DELTA DE DIRAC

ELETROMAGNETISMO

Funções e distribuições

Fênomenos físicos podem ser descritos por funções matemáticas. A força que uma mola exerce sobre uma massa presa a ela é um exemplo. Uma expressão como $F = F_0 \cos(\omega t)$ pode determinar a força em qualquer instante.

Outras situações são menos simples. A figura 1 retrata o movimento de uma bola elástica que colide com uma parede vertical. No primeiro momento, retratado no painel de cima, a bola avança com velocidade $\vec{v}$ em direção à parede. Nesse instante, não há forças horizontais sobre a partícula. Um certo tempo depois, a bola se deforma ao encontrar a parede. Agora, aparece uma força horizontal enorme, que empurra a bola no sentido oposto a seu movimento inicial.

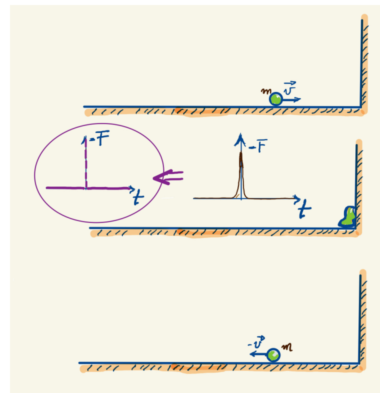

Figura 1: Colisão de uma bola contra uma parede. Supõe-se que inexista atrito. Os gráficos mostram o negativo da força horizontal sobre o objeto, ao longo do tempo.

O gráfico mais à direita no painel do meio mostra a força em função do tempo. Uma vez que a força se opõe à velocidade inicial, o gráfico mostra o negativo da força. Durante um curto intervalo, no qual a bola está deformada, a intensidade é muito grande. Fora desse intervalo, a força é nula.

A lei de Newton nos diz que a variação do momento da bola, devida à colisão, é dada pela igualdade

$$p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

onde t_i e t_f são os instantes retratados no painel de cima e no de baixo, respectivamente. Em outras palavras

$$-2mv = I_F, \tag{2}$$

onde I_F é o *impulso* da força.

Se estivéssemos num laboratório, seria relativamente fácil medir a massa e as velocidades antes e depois da colisão, e isso nos daria o impulso. Ir além disso parece difícil, porque teríamos de medir a força instante a instante durante o curto intervalo. Por isso, os cursos de Física I param na Eq. (2) e deixam a impressão de que essa equação é pouco mais do que uma definição, sem valor prático.

Felizmente, existe um tratamento matemático relativamente simples que descreve melhor a Eq. (2). A melhor maneira de entender esse tratamento é pensar que ele define um modelo para a força que a parede exerce. Quando trabalhamos com modelos, estamos substituindo uma descrição precisa por outra, mais simples e aproximada, que preserva as características do que queremos descrever.

No caso, o modelo é dado por um ente matemático conhecido como *função delta de Dirac*, definido pelas seguintes propriedades:

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{(para todo } x \neq 0\text{)}, \tag{3}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \mathrm{d}x = 1. \tag{4}$$

A definição não diz quanto vale $\delta(x = 0)$. Por isso, a rigor, $\delta(x)$ não é uma função. Para preencher essa lacuna, se quiser, você pode imaginar que $\delta(0) = \infty$. É questão de gosto, porque não tem nenhuma vantagem prática; pelo outro lado, não traz nenhum prejuízo.

Os físicos-matemáticos dizem, com mais precisão, que $\delta(x)$ é uma *distribuição*. Querem dizer que δ não é uma função, porque, em lugar de ser definida para todo x, é definida sobre parte do eixo x e o que falta é complementado por uma propriedade — a Eq. (4), no caso. Mais abaixo, veremos uma definição alternativa da $\delta(x)$, que você poderá achar mais atraente. Para aplicações práticas, porém, as Eqs. (3) e (4) são tudo o que é necessário. E, para simplificar, chamaremos $\delta(x)$ de "função delta", embora, a rigor, não seja.

No exemplo da figura 1, em particular, podemos acertar o relógio para que a colisão ocorra no instante $t = 0$ e escrever que

$$F(t) = f\delta(t), \tag{5}$$

onde f é uma constante.

