Sumário

Capítulo 1

Probabilidade - Primeiros Conceitos

1.1 Experimentos Aleatórios e Espaço Amostral

Quando falamos em *Experimento Aleatório* estamos nos referindo a um experimento que utiliza um mecanismo que gera resultados aleatórios. É um dos conceitos mais básicos em probabilidade e estatística. Entre esses experimentos, os mais comuns e conhecidos são bingo, loteria, lançamento de dados, lançamento de uma moeda.

Exemplo 1.1.1 *Experimento Aleatório: jogar uma moeda.*
Usemos a seguinte convenção:
H - Head - cara
T - Tail - coroa
Quais são todos os possíveis resultados?

Resposta: H, T.

Exemplo 1.1.2 *Experimento Aleatório: jogar a mesma moeda duas vezes.*
Quais são todos os possíveis resultados?

Resposta: HH, HT, TH, TT (observar que a ordem importa).

Exemplo 1.1.3 *Experimento Aleatório: lançamento de um dado.*
Quais são todos os possíveis resultados?
Resposta: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Exemplo 1.1.4 *Experimento Aleatório: Lançamento de dois dados iguais.*
Quais são todos os possíveis resultados?
Por exemplo, sair 1 *no primeiro lançamento e também sair* 1 *no segundo lançamento, que representaremos por "*1 *e* 1*". Os demais possíveis resultados são então:*

1 *e* 2*;* 1 *e* 3*;* 1 *e* 4*;* 1 *e* 5*;* 1 *e* 6*;*
2 *e* 1*;* 2 *e* 2*;* 2 *e* 3*;* 2 *e* 4*;* 2 *e* 5*;* 2 *e* 6*;*
3 *e* 1*;* 3 *e* 2*;* 3 *e* 3*;* 3 *e* 4*;* 3 *e* 5*;* 3 *e* 6*;*
4 *e* 1*;* 4 *e* 2*;* 4 *e* 3*;* 4 *e* 4*;* 4 *e* 5*;* 4 *e* 6*;*
5 *e* 1*;* 5 *e* 2*;* 5 *e* 3*;* 5 *e* 4*;* 5 *e* 5*;* 5 *e* 6*;*
6 *e* 1*;* 6 *e* 2*;* 6 *e* 3*;* 6 *e* 4*;* 6 *e* 5*;* 6 *e* 6*;*

As descrições acima dos possíveis resultados de um Experimento Aleatório são bastante informais. Precisamos introduzir alguma estrutura matemática para descrever de maneira formal os resultados de um experimento aleatório.

Definição 1.1.1 *(Espaço Amostral) Vamos chamar de Espaço Amostral o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.*

Usaremos a letra grega Ω como notação para o Espaço Amostral.

Pergunta ao leitor: qual foi a estrutura matemática que usamos nessa definição?

1.2 Conjuntos e suas relações

O conceito de conjunto é fundamental na Teoria de Probabilidades. Talvez isso só fique claro mais tarde. Num primeiro momento, entender bem as relações entre conjuntos vai facilitar muito o entendimento de diversos conceitos necessários para definir o que se chama de Espaço de Probabilidade que é a estrutura fundamental na solução de qualquer problema da área. E num segundo momento, se percebe que não dá para falar em probabilidade sem falar em conjuntos.

∘ Informalmente falando, um conjunto é uma coleção de objetos.

∘ Representamos um conjunto comumente por letras maiúsculas (A, B por exemplo) e os objetos são colocados entre chaves ($\{\ldots\}$).

∘ Conjuntos podem ser também representados pelos chamados diagramas de Venn.

∘ Os elementos de um conjunto podem ser representados por letras minúsculas: $a, \ b, \ldots \ y, \ z, \ \omega$.

∘ A relação de "um elemento a pertencer a um conjunto A" é indicada pelo símbolo de pertence: $\in$. Assim temos $a \in A$.

∘ Existem várias maneiras de representar os elementos de um conjunto A.

(a) Podemos fazer uma lista dos elementos de A. Por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ descreve o conjunto formado pelos inteiros positivos maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 4.

(b) Podemos descrever um conjunto A por meio de palavras. Por exemplo, poderemos dizer que A é o conjunto dos números inteiros pares positivos. E podemos descrevê-lo de maneira mais formal

$$A = \{x | x = 2 \cdot k, \ k = 1, 2, \ldots\}$$

isto é , A é o conjunto de todos os x's tal que x é um número inteiro par positivo.

