Sumário

Capítulo 1

Probabilidade - Primeiros Conceitos Parte 2

1.1 Definição Axiomática de Probabilidade

Definição 1.1.1 *Probabilidade é uma função, denotada por $\mathbb{P}$, definida* ***nos eventos de*** *Ω, assumindo valores no intervalo $[0,1]$ e satisfazendo os seguintes axiomas:*

(A_1) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ *para todo* $A \subset \Omega$;

(A_2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(A_3) *Para uma sequência infinita de eventos disjuntos, temos que:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriedades decorrentes dessa definição:

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

   Prova:

   Sabemos que $\Omega = A \cup A^c$, o que implica que

   $$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \tag{1.1}$$

   Do axioma 2, temos que a probabilidade do espaço amostral é 1, ou seja,

   $$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \tag{1.2}$$

   e pelo axioma 3, temos que

   $$\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \tag{1.3}$$

   Substituindo (1.2) e (1.3) em (1.1) temos:

   $$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

Logo, temos que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, finalizando a prova.

2. Da propriedade anterior decorre que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

   Prova:

   Sabemos que $\Omega^c = \emptyset$.

   Portanto, $\mathbb{P}(\Omega^c) = \mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.

3. Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

   Prova:

   Seja $A \subset B$, temos que $B = A \cup (B \cap A^c)$, o que implica que

   $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap A^c))$.

   Sendo A e B disjuntos, pelo axioma 3 temos que

   $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$, o que implica em:

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A^c).$$

   Devido ao axioma 1, sabemos que $\mathbb{P}(B \cap A^c)$ é positivo, logo

   $$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

   Prova:
   Se $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$, temos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap A^c))$.

   Sendo A e B disjuntos, pelo axioma 3

   $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c). \tag{1.4}$$

   Seja $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$, pelo axioma 3, temos

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap A^c). \tag{1.5}$$

   Somando (1.4) e (1.5), obtemos $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)$, o que implica em

   $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Exemplo 1.1.1 *Seja A o evento "sair um número par", no lançamento de um dado honesto. Quando nos baseamos na Abordagem Clássica da Probabilidade calculamos $\mathbb{P}(A)$:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Como o dado é honesto, usamos que os eventos elementares[1] *são equiprováveis. Mas estamos usando probabilidade para definir probabilidade, por isso chamamos essa forma de pensar de abordagem e não de definição.*

[1] Evento que contém apenas um elemento

Como calcularíamos $\mathbb{P}(A)$ de acordo com a Definição Axiomática? A definição axiomática pressupõe que uma função de probabilidade seja proposta, e que esta obedeça os axiomas. Essa função é definida nos eventos de Ω. Neste caso poderíamos propor a seguinte função:

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad \textit{para} \;\; i = 1, 2, \cdots, 6.$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que essa função de probabilidade obedece os três axiomas. Usando a probabilidade definida, podemos calcular $\mathbb{P}(A)$, como segue abaixo:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}).$$

Como os eventos elementares são disjuntos, pelo axioma 3, tem-se:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Então a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado é $\frac{1}{2}$.

1.2 Exercícios

1. Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral. Suponha que $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$. Encontre a probabilidade de A e B ocorrerem, mas não ambos ao mesmo tempo ($(A - B) \cup (B - A)$). **Resposta:** 0.7

2. Sejam C e D dois eventos de um espaço amostral para os quais se sabe que $\mathbb{P}(C) = 0.3$, $\mathbb{P}(D) = 0.4$ e $\mathbb{P}(C \cap D) = 0.2$. Encontre $\mathbb{P}(D - C)$. **Resposta:** 0.2

3. Mostre que a probabilidade de exatamente um dos eventos A ou B ocorrer é $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(A\cap B)$. **Dica: Escreva o evento "exatamente A ocorrer"e "exatamente B ocorrer". Eles são disjuntos? Podemos aplicar o Axioma 3 na probabilidade da união deles?**

4. Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$. Sejam A e B eventos (subconjuntos de Ω), tais que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \;\; \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \;\; \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}.$$

   Encontre:

   (a) $\mathbb{P}(A \cup B)$;**Resposta:** 11/20

   (b) $\mathbb{P}(A^c)$;**Resposta:** 0.5

   (c) $\mathbb{P}(B^c)$;**Resposta:** 3/4

   (d) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.**Resposta:** 0.45

5. Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. E sejam os eventos

$$(A - B) = \{\omega_1\}, \;\; (B - A) = \{\omega_4, \;\; \omega_6\}, \;\; (A \cup B) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$$

   (a) Determine: $A \cap B$ e $A^c \cap B^c$. **Resposta:** $A \cap B = \{\omega_3\}$**,** $A^c \cap B^c = \{\omega_2, \omega_5\}$,

   (b) Agora, considere que os eventos elementares sejam equiprováveis. Determine: $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$. **Resposta:** 1/3 **e** 1/2**.**

6. Sejam A e B eventos, tais que $\mathbb{P}(A) = 2/3$ e $\mathbb{P}(B) = 4/9$. Mostre que

   a. $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 2/3$;

   b. $2/9 \leq \mathbb{P}(A \cap B^c) \leq 5/9$;

   c. $1/9 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 4/9$.

