Princípio da Boa Ordem

(PBO) $\boxed{\text{Todo conjunto NÃO VAZIO de inteiros não-negativos possui um mínimo.}}$

Também podemos enunciar o PBO das seguintes maneiras:

(1) Todo conjunto NÃO VAZIO de inteiros limitado inferiormente possui mínimo.

(2) Todo conjunto NÃO VAZIO de inteiros limitado superiormente possui máximo.

PBO $\iff$ (1) $\iff$ (2)

Demonstração: PBO $\iff$ (1)

($\Leftarrow$) É claro que (1) $\Rightarrow$ PBO, pois PBO é um caso particular de (1).

($\Rightarrow$) Admita que vale PBO.

Seja $A \subset \mathbb{Z}$, $\emptyset \neq A$ e A limitado inferiormente.
Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a \geq k$ para todo $a \in A$.
Seja $S = \{a - k \mid a \in A\}$. Então $S \neq \emptyset$, pois $A \neq \emptyset$.
Também, $a - k \geq 0$ para todo $a \in A$. Logo $\exists\, m_0 \in S$, $m_0 = \min S$. Então $m_0 = m - k$, para algum $m \in A$.
Mas $m_0 = m - k \leq a - k$, para todo $a \in A$, o que implica (pela LCA) que $m \leq a$ $\forall a \in A$. Assim, $m = \min A$.

Provar que (1) $\Rightarrow$ (2). (A demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1) é totalmente análoga.)

Suponha que vale (1) e seja $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$ e A limitado superiormente.
Então existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq K$ para todo $a \in A$.

Seja $S = \{x = -a \mid a \in A\}$.

Temos (i) $S \neq \emptyset$ pois $A \neq \emptyset$.

(ii) S é limitado inferiormente, já que $a \leq K$ para todo $a \in A$ implica que $-a \geq -K$ $\forall a \in A$. Logo $x = -a \geq -K$ para todo $x \in S$.

Por (1) existe $m \in S$, $m = \text{mín } S$.

Como $m \in S$, existe $M \in A$ tal que $m = -M$.
Portanto, $m \geq -a$ para todo $a \in A$, implica $-m \geq a$ para todo $a \in A$, e $m = -M \Rightarrow a \leq M$ $\forall a \in A$.

Logo $M = \text{máx } A$. $\blacksquare$

Propriedade Arquimediana dos Números Inteiros

Proposição: Sejam a e b inteiros positivos. Então existe um inteiro $n > 0$ tal que $na > b$.

Demonstração:

Suponha por absurdo que para todo $n > 0$ tem-se que $na \leq b$.

Seja

$$S = \{ b - na \mid n > 0 \} \qquad S \neq \emptyset$$

e S é limitado inferiormente já que $b - na \geq 0 \ \forall n$.

Seja $m = \min S$. Como $m \in S$, $m = b - ra$, para algum $r > 0$

Se $m' = b - (r+1)a = (b - ra) - a = m - a < m$ já que $a > 0$.

Então $m' \in S$ e $m' < \min S$, absurdo.

Logo, existe n tal que $na > b$. ∎

O Princípio de Indução Completa

$\phi(n) = n^2 - n + 41$

$\phi(n)$ é primo para todo n com $1 \leq n \leq 40$.

$\phi(41) = 41^2$

$\phi(n) = 1 + (n-1)(n-2) \cdots (n - 10^{10^{10}})$

Afirmação $\phi(n) = 1 \;\; \forall n \qquad n = 10^{10^{10}} + 1$

Como provar fórmulas como:

- Soma dos n primeiros termos de uma PA, de uma PG.
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$?

Princípio de Indução Completa:

TEOREMA: Seja $S \subset \{n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq a,\ a \in \mathbb{Z}\}$.

Suponha que (1) $a \in S$.

(2) Se um inteiro $k \geq a$ pertence a S então $k+1 \in S$.

Então: $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$.

Demonstração:

Suponha, por absurdo que a afirmação é falsa. Isso é supor que existe um inteiro $l \geq a$ tal que $l \notin S$.

Seja então $S' = \{ n \geq a \mid n \notin S \}$.

Pela hipótese (de absurdo) $S' \neq \phi$. Também, S' é limitado inferiormente. Pelo PBO, existe $m = \min S'$. Temos que $m \neq a$, pois por (1), $a \in S$. Logo $a < m$. Então $a \leq m-1 < m$ e como $m = \min S'$, $m-1 \notin S'$. Mas então, $m-1 = k \in S$ e por (2) temos que $m = (m-1)+1 = k+1 \in S$. ABSURDO (pois $m \in S'$).

Logo $S' = \phi$ e $S = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a \}$. ∎

Princípio de Indução Completa (1ª forma).

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Suponha que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de modo que:

(1) $A(a)$ é verdadeira.

(2) Se para um inteiro $k \geq a$, $A(k)$ é verdadeira, então $A(k+1)$ também é verdadeira.

Então $A(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Dem: $S = \{ n \geq a$ tal que $A(n)$ é verdadeira$\}$.

Use o TEOREMA.

Exemplos

(1) Soma dos Termos de uma P. A.

a e r inteiros

Defina $a_1 = a$, $a_2 = a + r$, $a_3 = a + 2r$, ----, $a_n = a + (n-1)r$.

