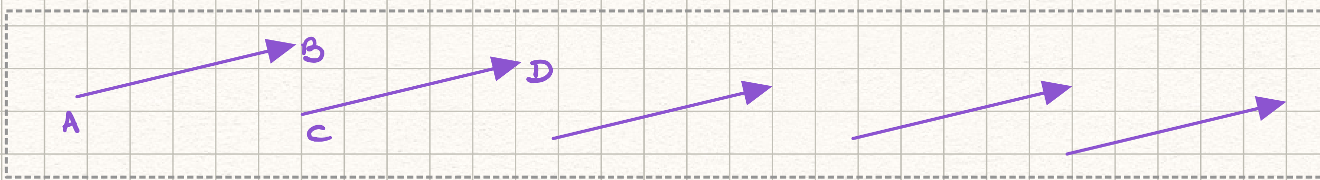
28/04/2021

SOs Equipolentes:

Mesmos $\begin{cases} \text{módulo} \\ \text{direção} \\ \text{sentido} \end{cases}$

OBS: não são iguais, pois são determinados por pontos diferentes.

Notação: $AB \sim CD$



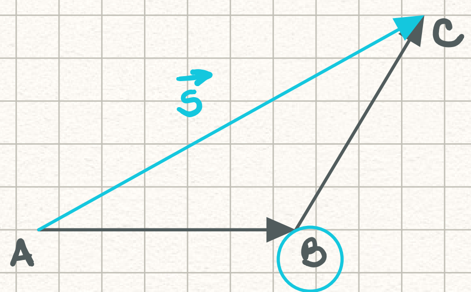
Vetor:

Conjunto de todos os SOs equipolentes a um SO conhecido:

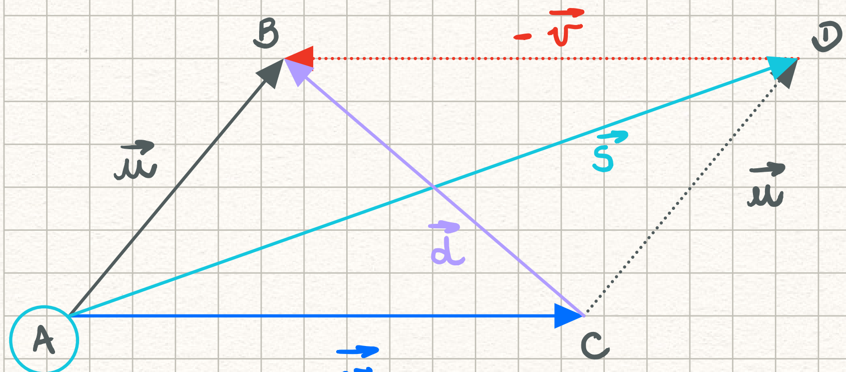
$$\vec{v} = \{ XY \mid XY \sim AB \}$$ AB ... SO conhecido

Notação: $\vec{v} = \vec{AB} = B - A$

Soma de Vetores:



$$\vec{s} = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$



Paralelogramo:

$$\vec{s} = \vec{AD} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{d} = \vec{CB} = \underbrace{\vec{u} - \vec{v}}_{\vec{u} + (-\vec{v})}$$

Multiplicação de um Vetor por um Escalar: $\boxed{\vec{p} = K\vec{v}}$

K ... escalar

altera

- módulo do vetor: $|K| < 1 \longrightarrow$ contrai
  - $|K| > 1 \longrightarrow$ dilata
- sentido: $K < 0 \longrightarrow$ inverte o sentido
  - $K > 0 \longrightarrow$ mantém o sentido