Para determinar f, basta voltar à Eq. (2). Se o lado direito da Eq. (5) for substituído no lugar de $F(t)$, teremos que

$$-2mv = \int_{t_i}^{t_f} f\delta(t)\ \mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

A constante f pode ser extraída da integral no lado direito da Eq. (6). Resulta que

$$-2mv = f\int_{t_i}^{t_f} \delta(t)\ \mathrm{d}t\,. \tag{7}$$

Pelo nosso relógio, a colisão ocorreu em $t = 0$. O instante inicial t_i é, portanto, negativo, e o instante final t_f, positivo. Uma vez que $\delta(t) = 0$ para qualquer t negativo ou positivo, a integral pode ser estendida até o infinito, isto é,

$$-2mv = f\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

A definição de $\delta(x)$ nos diz que a integral no lado direito da Eq. (8) é unitária. Assim, podemos ver que

$$f = -2mv, \tag{9}$$

ou seja,

$$F(t) = -2mv\delta(t). \tag{10}$$

O gráfico à esquerda, dentro da elipse, na figura 1 mostra essa idealização da dependência de F com o tempo. A Eq. (9) mostra que a constante f tem dimensão de momento, não de força. Isso acontece porque $\delta(x)$ precisa ter dimensão de $1/[x]$ para que sua integral sobre x seja unitária:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]} \tag{11}$$

No caso, $\delta(t)$ tem dimensão de inverso de tempo. Significa que $f\delta(t)$ tem dimensão de momento dividido por tempo, como deveria ter, já que a força é a derivada do momento em relação ao tempo.

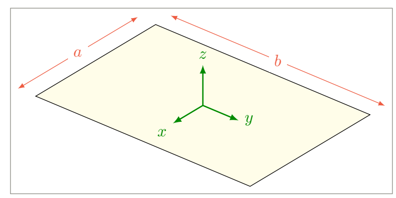

Figura 2: Folha de papel, muito fina.

Densidade de uma folha de papel

A figura 2 descreve outro exemplo. A folha de papel ali representada tem espessura uniforme muito menor do que as dimensões a e b. A massa da folha é m, e precisamos encontrar sua densidade volumétrica de massa ρ_m.

Sobre a densidade, sabemos que é uniforme na região do espaço que o papel ocupa, e zero fora dela. Vamos chamar essa região de $\mathcal{V}$. Temos então que

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \, \mathrm{d}\tau = m. \tag{12}$$

Se conhecêssemos a espessura da folha, seria fácil efetuar a integral no lado esquerdo da Eq. (12). Como só sabemos que a espessura é muito pequena, vamos recorrer à delta de Dirac.

Na figura, a origem está no centro da folha. No plano xy, a folha ocupa a região $\mathcal{S}$, amarela na figura, definida por $\frac{-a}{2} < x < \frac{a}{2}$, com $\frac{-b}{2} < y < \frac{b}{2}$. Na direção z, podemos adotar o modelo em que a folha tem espessura infinitesimal, isto é, em que a densidade é zero em todo o espaço, exceto na região $\mathcal{S}$, com $z = 0$.

Com isso, podemos escrever que

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \alpha\delta(z) & \left(-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}\right) \\ 0 & \text{(Caso contrário)} \end{cases}, \tag{13}$$

onde c é uma constante.

Para determinar α, recorremos à Eq. (12). Substituímos o lado direito da Eq. (13), para ver que

$$\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\delta(z)\ \mathrm{d}z = m, \tag{14}$$

ou que

$$ab\alpha = m. \tag{15}$$

Concluímos que $\alpha = m/ab$, o que significa que

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{m}{ab}\delta(z) & (-\dfrac{a}{2} < x < \dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2} < y < \dfrac{b}{2} \\ 0 & (\text{Caso contrário}) \end{cases} \tag{16}$$

.

O lado direito tem dimensão de massa dividida por área vezes a dimensão de $\delta(z)$. Como $[\delta(z)]$ é o inverso da dimensão de z, o lado direito da Eq. (16) tem dimensão de massa dividida por volume, como se espera da densidade volumétrica.