∘ O conjunto vazio é representado pelo símbolo $\emptyset$ e é o conjunto que não contém elementos.

O Espaço Amostral é denotado pela letra grega Ω ("omega"). Um elemento de Ω é chamado de *ponto amostral* e representado pela letra grega minúscula ω ("omegazinho"). Voltando aos Exemplos 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 e 1.1.4, quais são os espaços amostrais que aparecem nesses exemplos?

- No **exemplo 1.1.1** temos $\Omega_1 = \{H, T\}$.

- No **exemplo 1.1.2** temos $\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$. Observe que no lançamento de duas moedas, a "ordem importa", pois HT é diferente de TH.
- No **exemplo 1.1.3** temos $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pergunta ao leitor: Como representar, de maneira formal, os elementos do Espaço Amostral no caso do **exemplo 1.1.4** ? Para responder essa pergunta precisamos das definições de pares ordenados e produto cartesiano, exibidas a seguir.

1.2.1 Conceito de Par Ordenado

Intuitivamente, um par ordenado consiste de dois elementos, digamos a e b, dos quais um, no caso o elemento a, é designado como primeiro elemento e o outro como segundo elemento, no caso o elemento b. Um par ordenado é denotado por (a, b). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Em símbolos

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \;\text{ e }\; b = d.$$

Observações:

- os pares ordenados $(2, 3)$ e $(3, 2)$ são diferentes.
- podemos ter pares ordenados com os primeiros e segundos elementos idênticos tais como: $(1, 1)$, $(5, 5)$ e $(7, 7)$.

1.2.2 Conceito de Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano desses dois conjuntos, simbolizado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertecente ao conjunto B.

Exemplo 1.2.1 *Produto cartesiano de A e B.*

- *se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$ então o produto cartesiano desses dois conjuntos será :*

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

  Observe que o elemento $(4, 1)$ não pertence a $A \times B$.

- *se $A = B = \{0, 1\}$ então o produto cartesiano desses dois conjuntos será :*

$$A \times B = A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Voltando ao lançamento de dois dados, temos que Ω_4 é o produto cartesiano do conjunto $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ por ele mesmo, ou seja, $\Omega_4 = \Omega_3 \times \Omega_3$ e seus elementos são representados por pares ordenados:

$$\Omega_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$

$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Observe que também poderíamos ter representado Ω_2 (o espaço amostral do lançamento de duas moedas) através de pares ordenados. Para tanto, basta perceber que Ω_2 é o produto cartesiano de Ω_1 (o espaço amostral do lançamento de uma moeda) por ele mesmo, ou seja,

$$\Omega_2 = \Omega_1 \times \Omega_1 = \{H, T\} \times \{H, T\} = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}.$$

1.2.3 Subconjuntos e Eventos

Se todo elemento de um conjunto A for também elemento de um conjunto B, diremos que A é um subconjunto de B e escrevemos simbolicamente $A \subset B$.

Exemplo 1.2.2 *Sejam os conjuntos $A = \{2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B, portanto o conjunto A é subconjunto de B, ou $A \subset B$.*

Os subconjuntos do espaço amostral Ω são chamados de eventos.

Exemplo 1.2.3 *Voltando ao Exemplo 1.1.3, onde o Experimento Aleatório é o lançamento de um dado, e $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, vamos considerar o conjunto "sair números pares" e chamá-lo de A, ou seja*

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Temos que $A \subset \Omega$, e dizemos que A é um evento de Ω.

Exemplo 1.2.4 *Consideremos o seguinte **Experimento Aleatório:** Lançar três moedas distintas uma vez. Temos então que o **Espaço Amostral** é dado por*

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

Vamos considerar o evento A= "não sair mais do que uma cara (H) nos lançamentos",

$$A = \{TTT, THT, HTT, TTH\}.$$

⋆ Dizemos que um evento A ocorreu se o resultado de um experimento aleatório pertencer a ele.

⋆ No exemplo 1.2.3, se jogarmos o dado e sair 2, temos que o evento $A = \{2, 4, 6\}$ ocorreu, pois $2 \in A$ (o ponto amostral 2 "*pertence ao*" evento A).

⋆ Por outro lado, dizemos que um evento A não ocorreu se o resultado de um experimento aleatório não pertencer ao conjunto A. No exemplo 1.2.3, se jogarmos o dado e sair 3, temos que o evento A não ocorreu, pois $3 \notin A$ (o ponto amostral 3 "*não pertence ao*" evento A).

