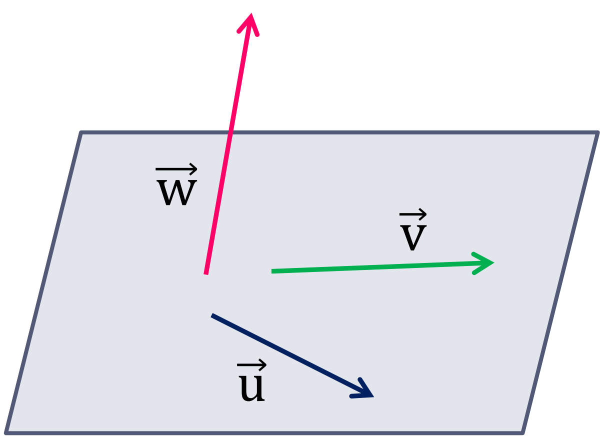
conjunto LI

iv. Um conjunto formado por três vetores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD $\Leftrightarrow$ um dos vetores for CL dos outros dois.

conjunto LD



conjunto LI



EXERCÍCIOS

1. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Se $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{w}$ e $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{6}\vec{u}$, escreva $\overrightarrow{DE}$ como CL de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

   $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} - \frac{1}{4}\vec{w}$

2. Sejam o conjunto LI $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ e os vetores $\overrightarrow{OA} = \vec{u} + 2\vec{v}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{OC} = 5\vec{u} + x\vec{v}$. Determine o valor de x para que os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam LD.

   $x = 2$