1.3 Conjunto Domínio da Função de Probabilidade

Nesta seção abordaremos com mais profundidade quem é o Conjunto Domínio da Função de Probabilidade. Em aula definimos o Conjunto das Partes de um conjunto A qualquer. É o conjunto de todos os subconjuntos desse conjunto, incluindo o próprio conjunto e o conjunto vazio, que é subconjunto de qualquer conjunto. Ver o pdf complementar da aula para exemplos.

A definição 1.1.1 diz que $\mathbb{P}(\cdot)$ é definida **nos eventos de** Ω, que são subconjuntos de Ω, que com certeza estão contidos no Conjunto das Partes de Ω. Quando Ω é finito, seu seu Conjunto das Partes é finito e podemos usá-lo como Domínio de $\mathbb{P}(\cdot)$.

Mas poderíamos usar como Domínio de $\mathbb{P}(\cdot)$ qualquer Coleção[2] de eventos de de Ω? E a resposta é não. A definição abaixo nos diz como deve ser essa Coleção.

Definição 1.3.1 *Definimos uma Álgebra*[3]*, $\mathcal{A}$, como uma coleção não vazia de subconjuntos de Ω, tendo as seguintes propriedades:*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) *Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$;*

(iii) *Se $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$, então $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$. (Mudei ao que mostrei em aula.)*

Exemplo 1.3.1 *(A menor Álgebra gerada por um evento.)*

Uma das menores Álgebras que podemos construir, é aquela que contém um particular evento A, seu complementar, A^c; e o Ω e seu complementar, o conjunto vazio.

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$$

Exemplo 1.3.2 *Considere $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e as seguintes coleções de subconjuntos: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ e $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Seriam ambas álgebras ? Para responder, devemos verificar se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{F}$ satisfazem os itens (i), (ii) e (iii) da definição 1.3.1.*

- *Considerando $\mathcal{A}$, temos:*

  (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

---

[2] Conjunto de conjuntos.

[3] Podemos definir uma classe de eventos mais restritiva, uma σ - Álgebra. Uma coleção de subconjuntos de um espaço amostral Ω, é chamada σ - Álgebra de subconjuntos de Ω, se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in A$;

(iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) *$A^c \in \mathcal{A}$, pois* $(\Omega^c = \emptyset,\ \emptyset^c = \Omega,\ \{1\}^c = \{2,3\},\ \{2,3\}^c = \{1\}) \in \mathcal{A}$.

(iii) *A união de dois ou mais eventos pertencem a $\mathcal{A}$, pois* $(\{1\} \cup \{2,3\} = \Omega) \in \mathcal{A}$.

Portanto $\mathcal{A}$ satisfaz todos os itens, logo $\mathcal{A}$ é uma álgebra.

- *Considerando $\mathcal{F}$:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) *$A^c \in \mathcal{F}$, pois*

$$(\Omega^c = \emptyset,\ \{1\}^c = \{2,3\},\ \{2\}^c = \{1,3\},\ \emptyset^c = \Omega,\ \{1,3\}^c = \{2\},\ \{2,3\}^c = \{1\}) \in \mathcal{F}.$$

(iii) *A união de dois ou mais eventos não pertencem a $\mathcal{F}$, pois* $(\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}) \notin \mathcal{F}$.

Portanto $\mathcal{F}$ não satisfaz (iii), logo não é uma álgebra.

Para os exemplos que trataremos neste texto, onde Ω é finito, a álgebra que usaremos será o Conjunto das Partes de Ω, cuja notação será $\mathcal{P}(\Omega)$.

1.4 Espaço de Probabilidade

Definição 1.4.1 *Um espaço de probabilidade, é representado pela tripla (Ω, $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}$), no qual, dado um experimento, Ω representa o conjunto de todos os resultados possíveis; $\mathcal{A}$ representa uma σ - álgebra (neste texto - conjunto das partes) e $\mathbb{P}(.)$ é a função de probabilidade, cujo domínio é $\mathcal{A}$ e o contradomínio é o intervalo [0,1].*

Exemplo 1.4.1 *Sejam $\Omega = \{0,1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ e p, tal que $0 \leq p \leq 1$. Definindo $\mathbb{P}(\{1\}) = p$ e $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$. Então $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.*

1.5 Exercícios

1. Seja Ω um conjunto finito, qual seria a menor álgebra de eventos de Ω?

2. Para Ω proveniente do lançamento de um dado:

   (a) Exiba $\mathcal{P}(\Omega)$.

   (b) Verifique se $\mathcal{P}(\Omega)$ é uma álgebra.

3. Considere a $\mathcal{F}$ do exemplo 1.3.2. Por que não conseguiríamos definir uma função de probabilidade nessa álgebra?