⋆ Um evento que contem um único elemento é chamado de *evento elementar*. No exemplo 1.1.3, o evento B ="sair um número divisível por 5"($B = \{5\}$) é um evento elementar.

⋆ Para todo conjunto A, temos que $\emptyset \subset A$.

1.2.4 Relações entre conjuntos

1) União: Sejam A e B dois eventos de Ω. A união de A e B, denotada $A \cup B$, é o evento em que *só* A *ocorre* ou *só* B *ocorre* ou *ambos ocorrem.* Representamos a união de A e B, por:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \text{ ou } (\omega \in A \text{ e } \omega \in B)\}.$$

Exemplo 1.2.5 *Voltando ao lançamento de dois dados, vamos considerar os eventos A ="sair soma igual a 5 nos dois lançamentos"e B = "sair soma igual a 7 nos dois lançamentos".*

Queremos saber quais são os resultados que correspondem à ocorrência de A, de B ou de ambos. Temos

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

e

$$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

Logo

$$A \cup B = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

2) Intersecção: A interseção de A e B, denotada $A \cap B$, é o evento em que A ocorre e B ocorre. Representamos a intersecção de A e B, por:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}.$$

Exemplo 1.2.6 *Um baralho possui 52 cartas. Estas cartas estão divididas em 4 naipes: ouros, copas, espadas e paus. As cartas dos naipes de ouros e copas são vermelhas, já as cartas dos naipes espadas e paus são pretas.*

Cada naipe possui 13 cartas, sendo que 3 delas são chamadas de dama, valete e rei, e indentificadas pelas letras Q,J e K, respectivamente. As demais cartas de um naipe são numeradas de 2 a 10, e a carta que simboliza o número 1, é chamada de ás, representada pela letra A.

Vamos considerar o experimento aleatório em que uma carta é retirada ao acaso de um baralho. Quais são os possíveis resultados?

Vamos representar os naipes pelas letras maiúsculas: O = ouros, C = copas, E= espadas e P = paus. Por exemplo, se sair a carta 2 de paus, esse resultado é representado por 2P, ou se sair a carta valete de copas, esse resultado é representado por JC.

Logo, o espaço amostral é :

$$\Omega = \{AO, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, 7O, 8O, 9O, 10O, QO, JO, KO,$$

$$AC, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, 8C, 9C, 10C, QC, JC, KC,$$

$$AE, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, 7E, 8E, 9E, 10E, QE, JE, KE,$$

$$AP, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P, 7P, 8P, 9P, 10P, QP, JP, KP\}$$

Vamos chamar de A o evento "retirar uma dama". Então

$$A = \{QC, QO, QP, QE\},$$

Se B for o evento "retirar uma carta vermelha", então

$$B = \{AC, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, 8C, 9C, 10C, JC, QC, KC,$$

$$AO, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, 7O, 8O, 9O, 10O, JO, QO, KO\}.$$

Portanto, $A \cap B$ representa o evento "retirar uma dama vermelha":

$$A \cap B = \{QO, QC\}.$$

3) Complemento: O complemento de A, denotado A^c, é o evento que não contem nenhum elemento A, ou seja

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$

Exemplo 1.2.7 *Voltando ao lançamento de um dado, seja A o evento sair um número par, então $A = \{2, 4, 6\}$, e nesse caso $A^c = \{1, 3, 5\}$.*

4) Diferença: A diferença entre o evento A e o evento B, $A - B$, é o conjunto dos elementos que pertencem ao evento A, mas não pertence ao evento B, ou seja

$$A - B = A \cap B^c = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \notin B\}.$$

Exemplo 1.2.8 *Considerando novamente o experimento aleatório, lançamento de dois dados iguais, chamamos de A o evento sair números primos nos dois lançamentos. Portanto,*

$$A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5),$$

$$(3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Chamamos de B o evento sair números ímpares nos dois lançamentos, logo

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

e

$$A - B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2)\}.$$

5) Diferença Simétrica: A diferença simétrica de A e B, denotada por $A \triangle B$, é o conjunto dos elementos que ou pertencem a A ou pertencem a B, mas não pertencem a ambos os conjuntos A e B simultaneamente, ou seja

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \notin B \text{ ou } \omega \notin A \text{ e } \omega \in B\}.$$

Exemplo 1.2.9 *Voltando ao lançamento de dois dados iguais, seja A o evento sair dois números ímpares, cuja soma seja 6,*

$$A = \{(1, 5), (3, 3), (5, 1)\}.$$

Seja B o evento em que saem números pares ou números iguais, tais que somam 6,

$$B = \{(2, 4), (4, 2), (3, 3)\}.$$

Logo temos que a diferença simétrica de A e B é:

$$A \triangle B = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2)\}.$$

6) Conjuntos Disjuntos: Se os conjuntos A e B não possuem elemento em comum, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos. Em símbolos matemáticos, A e B são disjuntos, se:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Neste caso, os eventos A e B também são chamados mutualmente exclusivos.