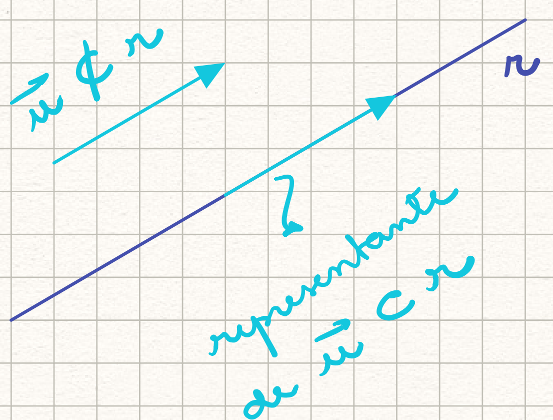
não altera $\longrightarrow$ direção do vetor: $\vec{p} \parallel \vec{v}$

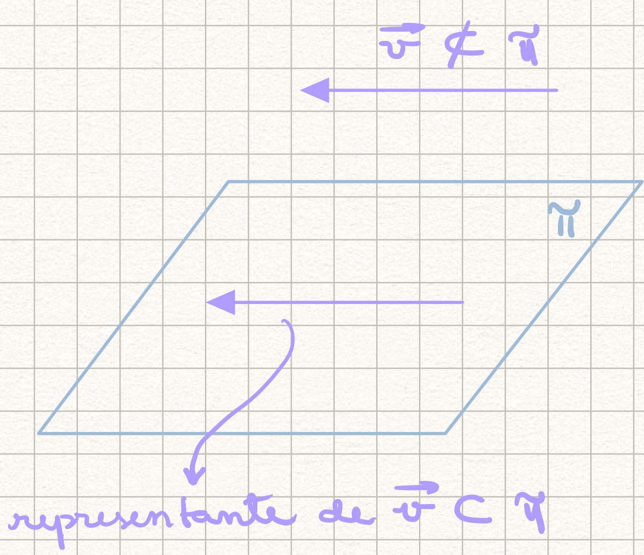
3. DEPENDÊNCIA LINEAR

A dependência linear é a característica que um conjunto de vetores pode ou não apresentar de ter em si um ou mais elementos que dependem de outros elementos do conjunto para ser formado. Por exemplo:

$\vec{u} = 3\vec{v} \longrightarrow$ $\vec{u}$ é resultado do produto de $\vec{v}$ por um escalar $(K = 3) \longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} \longrightarrow$ $\vec{w}$ é resultado da soma ponderada de $\vec{u}$ e de $\vec{v} \longrightarrow$ coplanares





Slides 3 a 5:

$$\boxed{a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n} = \vec{0}$$

CL

$$\begin{cases} \exists\, a_i \neq 0 \longrightarrow \text{LD} \\ \text{somente } a_i = 0 \longrightarrow \text{LI} \end{cases}$$

Slides 6 e 7:

i) $\{\vec{u}\} \longrightarrow$ CL: $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ $\begin{cases} \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \therefore \alpha = 0 \longrightarrow \text{LI} \\ \text{se } \vec{u} = \vec{0} \therefore \exists\, \alpha \neq 0 \longrightarrow \text{LD} \end{cases}$

ii) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{v}_n\}$

$\longrightarrow$ CL: $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_i\vec{0} + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$

Qual valor a_i pode assumir? $a_i \in \mathbb{R} \therefore \exists\, a_i \neq 0 \longrightarrow$ LD

iii)

$\{\vec{u}, \vec{v}\} \longrightarrow$ CL: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$

Uma solução: $\alpha = \beta = 0$. Ela é única?