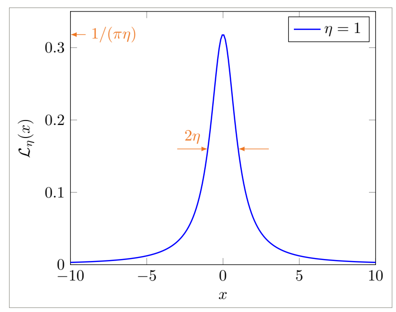

Figura 3: Lorentziana com largura $\eta = 1$

Sequência de funções

Embora não seja uma função, a delta de Dirac pode ser vista como o limite de uma sequência de funções. A sequência não é única. Na verdade, há uma infinidade de sequências que convergem para o mesmo resultado. Um bom exemplo é dado pela função Lorentziana ilustrada pelo gráfico na figura 3:

$$\mathcal{L}_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{x^2+\eta^2}, \tag{17}$$

onde η é um real positivo.

Como as setas na figura indicam, a Lorentziana tem largura 2η, isto é, cai para a metade de seu valor máximo quando $x = \pm\eta$. O máximo é $\mathcal{L}_\eta(x=0) = 1/(\pi\eta)$. Para calcular a área sob a curva, basta substituir a variável x por $\theta \equiv \text{atan}(x/a)$ na integral da Eq. (18). Resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_\eta(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big(\text{atan}(\theta)\Big)_{-\infty}^{\infty}, \tag{18}$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_\eta(x)\ \mathrm{d}x = 1. \tag{19}$$

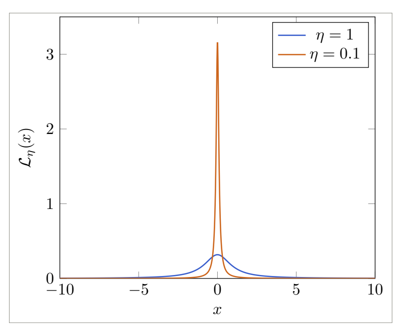

Figura 4: Comparação entre duas Lorentzianas com parâmetros η diferentes. A escala vertical é dez vezes maior do que a da figura 3.

Em resumo, a Lorentziana é praticamente nula para $|x| >> \eta$, assume o máximo $1/(\pi\eta)$ e tem integral unitária. Se η for muito pequeno, a função será nula exceto em uma pequena região em torno da origem, o valor máximo será muito grande, e a área sob a curva ainda será unitária. Quanto menor for η, mais perto ela estará de ter as características de função δ, como se pode ver na figura 4. No limite em que $\eta \to 0$, a Lorentziana equivale à função $\delta(x)$. E como o máximo da Lorentziana cresce sem limites quando $\eta \to 0$, essa construção justifica a imagem mencionada acima, na qual a $\delta(x)$ é uma função que vale zero em todo o eixo x, exceto na origem, na qual ela tende a infinito.

A Figura 1.46 do livro texto (Griffiths) traz mais dois exemplos de sequências que se aproximam das propriedades da função δ.

Propriedades

A definição de $\delta(x)$ admite manipulações algébricas que estendem a própria definição. Em princípio, qualquer alteração nos limites de integração ou mudança de variável que não altere o valor da integral no lado direito da Eq. (4) define uma propriedade da função delta.

Intervalo de integração. Uma vez que a função $\delta(x)$ se anula para $x \neq 0$, o intervalo de integração não precisa ser infinito. Desde que $a < 0$ e $b > 0$, podemos ver que

$$\int_a^b \delta(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \mathrm{d}x = 1 \qquad (ab < 0). \tag{20}$$

Se, ao contrário, a e b tiverem o mesmo sinal, o integrando será igual a zero em todo o intervalo, e a integral será nula:

$$\int_a^b \delta(x)\ \mathrm{d}x = 0 \qquad (ab > 0). \tag{21}$$

Inversão. Mudar o sinal da variável x equivale a trocar $\delta(x)$ por $\delta(-x)$. Explicitamente, a mudança de variável $x \to u \equiv -x$ mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x)\ \mathrm{d}x = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(u)\,(-\,\mathrm{d}u). \tag{22}$$

Os limites de integração no lado direito podem agora ser invertidos para eliminar o sinal negativo no diferencial, e isso mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\,(\mathrm{d}u) = 1. \tag{23}$$

Em outras palavras, a função $\delta(x)$ é par: integrar $\delta(-x)$ é o mesmo que integrar $\delta(x)$.