Exemplo 1.2.10 *Sejam A e B dois eventos quaisquer de Ω. Observemos que os conjuntos $A - B, A \cap B$ e $B - A$ são dois a dois disjuntos. Podemos também observar que pela relação de diferença, os conjuntos $A - B$ e B são disjuntos.*

Exemplo 1.2.11 *Novamente considerando o lançamento de um dado, seja A o evento sair números pares, e seja B o evento sair números ímpares. Então A e B são disjuntos, pois não há um elemento comum aos eventos A e B, já que não exite um número que seja simultaneamente par e ímpar.*

Para demonstrar algumas propriedades de conjuntos, precisamos saber quando um conjunto é igual a outro. Dados dois conjuntos quaisquer A e B, esses conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos, isto é,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

1.2.5 Exercícios

1. **Experimento Aleatório:** Um dado é lançado duas vezes.
   (a) Exiba o espaço amostral (Ω).
   (b) Determine os seguintes eventos (escreva $A = \{\dots\}$):
      i. A=”A soma do resultado do lançamento do primeiro dado com o resultado do lançamento do segundo dado é igual a 2”.
      ii. B=”A soma do resultado do lançamento do primeiro dado com o resultado do lançamento do segundo dado é igual a 7”.
      iii. C=”o resultado do lançamento do primeiro dado é um número ímpar”.
      iv. D=”o resultado do lançamento do segundo dado é um número ímpar”.
      v. E=”A soma do resultado do lançamento do primeiro dado com o resultado do lançamento do segundo dado é ímpar”.
2. **Experimento Aleatório:** Um dado é lançado e uma mesma moeda é jogada duas vezes.
   (a) Exiba o espaço amostral (Ω).
   (b) Determine os seguintes eventos (escreva $A = \{\dots\}$):
      i. A=”no lançamento do dado sai 6, e no lançamento da moeda duas vezes, sai pelo menos uma cara”.
      ii. B=”no lançamento do dado sai um número par, e no lançamento da moeda duas vezes, sai cara na segunda vez”.
      iii. C=”no lançamento do dado sai um número menor que 5, e no lançamento da moeda duas vezes, sai pelo menos uma coroa”.

Relações entre Conjuntos

3. Desenhe o diagrama de Venn do conjunto $(A - B) \cup (B - A)$.

4. Desenhe o diagrama de Venn para os seguintes eventos.
   (a) $A \cap B \cap C$
   (b) $A^c \cap B \cap C$

5. Verifique, usando os diagramas de Venn, que para os eventos A e B vale que
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

6. Sejam A, B e C eventos de Ω. Verifique as seguintes relações, usando o Diagrama de Venn:
   (a) $(\Omega^c)^c = \Omega$
   (b) $(A^c)^c = A$
   (c) $A \cap A^c = \emptyset$
   (d) $A \cup \Omega = \Omega$
   (e) $A \cup A^c = \Omega$
   (f) $A \cap \Omega = A$
   (g) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   (h) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   (i) $\Omega \cap (A \cup B) = (\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B)$
   (j) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (k) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (l) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   (m) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   (n) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   (o) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

7. Sejam A e B dois eventos quaisquer. Considere que eles não sejam disjuntos ($A \cap B \neq \emptyset$). Verifique, usando os diagramas de Venn, se:
   (a) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$
   (b) $A \cup B = A \cup (B - A)$
   (c) $A \cup B = B \cup (A - B)$

8. Sejam A e B dois eventos quaisquer. Considere que eles não sejam disjuntos ($A \cap B \neq \emptyset$).
   (a) Os eventos $(A^c \cap B)$ e $(A^c \cap B^c)$ são disjuntos? Verifique, usando os diagramas de Venn.
   (b) Verifique, usando os diagramas de Venn, se $A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$.
   (c) Os eventos $(A^c \cap B)$, $(A^c \cap B^c)$ e $A \cap B^c$ são disjuntos?
   (d) Verifique, usando os diagramas de Venn, se $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$.