Mostrar que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{n\,(2a + (n-1)r)}{2}$ para todo $n \geq 1$.

(1) BASE: $n = 1$ $\quad a_1 = a = \dfrac{1.\,(2a + (1-1)r)}{2} = a$.

(2) Seja $k \geq 1$ e suponha que $a_1 + \cdots + a_k = \dfrac{k\,(2a + (k-1)r)}{2}$.

(HIPÓTESE DE INDUÇÃO)

Mostrar que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = (k+1)\dfrac{(2a + kr)}{2}$.

Dem: $a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \dfrac{k\,(2a + (k-1)r)}{2} + a + kr$

$= \dfrac{k\,(2a + (k-1)r)}{2} + \dfrac{2a + 2kr}{2} = \dfrac{1}{2}\left[2ak + k(k-1)r + 2a + 2kr \right]$

$$= \frac{1}{2}\left[2a(k+1) + kr(k-1+2)\right] = \frac{1}{2}\left[2a(k+1) + (k+1)kr\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(k+1)(2a+kr)\right].$$

Assim, por (1) e (2) e pelo PIC, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

(2) Provar que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.

(1) $n = 1$ $\quad 1^2 = \dfrac{1(3 \cdot 2)}{6}$.

(2) Seja $k \geq 1$ e suponha que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(2k+1)(k+1)}{6}$.

Provar que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(2(k+1)+1)(k+2)}{6}$.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(k+1)\left(k(2k+1) + 6k + 6\right)\right] = \frac{1}{6}\left[(k+1)\underbrace{(2k^2+7k+6)}_{(2k+3)(k+2)}\right].$$

Assim, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$. $\blacksquare$

Definição por recorrência.

Potência de a de expoente positivo.

(i) $a^1 = a$.

$a^{n+1} = a.a^n$
para todo $n \geq 1$.

(Note que se $a \neq 0$, podemos definir (i) $a^0 = 1$
(ii) $a^{n+1} = a^n.a$
$\forall n \geq 0$.

(3) Demonstrar que:

$a^m a^n = a^{m+n}$ quaisquer que sejam $m, n \geq 0$.

Fixar m e fazer indução em n. (Fazer para $n \geq 1$)

(i) $n = 1$

$$a^{m+1} \overset{def}{=} a^m . a .$$

(ii) Suponha que para $k \geq 1$, $a^{m+k} = a^m . a^k$.

Mostrar que $a^{m+(k+1)} = a^m . a^{k+1}$.

$$a^{m+(k+1)} = a^{(m+k)+1} \overset{def}{=} a^{m+k} . a \underset{HI}{=} (a^m . a^k) . a$$

$$= a^m . (a^k . a) = a^m . a^{k+1} .$$

Logo a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$ $\blacksquare$

Outro exemplo de definição por recorrência:

DEF: $n!$, $n \geq 0$

(i) $0! = 1$

(ii) $(n+1)! = (n+1)n!$ para todo $n \geq 0$.

(4) Demonstrar que para todo $n \geq 4$, $n! > n^2$.

(i) $n = 4$

$4! = 24 > 16 = 4^2$.

(ii) Suponha que $k \geq 4$ e que $k! \geq k^2$. Mostrar que $(k+1)! \geq (k+1)^2$.

$$(k+1)! \overset{def}{=} (k+1)k! \underset{HI}{>} (k+1)k^2 \underset{(*)}{>} (k+1)^2$$

(*) Mostrar que para todo $k \geq 4$, $k^2 > k+1$

(i) $k = 4$ - $16 > 5$

(ii) Suponha que para $l \geq 4$, $l^2 > l + 1$.
Mostrar que $(l+1)^2 > l + 2$

Dem: $(l+1)^2 = l^2 + 2l + 1 > l + 1 + 2l + 1 = l + 2 + 2l > l+2$

Axiomas de Peano (1879)

Conceitos primitivos:

$$\begin{cases} \text{número natural} \\ 0 \\ \text{sucessor} \end{cases}$$

(1) 0 é um número natural.

(2) Todo número natural n tem um sucessor $\sigma(n)$.

(3) 0 não é sucessor de nenhum número.

(4) Se $\sigma(n) = \sigma(m)$ então $m = n$.

(5) PIC: Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que:

(i) $0 \in S$.

(ii) Se $n \in S$, $\sigma(n) \in S$.

Então $S = \mathbb{N}$.

Podemos reformular assim:

Existe uma função $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\underbrace{\text{INJETORA}}_{P2}$ tal que:

P1: $0 \notin \operatorname{Im}\sigma$

P2: σ é injetora.

P3: Se $A \subset \mathbb{N}$ é tal que:

(i) $0 \in A$

(ii) Se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$.

Então $A = \mathbb{N}$

Seja $\mathbb{N} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \}$

Seja $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $\sigma(n) = n+1$.

Então: P1: $0 \notin \operatorname{Im} \sigma$ $\qquad \sigma(n) = n+1$

P2: σ é injetora

P3: Indução

$$\begin{cases} m + 0 \overset{\text{def}}{=} m \\ m + \sigma(n) = \sigma(m+n) \end{cases} \qquad m + (n+1) = (m+n) + 1$$

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m \end{cases}$$

$m \leq n$ se existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m + r = n$.