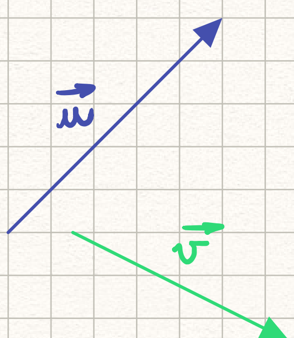
Não. $\vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \therefore \vec{u} = \lambda\vec{v}$, $\lambda \neq 0$. Assim:

$$\alpha(\lambda\vec{v}) + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

$$(\alpha\lambda + \beta)\,\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\therefore \alpha\lambda + \beta = 0$$

$\lambda = -\dfrac{\beta}{\alpha} \neq 0 \therefore \exists\, \alpha \text{ ou } \beta \neq 0 \longrightarrow$ conjunto LD

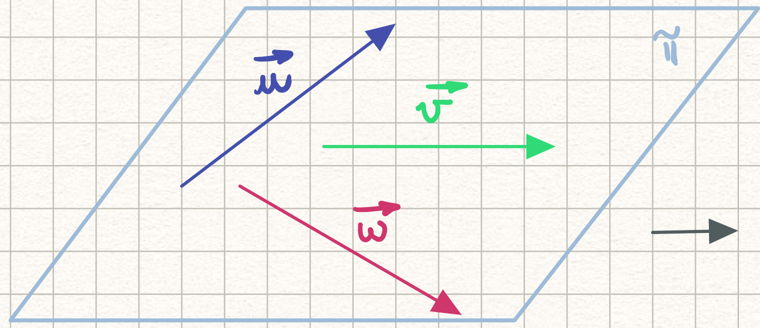


$\{\vec{u}, \vec{v}\} \longrightarrow$ CL: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$

Uma solução: $\alpha = \beta = 0$. Ela é única?

Sim $\longrightarrow$ conjunto LI

iv)



$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

$\longrightarrow$ CL: $a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} + a_3 \vec{w} = \vec{0}$

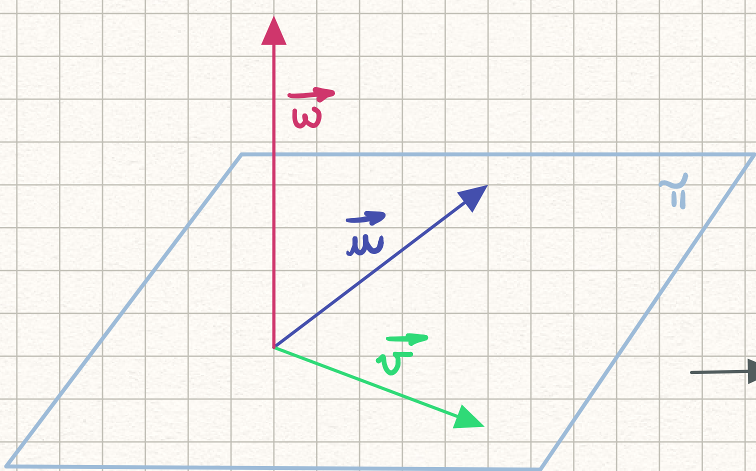
Uma solução: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ela é única?

Não. Se $\exists\ \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, então, da CL inicial, garante-se que $a_3 \neq 0$, pois:

$$a_3 \vec{w} = -a_1 \vec{u} - a_2 \vec{v}$$

$$\vec{w} = -\frac{a_1}{a_3} \vec{u} - \frac{a_2}{a_3} \vec{v} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \therefore \quad \exists\ a_i \neq 0$$

$\longrightarrow$ conjunto LD $\longrightarrow$ vetores coplanares.



$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

$\longrightarrow$ CL: $a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} + a_3 \vec{w} = \vec{0}$