Translação. A mudança de variável $x \to u \equiv x - x_0$ desloca para x_0 o ponto onde a função δ não é definida. Se o intervalo de integração for o eixo x completo, isso não alterará a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\ \mathrm{d}u = 1. \tag{24}$$

Mudança de escala A mudança de variável $x \to u = \lambda x$ afeta a integral, mas a mudança é simples:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty/\lambda}^{\infty/\lambda} \delta(u)\ \frac{\mathrm{d}u}{\lambda}. \tag{25}$$

Caso a constante λ seja negativa, poderemos escrever que $\lambda = -|\lambda|$. Com isso, aparecerá um fator negativo dividindo o diferencial no lado direito, mas os sinais dos limites de integração também serão invertidos. Uma troca de sinais compensa a outra e assim podemos ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{|\lambda|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{|\lambda|}. \tag{26}$$

Outra maneira de entender o módulo que aparece no extremo direito dessa igualdade é lembrar que a função $\delta(x)$ é par. Isso significa que $\delta(\lambda x)$ é o mesmo que $\delta(|\lambda| x)$ que por sua vez é igual a $1/|\lambda|\delta(x)$.

Integrais de funções

A função δ teria pouca utilidade se somente pudesse aparecer como único elemento de um integrando, como nos lados esquerdos das Eqs. (1), (24) ou (26). Acontece que ela permite simplificar integrais mais complicadas. Vejamos um exemplo.

Suponhamos que queiramos efetuar a integral

$$I \equiv \int_{-a}^{a} f(x)\, \delta(x)\ \mathrm{d}x\,, \tag{27}$$

onde a é um número real positivo, e a função $f(x)$ é contínua. Como a função δ se anula para todo $x \neq 0$, é legítimo substituir $f(x)$ por $f(0)$ em todo o intervalo de integração. Com isso, garantimos não alterar $f(x)$ no único ponto importante do intervalo de integração, isto é, no ponto $x = 0$.

Feita a substituição, a Eq. (27) assume a forma

$$I \equiv \int_{-a}^{a} f(0)\, \delta(x)\ \mathrm{d}x\,. \tag{28}$$

Uma vez que é uma constante, $f(0)$ pode sair da integral, e resulta que

$$I \equiv f(0) \int_{-a}^{a} \delta(x)\ \mathrm{d}x\,. \tag{29}$$

A integral à direita é unitária, e assim podemos ver que

$$I = f(0). \tag{30}$$

Na prática, a função δ é um filtro, que escolhe o valor da função no ponto $x = 0$. Isso constatado, alguns livros preferem definir a distribuição δ pela igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\ \mathrm{d}x = f(0), \tag{31}$$

válida para qualquer função f que seja contínua no ponto $x = 0$.

Exemplos

Na prática, você encontrará muitas aplicações da Eq. (31), e não somente em Eletromagnetismo. É sempre simples. Vejamos alguns exemplos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}(x)\,\delta(x)\ \mathrm{d}x = 0, \tag{32}$$

já que $\mathrm{sen}(0) = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(x)\,\delta(x)\ \mathrm{d}x = 1, \tag{33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + a}\,\exp(-x)\,\delta(x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{a}. \tag{34}$$

O argumento da função δ não precisa ser x. Nesse caso, é necessário recorrer às propriedades encontradas na seção *Propriedades*, como os seguintes exemplos mostram.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + a}\,\exp(-x)\,\delta(x - a)\ \mathrm{d}x = \sqrt{a^2 + a}\,\exp(-a), \tag{35}$$

pois a função $\delta(x - x_0)$ é um filtro que escolhe o valor da função que a multiplica no ponto x_0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x)\,\delta(x - 1)\ \mathrm{d}x = \ln(1) = 0. \tag{36}$$

Neste caso, se a função fosse $\delta(x)$, a integral não poderia ser efetuada, pois $\ln(x)$ é descontínua em $x = 0$.

Finalmente, um exemplo que envolve mudança de escala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + x)\,\delta(-3x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + x)\,\delta(x)\ \mathrm{d}x\,, \tag{37}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(2 + x)\,\delta(-3x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(2). \tag{38}$$

Três dimensões

A generalização da função δ de Dirac para mais de uma dimensão é muito simples. O símbolo $\delta(x)$ é substituído por $\delta^d \vec{r}$, onde d é o número de dimensões e $\vec{r}$ é o vetor posição.

