3a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

1^o. semestre de 2021

1. Mostre que, se $a \in \mathbb{R}$ é um número positivo, então existe um único $x \in \mathbb{R}, x > 0$ tal que $x^2 = a$.
2. Prove que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ são irracionais.
3. Sejam x e y números irracionais, e suponha que $x^2 - y^2$ é um racional não nulo. Mostre que $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais.
4. Prove que $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
5. Prove que, se $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = 0$, então $x = y = 0$.
6. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado e $A = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$. Mostre que $\sup A = \alpha$.
7. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e limitados superiormente. Sendo $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$, mostre que $A + B$ é não vazio, limitado superiormente e que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Sendo $C = -A = \{-a : a \in A\}$ mostre que $\inf C = \sup A$.
8. Seja $S := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\sup S = 1$ e $\inf S = 0$.
9. Mostre que, se A e B são conjuntos limitados de $\mathbb{R}$ então $A \cup B$ é limitado. Mostre que $(\sup A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.
10. Seja $S \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado não vazio e limitado inferiormente. Mostre que $\inf S = -\sup -S$, sendo $-S := \{-s : s \in S\}$.
11. Diz-se que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente quando sua imagem $f(A)$ for um conjunto 0 limitado superiormente e escrevemos $\sup f = \sup f(A)$. Prove que, se

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem limitadas superiormente, então $f + g : A \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente e tem-se $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo no qual $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$.

12. Dadas duas funções a valores reais limitadas e positivas f e g (ou seja limitadas superiormente e inferiromente), mostre que $f \cdot g$ é limitada e $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf \cdot \inf g$. Dê um exemplo no qual ocorre desigualdade estrita.

13. Nas condições do exercício anterior, com $f = g$ mostre que a igualdade ocorre sempre.