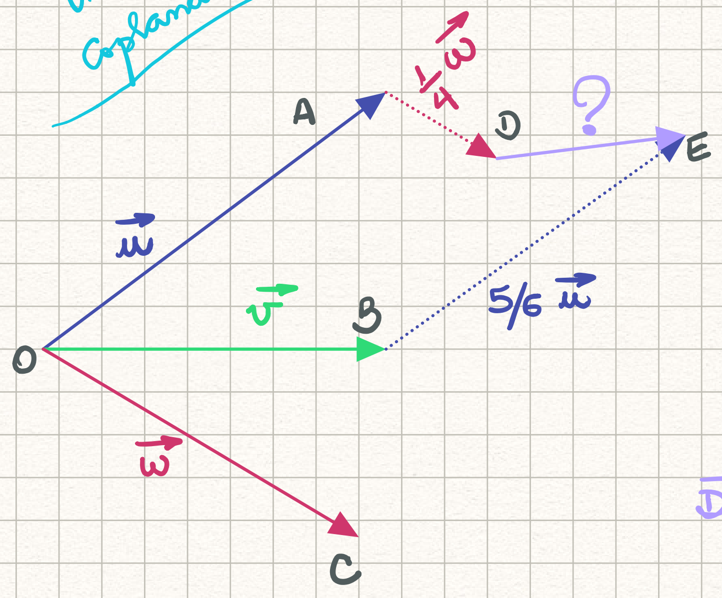
Uma solução: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ela é única?

Sim $\longrightarrow$ conjunto LI $\longrightarrow$ vetores não coplanares.

EXERCÍCIOS

1)

Vetores Coplanares



$\vec{DE} = ?$

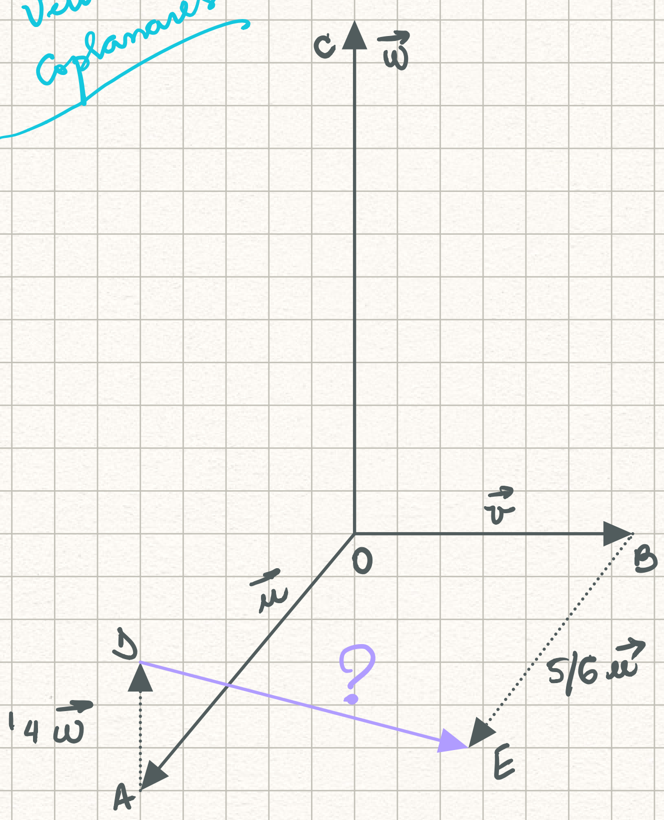
$\vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DE} + \vec{EB} + \vec{OB} = \vec{0}$

$\vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DE} - \vec{BE} - \vec{OB} = \vec{0}$

$\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{w} + \vec{DE} - \frac{5}{6}\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{DE} = -\frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} - \frac{1}{4}\vec{w}$