O caso tridimensional serve como ilustração. A definição passa a exigir que

1. A função $\delta^3(\vec{r})$ se anule em todo o espaço, para qualquer $\vec{r}$, a não ser na origem;

2. A integral sobre todo o espaço seja unitária:

$$\int_{\text{Espaço}} \delta^3(\vec{r})\ d\tau = 1. \tag{39}$$

Em coordenadas cartesianas, o elemento de volume é

$$d\tau = dx\, dy\, dz\,, \tag{40}$$

e isso mostra que a seguinte relação satisfaz às duas condições exigidas pela definição:

$$\delta^3(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{41}$$

Densidade de carga de uma partícula pontual.

Como exemplo, podemos calcular a densidade ρ de carga elétrica de um elétron. A carga do elétron é $-e$, e sabe-se que ela ocupa um volume muito pequeno, mas não sabemos como ela está distribuída no espaço. Nessas condições para descrever a densidade de carga $\rho(\vec{r})$ de um elétron que está no ponto $\vec{r} = \vec{r}_0$, podemos adotar o modelo da função delta e escrever que [1]

$$\rho(\vec{r}) = \alpha\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{42}$$

onde α é uma constante a determinar.

Para encontrar α, basta lembrar que a carga eletrônica é $-e$:

$$-e = \int_{\text{Espaço}} \rho(\vec{r})\ d\tau\,, \tag{43}$$

ou, com ajuda da Eq. (42),

$$-e = \int_{\text{Espaço}} \alpha\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)\ d\tau\,. \tag{44}$$

[1] Se você preferir, pode escrever, em coordenadas cartesianas, que

$$\rho(\vec{r}) = \alpha\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

onde x_0, y_0 e z_0 são as coordenadas do vetor $\vec{r}_0$, isto é,

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}.$$

No entanto, a notação da Eq. (42) é mais conveniente, porque ocupa menos espaço.

Uma vez que a integral é sobre todo o espaço, o deslocamento $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}_0$ no argumento da função δ não tem consequência, e a Eq. (44) se reduz

$$-\mathrm{e} = \alpha, \tag{45}$$

pois a integral sobre a função δ é unitária.

Resulta que $\alpha = -\mathrm{e}$, e a densidade de carga elétrica é

$$\rho(\vec{r}) = -\mathrm{e}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \tag{46}$$

Esse resultado será muito útil, como veremos em aula. Aqui, já podemos usá-lo para identificar a dimensão da função $\delta^3(\vec{r})$. O lado direito da igualdade tem dimensão de densidade de carga, ou seja, carga dividida por volume. Uma vez que e é uma carga, a dimensão da função $\delta^3(\vec{r})$ é inverso de volume. Isso faz sentido, já que cada fator à direita na Eq. (41) tem dimensão de inverso de comprimento.

O divergente de $\hat{r}/r^2$

Vimos em aula que o campo vetorial $\vec{v} = (1/r^2)\hat{r}$ tem divergência nula em todo o espaço, exceto na origem:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r^2}\hat{r} = 0 \qquad (r \neq 0). \tag{47}$$

Vimos também (exercício 10 da primeira lista), que

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r^2}\hat{r}\ \mathrm{d}\tau = 4\pi, \tag{48}$$

onde $\mathcal{V}$ é o volume ocupado por uma esfera de raio arbitrário R, centrada na origem.

Essas duas propriedades do campo $\vec{v}$ sugerem que representemos seu divergente por uma função δ:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r^2}\hat{r} = \alpha\delta^3(\vec{r}), \tag{49}$$

onde a constante α precisa ser determinada. Para isso, recorremos à Eq. (48), que agora pode ser escrita na forma

$$\int_{\mathcal{V}} \alpha\delta^3(\vec{r})\ \mathrm{d}\tau = 4\pi. \tag{50}$$

Podemos agora extrair a constante α da integral à esquerda. A integral passa então a ser unitária, e resulta que

$$\alpha = 4\pi. \tag{51}$$

Com isso, a Eq. (49) assume a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r^2}\hat{r} = 4\pi\,\delta^3(\vec{r}), \tag{52}$$

um resultado que também terá utilidade mais adiante.