Vetores Não Coplanares



$\vec{DE} = ?$

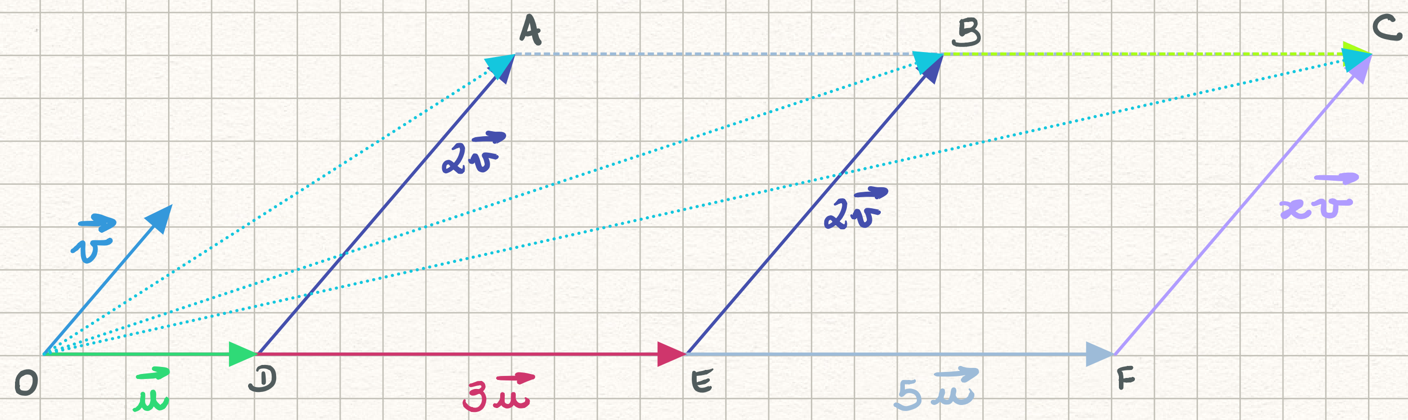
$\vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DE} + \vec{EB} + \vec{BO} = \vec{0}$

$\vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DE} - \vec{BE} - \vec{OB} = \vec{0}$

$\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{w} + \vec{DE} - \frac{5}{6}\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{DE} = -\frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} - \frac{1}{4}\vec{w}$

2) Esquematicamente:



$\vec{AC}$ e $\vec{BC}$ são LD $\Leftrightarrow$ $\vec{AC} \parallel \vec{BC}$ $\longrightarrow$ $x = 2$

Ou Algebricamente:

i) $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$

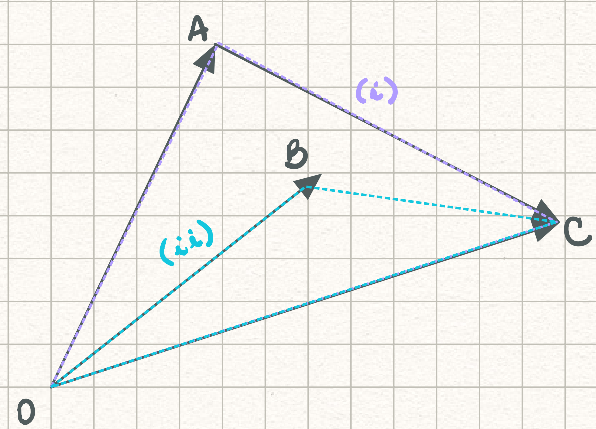
$$\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{AC} = 5\vec{u} + x\vec{v}$$

$$\vec{AC} = 4\vec{u} + (x-2)\vec{v}$$

ii) $\vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$

$$3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{BC} = 5\vec{u} + x\vec{v}$$

$$\vec{BC} = 2\vec{u} + (x-2)\vec{v}$$



Mas: $\vec{AC} \parallel \vec{BC}$

$\therefore$ $\vec{AC} = k\,\vec{BC}$

$$4\vec{u} + (x-2)\vec{v} = k\left[2\vec{u} + (x-2)\vec{v}\right]$$

$$4\vec{u} - 2k\vec{u} + (x-2)\vec{v} - k(x-2)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\underbrace{(4-2k)}_{=\alpha}\vec{u} + \underbrace{\left[(x-2)(1-k)\right]}_{=\beta}\vec{v} = \vec{0}$$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, portanto $(\alpha = \beta = 0)$:

$$\begin{cases} 4 - 2k = 0 & (i) \\ (x-2)(1-k) = 0 & (ii) \end{cases}$$

De (i): $k = 2$

$k \longrightarrow$ (ii): $(x-2)(-1) = 0$

$-x + 2 = 0 \longrightarrow x = 2$